



**MIGUEL KATZ**

**TEMAS DE HISTORIA  
DE LA FÍSICA T. III.**



**ASOCIACIÓN QUÍMICA ARGENTINA**





TEMAS DE HISTORIA DE LA FÍSICA  
TOMO III



MIGUEL KATZ

TEMAS DE HISTORIA DE LA FÍSICA  
TOMO III



ASOCIACIÓN QUÍMICA ARGENTINA  
BUENOS AIRES  
2021

Katz, Miguel

Temas de Historia de la Física, Tomo III

1a ed. - Buenos Aires: Asociación Química Argentina, 2024.

Avda. Santa Fe 1145 C1059ABR

Ciudad Autónoma de Buenos Aires. República Argentina.

Tel-Fax (14 11) 4814 5942

Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga y online

Temas de Historia de la Física Tomo III

ISBN 978-987-47159-7-5



Libro de edición electrónica

Hecho en la República Argentina

Hecho el depósito de la Ley 11.723

Derechos reservados

1. Física. I. Título.

CDD 530.0712

*A mi hijo Hernán,  
con el afecto de toda la vida.*



*Agradecimientos:  
A la Asociación Química Argentina en las personas de  
su presidente, Dr. Carlos Cañellas,  
su vicepresidente, Dr. Alberto Capparelli  
y a la Directora de la División Educación Dra. Sandra Hernández.*



## PRÓLOGO

El Profesor Miguel Katz nos brinda nuevamente un hermoso libro sobre tópicos de historia de la Física, dirigido a docentes, investigadores y alumnos que hayan seguido cursos de electromagnetismo y teoría de la relatividad. El libro propone llevar al lector a recorrer un camino para alcanzar un objetivo central: ilustrar la evolución de las ideas que dieron origen a la Teoría de la Relatividad Especial.

Como todo buen libro de ciencias, el presente contiene además de un objetivo claro, un hilo conductor y una metodología concretas.

Al comenzar la lectura, se comprende que la intención del autor es explicitar que la concreción de una teoría no es un proceso sencillo, y mucho menos de progresos continuos en tiempos cortos, sino que la evolución es larga y tortuosa. Los procesos de generación de teorías incluyen avances y retrocesos, donde se crean y destruyen conceptos, un devenir oscilante de flujo y reflujo de ideas y propuestas. Y, si bien los epistemólogos conocen muy bien de estos aspectos, los mismos no siempre son explícitos para los estudiantes o profesionales jóvenes de las ciencias exactas, quienes claramente se beneficiarán con el presente libro.

El otro punto central es la metodología elegida por el autor, basada en presentar los artículos científicos originales (sus traducciones al inglés) de físicos que fundaron las bases del electromagnetismo y la teoría de la relatividad. El lector reconocerá las figuras de Hertz, Einstein y Lorentz, y apreciará la presentación tanto de publicaciones como detalles bibliográficos de científicos menos conocidos a nivel masivo, como Heaviside o Zeeman.

De esta forma se tiene un acercamiento directo, sin interpretaciones -aunque con guías de ayuda al lector-, a lo que esos genios de la física pensaban, hacían y planeaban; y brinda narrativas que otros libros de texto dejan de lado.

Hace más de cien años, Einstein y sus colegas procuraban encontrar las bases de las leyes que rigen al universo. Actualmente nuestra sociedad global está amenazada por diversas cuestiones, como el cambio climático y la necesidad de encontrar fuentes de energía sustentables. Es claro que sin generación de nuevos conocimientos científicos no será posible encontrar soluciones.

Es prioritario, por lo tanto, formar recursos humanos en ciencias exactas y, para ello, se necesita contar con buena bibliografía. En esta dirección, el Dr. Katz hace un aporte central para la enseñanza de la Física y propone una guía que nos ayude a orientar las actividades de investigación actuales, a partir de acercarnos a la esencia del pensamiento de los grandes científicos que participaron de la fundación de la ciencia moderna.

Dr. Martin Negri.  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.



## **PREFACIO**

En el presente tomo, hemos tratado de dar una reseña de los principales aportes teóricos en los campos del electromagnetismo y de la teoría de la relatividad hasta principios del siglo XX, Hay contribuciones importantísimas posteriores, – como la Teoría del campo cuántico – pero su propia actualidad hace que no se las considere históricas.

En la tarea de la compilación de datos y documentos, nos hemos encontrado con algunas dificultades, debidas a los derechos de autor, que nos han impedido traducir al español algunos trabajos originariamente escritos en alemán. Por ello, hemos decidido incorporar los textos traducidos al inglés que nos fueron disponibles, quedando fuera de nuestra responsabilidad los errores de traducción que se pudieran encontrar en los mismos.

Deseo aclarar que la inclusión en el texto de algunos errores elementales, como los de Einstein, no se debió a un intento de desmerecer los conocimientos del autor, sino de ilustrar con algunas anécdotas

el carácter humano, y no divino, de quien los cometió. Consideramos que la Teoría de la relatividad es la contribución más grande al desarrollo de la Física, mayor aún que las de Newton a la Mecánica o a la Óptica.

Miguel Katz,  
Marzo de 2024.

## ÍNDICE

17 – 1.-	<b>Introducción.</b>	<b>1</b>
17 – 2.-	<b>La contribución de FitzGerald a la interpretación del resultado del experimento de Michelson- Morley.</b>	<b>1</b>
17 – 3.-	<b>La contribución de Oliver Heaviside.</b>	<b>5</b>
17 – 4.-	<b>Heinrich Hertz y la corroboración de la teoría de Maxwell.</b>	<b>9</b>
17 – 4.1.-	<b>Cómo se gestó el <i>experimentum crucis</i> de Heinrich Hertz.</b>	<b>11</b>
17 – 5.-	<b>Hendrik A. Lorentz, de la crítica a Michelson a la contracción de los cuerpos en movimiento.</b>	<b>31</b>
17 – 5. 1.-	<b>Lorentz y su búsqueda de una teoría.</b>	<b>36</b>
17 – 6.-	<b>Zeeman y la ratificación de la teoría de Lorentz.</b>	<b>49</b>
17 – 7.-	<b>Albert Einstein y la relatividad.</b>	<b>53</b>
17 – 8.-	<b>Jules-Henri Poincaré y su concepción de la relatividad.</b>	<b>73</b>
17 – 9.-	<b>Eddington y la corroboración de la Teoría de la relatividad</b>	<b>78</b>
17 – 10.-	<b>La contribución de Karl Schwarzschild</b>	<b>81</b>
	<b>ANEXO A. Ondas electromagnéticas, propagación del potencial y los efectos electromagnéticos de una carga en movimiento.</b>	<b>86</b>
	<b>ANEXO B. Los trabajos de Hertz que le dieron respaldo empírico a la Teoría Electromagnética de Maxwell.</b>	<b>98</b>
	<b>On very rapid electric oscillations.</b>	<b>98</b>
	<b>From Herr W. von Bezold's paper; Researches on the electric discharge – Preliminary communication"</b>	<b>116</b>
	<b>On an effect of ultra-violet light upon the electric discharge.</b>	<b>124</b>
	<b>On the action of a rectilinear electric oscillation upon a neighbouring circuit.</b>	<b>136</b>
	<b>On electromagnetic effects produced by electrical disturbances in insulators.</b>	<b>147</b>
	<b>On the finite velocity of propagation of electromagnetic actions.</b>	<b>156</b>
	<b>On electromagnetic waves in air and their reflection.</b>	<b>169</b>
	<b>The forces of electric oscillations, treated according to Maxwell theory.</b>	<b>179</b>
	<b>On the propagation of electric waves by means of wires.</b>	<b>198</b>
	<b>On electric radiation</b>	<b>206</b>
	<b>On the mechanical action of electric waves in wires.</b>	<b>216</b>

	<b>On the fundamental equations of electromagnetics for bodies at rest.</b>	<b>222</b>
	<b>A. The fundamental ideas and their connection.</b>	<b>225</b>
	<b>On the fundamental equations of Electromagnetics for bodies in motion.</b>	<b>261</b>
	<b>Supplementary notes.</b>	<b>283</b>
	<b>ANEXO C: H. A. Lorentz;El movimiento relativo de la Tierra y el éter.</b>	<b>294</b>
	<b>ANEXO D: P. Zeeman: Acerca de la influencia del magnetismo sobre la naturaleza de la luz emitida por una sustancia.</b>	<b>298</b>
	<b>ANEXO E: A. Einstein: Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento.</b>	<b>311</b>
	<b>ANEXO F: Albert Einstein: La Teoría de la Relatividad especial y general.</b>	<b>343</b>
	<b>A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from: Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919. F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson.</b>	<b>421</b>











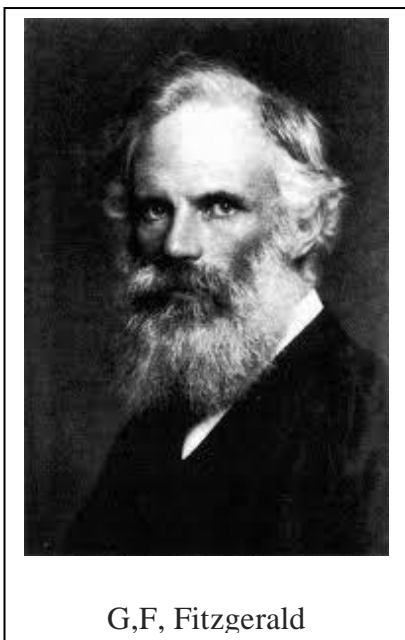
## CONTENIDOS

### 17 – 1.- Introducción

En el Tomo II (páginas 75 y siguientes.) hemos desarrollado los experimentos de Michelson de 1881 y las observaciones que Hendrik Antoon Lorentz le hiciera a ese trabajo, lo que motivó que, en 1886 Michelson y Morley diseñaran una nueva técnica experimental que minimizara las indeterminaciones señaladas al trabajo anterior.

En la Sección 14 – 3 del Tomo II hemos mencionado algunos datos sobre la vida y la obra de George Francis FitzGerald y anticipamos que daríamos detalles de sus ideas respecto a la contracción de la longitud de un cuerpo que se mueve en el éter.

### 17 – 2.- La contribución de FitzGerald a la interpretación del resultado del experimento de Michelson- Morley



George Francis FitzGerald nació en Dublín el 3 de agosto de 1851. Fue el segundo hijo de los tres que tuvieron William FitzGerald, luego Obispo de Cork, y Anne Frances Stoney. Al igual que sus hermanos, George fue educado en su casa, donde mostró interés y habilidad para la Aritmética y la Geometría. A los 16 años ingresó al Trinity College, de Dublín para estudiar Matemáticas y Ciencia experimental. En 1871 se graduó como mejor estudiante en las dos especialidades ganando una beca universitaria. Luego de la graduación continuó estudiando siendo su objetivo conseguir una membresía en el College. Luego de seis años de estudios, finalmente la consiguió.

En 1873 se publicó *Electricity and Magnetism* de James Clerk Maxwell, conteniendo las cuatro ecuaciones diferenciales del autor, que interesaron sobremanera a FitzGerald, quien decidió dedicarse a profundizar los conocimientos y las aplicaciones de esa teoría y para esos objetivos, a lo largo de los años intercambió ideas con Oliver Heaviside, Heinrich Hertz, Oliver Lodge, Joseph Larmor y Hendrik Antoon Lorentz.

Durante los seis años que se preparó para la Membresía, FitzGerald también se ocupó de estudiar Metafísica. En particular, le gustaba la filosofía de Berkeley.

En 1877, fue electo *Fellow* del Trinity College y en 1881 fue nombrado Professor of Natural and Experimental Philosophy.

Aplicando la teoría electromagnética de Maxwell, dedujo que una corriente eléctrica oscilante

debería generar ondas electromagnéticas y, en 1883, propuso un dispositivo para comprobarlo<sup>1</sup>. Sobre ese tema también trabajó Heinrich Hertz entre 1887 y 1889.

El 21 de diciembre de 1885, se casó con Harriete Mary Jellet, la hija del Reverendo J. H. Jellet, un funcionario de alto rango del Trinity College, Fellow de la Royal Society y ganador de la Royal Medal. El matrimonio tuvo ocho hijos, tres varones y cinco mujeres.

En 1883, FitzGerald fue electo Fellow de la Royal Society, entidad que, en 1899, le otorgó la Royal Medal por sus contribuciones a la Física teórica, especialmente a la Óptica y a la Electrodinámica.

En 1888, FitzGerald fue nombrado Presidente de la Sección Matemática y Física de la British Association.

En septiembre de 1900, FitzGerald comenzó a tener problemas en su sistema digestivo, los que se fueron agravando provocando su muerte el 22 de febrero de 1901.

Fue un escritor muy productivo. La casi totalidad de sus trabajos fue recopilada y publicada por Joseph Larmor<sup>2</sup>, obra que incluye 107 publicaciones suyas. Entre ellas, las de interés para el tema de este capítulo se encuentran: "*On Electromagnetic Effects due the Motion of the Earth*" (*Transactions of the Royal Dublin Society*, 1882), "*On the Quantity of Energy transferred to the Ether by a Variable Current*", (*Transactions of the Royal Dublin Society*, 1883), "*On a Model illustrating some Properties of the Ether*", (*Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*, 1885), "*On the Structure of Mechanical Models illustrating some Properties of the Ether*", (*Philosophical Magazine*, June 1885.), "*Note on the Specific Heat of the Ether*", (*Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*, 1885), "*The Relations between Ether and Matter*" (*Nature*, July 19, 1900.), "*Æther and Matter*", (*Electrician*, July 20, 1900.)

En lo referente a la interpretación del resultado del experimento de Michelson y Morley, en 1888, Fitzgerald se sintió interesado, al leer un artículo publicado por Oliver Heaviside en *The Electrician*<sup>3</sup>.

Según la Teoría electromagnética, una carga puntual en reposo con respecto al éter, produce un campo eléctrico cuyas superficies equipotenciales que rodean a la carga son esféricas. Pero cuando la distribución de carga está en movimiento uniforme en relación con el éter esa simetría se rompe.

---

<sup>1</sup> "On a Method of Producing Electromagnetic Disturbances of Comparatively Short Wave-Lengths," *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1883, pp. 404- 405. *Electrician*, 11 (1883) 519.

<sup>2</sup> **Larmor, J.**, (Ed.) (1902): "*The Scientific Writings of the Late George Francis FitzGerald*", Dublin: Hodges, Figgis & Co., London: Longmans, Green & Co.

<sup>3</sup> **Heaviside, O.**: *Electromagnetic waves, the propagation of potential, and the electromagnetic effect of a moving charge*, *The Electrician*: Part I., Nov. 9, 1888, p. 23; Part II., Nov. 23, 1888, p. 83; Part III., Dec. 7, 1888, p. 147; Part IV., Sept. 6, 1889, p. 458.

En 1888, Oliver Heaviside propuso la hipótesis de que la distribución del campo eléctrico de una carga en movimiento sufre una distorsión, y las componentes longitudinales del campo se ven afectadas por el movimiento, pero las transversales no. Las nuevas superficies equipotenciales definen lo que se denominó *elipsoide de Heaviside*. FitzGerald intuyó que esa característica dada por Heaviside podría suministrar una explicación del resultado del experimento de Michelson y Morley. Los resultados nulos de los primeros experimentos del viento de éter, se habían intentado explicar acudiendo al coeficiente de resistencia de Fresnel. Pero hasta principios de 1889 nadie había explicado la ausencia de cambios marginales notables en el experimento de Michelson y Morley del año 1887. ¿Cómo podría conciliarse la aparente isotropía bidireccional de la velocidad de la luz dentro del interferómetro de Michelson con el hecho aparente de que el laboratorio estaba acelerando a través del éter? ¿Por qué no se manifestó el viento de éter que soplabla a través del laboratorio cuando se hacía girar el interferómetro?

En enero de 1889, en una carta que FitzGerald le envió a Heaviside, le sugirió que una distorsión de Heaviside podría aplicarse a una teoría de las fuerzas entre las moléculas de un cuerpo rígido. Pero si estas fuerzas también se volvieron anisotrópicas por el mero movimiento de las moléculas, — algo que FitzGerald consideraba plausible a la luz del trabajo de Heaviside, — entonces debido al movimiento, la forma de un cuerpo rígido se alteraría.

FitzGerald, maduró su idea y envió una carta a la revista *Science* para su publicación. La carta<sup>4</sup> decía brevemente:

“He leído con mucho interés el maravillosamente delicado experimento de los Sres. Michelson y Morley, intentando decidir la importante cuestión acerca de, ¿en qué medida el éter es arrastrado por la Tierra? El resultado que obtuvieron parece opuesto a otros experimentos que muestran que el éter en el aire sólo puede ser arrastrado hasta un grado inapreciable. Yo sugeriría que casi la única hipótesis que puede reconciliar esta oposición, es que las longitudes de los cuerpos materiales cambian según se muevan a lo largo del éter o a través de él, en una cantidad que depende del cuadrado de la relación entre sus velocidades y la velocidad de la luz. Sabemos que las fuerzas eléctricas son afectadas por el movimiento de cuerpos electrificados relativos al éter y parece no ser una suposición improbable, que las fuerzas moleculares son afectadas por el movimiento y que, consecuentemente, el tamaño de un cuerpo se altera. Sería muy importante que experimentos seculares sobre atracciones eléctricas entre cuerpos permanentemente electrificados, tales como en un muy delicado electrómetro de cuadrante, fueran realizados en alguna de las partes ecuatoriales de la Tierra, para observar si hay alguna variación diurna y anual de la atracción, — diurna, debida a la rotación de la Tierra, siendo adicionada o sustraída de

---

<sup>4</sup> *Science* 13 (1889) 390.

su velocidad orbital y anual, similarmente, por su velocidad orbital y el movimiento del sistema solar.

George Francis FitzGerald

Dublín, mayo 2.”

Este fue la única publicación de FitzGerald referida a la contracción de la longitud de un cuerpo que se mueve con una cierta velocidad  $v$  en el éter. No es un trabajo de investigación, no expresa ninguna relación cuantitativa, no comprueba nada, ni siquiera cualitativamente. Entonces, ¿Por qué desde fines del siglo XIX, científicos, publicaciones especializadas y otros medios, han hablado de la "*contracción de FitzGerald*"? Algunos físicos que comentaron el tema, llegaron a decir que ese nombre se fue popularizando a partir de la muerte de FitzGerald tanto por reconocer la corrección de su hipótesis (*sic*) como por su contribución al desarrollo de la teoría electromagnética de Maxwell. 1892, Hendrick Antoon Lorentz, publicó un trabajo, más formal sobre el tema y la hipótesis comenzó a llamarse "*contracción de Lorentz-Fitzgerald*". Este trabajo, traducido al castellano, se presenta en el Anexo C, de este libro. Cuando comentemos los trabajos de Lorentz sobre los experimentos de Michelson y Morley y sus concepciones del movimiento de los cuerpos en el éter, daremos los argumentos que, para muchos físicos, justifican asignar el nombre de ambos científicos a la teoría.

Si bien FitzGerald no efectuó otra publicación sobre la contracción de las longitudes de los cuerpos al desplazarse en el éter, no dejó de argumentar en defensa de su teoría en cuánto ámbito fuera adecuado. El que sí publicó esas ideas fue su amigo Oliver Lodge, quien les dio a las ideas de FitzGerald una amplia difusión en la comunidad científica de la época.

### **17 – 3.- La contribución de Oliver Heaviside.**

Oliver Heaviside fue un físico-matemático inglés que influyó notablemente en la evolución de electromagnetismo del siglo XIX. Cuando en la actualidad, los físicos utilizan las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial usual, están utilizando, sin saberlo, los trabajos de Heaviside; cuando analizan el movimiento de una onda electromagnética a lo largo de un cable o a través del espacio o cuando emplean fórmulas que expresan magnitudes físicas como “impedancia”, “inductancia” o sus derivadas, están siguiendo los razonamientos de Heaviside, quien desarrolló su carrera en los confines de la comunidad científica y, a pesar de ello, llegó a ser una figura central en la consolidación de la teoría electromagnética de Maxwell y en su aplicación a los problemas prácticos.





Oliver Heaviside

Heaviside nació el 18 de mayo de 1850 en el barrio de Camden, en el norte de Londres. Su padre, Thomas, era un experimentado grabador de madera, cuya actividad no le proveía los recursos adecuados, debido a los adelantos tecnológicos en la producción de maquinaria para el trabajo de la madera; su madre, Rachel, había sido una institutriz, que luego abrió una pequeña escuela para los niños del vecindario. La familia vivió durante años sumergida en la pobreza.

Siendo niño, Heaviside contrajo escarlatina, enfermedad que le produjo una disminución importante de su capacidad auditiva, aunque recuperó buena parte de esa pérdida luego de la adolescencia.

Los padres recibieron una pequeña herencia, lo que le permitió a la familia mudarse a una zona un poco mejor de Camden. Con ello la vida de Oliver mejoró un poco. Le fue muy bien en los estudios, pero, por la falta de dinero, su educación formal terminó a los 16 años.

Más allá de sus capacidades innatas, Oliver Heaviside tuvo una ventaja importante para el desarrollo de su formación. La hermana de su madre se casó con Charles Wheatstone, que era Profesor de Física en el Kings College de Londres y era uno de los inventores del telégrafo eléctrico. Los hermanos Heaviside recurrieron a Wheatstone por ayuda para poder desarrollar carreras y él cumplió: Charles, el hermano mayor de Oliver se convirtió en un experto en “concertina” (otro de los inventos de Wheatstone) y, posteriormente, abrió tiendas de música en Torquay y Paignton en Devonshire, mientras Arthur, el otro hermano, comenzó a trabajar con Wheatstone en el negocio de la telegrafía, en Newcastle y posteriormente, se graduó como ingeniero y comenzó a trabajar en el sistema telegráfico de la British Post Office.

Después de completar sus estudios, Oliver viajó al Norte para asistir a Arthur y en 1868 consiguió un trabajo en la Anglo-Danish Telegraph Cable, empresa que había comenzado a operar en telegrafía en la costa del Mar del Norte proveyendo servicio entre Newcastle y Dinamarca.

La telegrafía por cable tuvo una gran expansión en los finales de la década de 1860. Después de algunos tropiezos iniciales, la industria encontró su camino al éxito desarrollando, ya en 1866, conexiones telegráficas hacia la costa oeste de Gran Bretaña y submarinas a la India, Sud América, Estados

Unidos,<sup>5</sup> Australia y China. La mayoría de esas conexiones fueron construidas, instaladas y operadas por firmas británicas y como líder de la época de la industria de la alta tecnología, la telegrafía por cable británica dio un gran impulso a los conocimientos sobre electricidad en la segunda mitad del siglo XIX. Aun la Anglo-Danish Cable, si bien, la dueña era una empresa Dinamarquesa, fue construida, instalada e, inicialmente, operada por ingenieros y técnicos británicos como Heaviside. En esa década, los laboratorios destinados a la investigación y el control de la transmisión de electricidad por cable se convirtieron en los más avanzados en el campo de la electricidad.

Heaviside quedó fascinado con los problemas de mediciones eléctricas y transmisión de señales y ya en 1873 publicó un trabajo en el *Philosophical Magazine*, acerca de la disposición de mayor sensibilidad para el puente de Wheatstone. Ese trabajo atrajo mucho la atención de William Thomson (luego Lord Kelvin of Largs) que, en esa época era el científico más famoso en temas de electricidad. Poco después de la publicación, Thomson estuvo de paso en Newcastle y buscó a Heaviside para felicitarlo por su trabajo. Heaviside, le envió una copia de su trabajo a James Clerk Maxwell quien lo citó en la segunda edición de su *Treatise on Electricity and Magnetism*.

Heaviside fue un empleado valioso para la Anglo-Danish cable, pero tenía un carácter hosco y, a menudo, se negaba a hacer tareas que consideraba que no eran para él. También tenía problemas de salud. Toda su vida padeció alteraciones notables de su temperatura corporal que le producían perturbaciones nerviosas, ya que él creía que esas alteraciones lo llevarían a la epilepsia. Ya fuera por sus problemas de salud, o el aumento del trabajo rutinario en el laboratorio o, simplemente, el deseo de enfocarse en la investigación y experimentación de sus propias ideas, en mayo de 1874, a los 24 años, renunció a su trabajo en la Compañía y volvió a Londres a vivir con sus padres. Desde entonces, no volvió a tener un trabajo formal, sino que se dedicó de tiempo completo a investigar y tratar de resolver problemas de electricidad. Su hermano Arthur le proveía asistencia económica a la vez que colaboraba en los proyectos de Oliver vinculados a su trabajo de ingeniero. Durante diez años, encerrado en una habitación en la casa de sus padres, se dedicó a investigar, ampliando las fronteras del conocimiento eléctrico.

Cuando aún trabajaba para la Anglo-Danish, se dedicó a analizar la teoría de la transmisión telegráfica propuesta por William Thomson en 1855, en la que el autor había derivado ecuaciones centradas en las magnitudes resistencia y capacitancia — cuyos efectos predominaban en los cables de gran longitud como los telegráficos — para expresar cuantitativamente su influencia en el voltaje de la corriente eléctrica, considerándolos como un simple caso de difusión. Heaviside hizo suyas las ideas de Thomson y las amplió en varios trabajos que, entre 1874 y 1881, publicó en el *Philosophical Magazine* y en el *Journal of the Society of Telegraph Engineers*. En esos trabajos tomó en cuenta la

---

<sup>5</sup> En 1867, William Thomson desarrolló el *siphon recorder*, aparato receptor para cablegramas, gracias al cual después de tantos ensayos infructuosos pudo tenderse un cable submarino que cruzando el Atlántico unió las comunicaciones entre Londres y Nueva York.

dispersión de la corriente y la autoinducción, demostrando que, dependiendo de los valores relativos de la resistencia, de la capacitancia, de la dispersión y de la inductancia, la alteración de la corriente no se produce de manera uniforme a lo largo del cable, sino que presenta oscilaciones bruscas hacia el frente de la onda o hacia atrás.

Heaviside leyó el *Treatise* de Maxwell, en 1873, el año de su publicación, pero confesó que no pudo entender la teoría del autor. Para poder descifrar las ideas de Maxwell sobre el electromagnetismo, se dedicó a reescribirla en un formato que pudiese entender. La mayoría de las ecuaciones del *Treatise* estaban expresadas en coordenadas cartesianas y de muchas de ellas se deducían fórmulas complicadas. En otras, Maxwell usó la forma compacta de los cuaterniones<sup>6</sup>. Cuando Heaviside trató de usar los cuaterniones para sus propios desarrollos le resultó que eran “antifísicos” y “antinaturales”, por eso los descartó y en sus trabajos posteriores usó una forma simple del álgebra vectorial, con la que encaró los problemas del electromagnetismo.

En 1882, Charles H. W. Biggs, el editor del periódico *The Electrician*, invitó a Heaviside a publicar, con cierta regularidad, trabajos sobre distintos aspectos de la electricidad, con una paga de £40 al año. Si bien era poco, Heaviside aceptó porque no tenía trabajo. A esa publicación contribuyó durante casi 20 años.

En 1884, Heaviside analizó los posibles movimientos de la energía en un campo electromagnético. Maxwell había expresado cómo se distribuye la energía en el campo, basada en los campos eléctricos y magnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , pero no dio ninguna indicación acerca de cómo se desplaza la energía de un punto a otro. Para Heaviside era un tema de gran interés ya que la telegrafía requiere la transmisión de energía — sin distorsiones, — a lo largo de un cable. Analizando las ecuaciones del *Treatise* y haciendo a partir de ellas, transformaciones complicadas, llegó a un resultado muy simple  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , el flujo de energía en un punto del espacio es, simplemente, el producto vectorial de los campos eléctrico y magnético en ese punto.

En 1889, publicó un trabajo que puede considerarse como precursor de la Teoría de la relatividad, en el que explicaba la posible deformación de una partícula cargada eléctricamente al moverse en un campo eléctrico e interactuar con ese campo, analizando los casos en que la partícula se movería a velocidades menores, iguales o mayores que la velocidad de la luz. Ese trabajo, le sugirió a FitzGerald una explicación al resultado nulo del experimento de Michelson-Morley de 1887, considerando la posibilidad de la contracción de la longitud en la dirección del movimiento en el éter de una partícula cargada, fuese la explicación de ese resultado nulo. En 1892, Hendrik Antoon Lorentz llegó a la misma conclusión, por lo que hoy, esa hipótesis, es conocida actualmente como “contracción de

---

<sup>6</sup> Un cuaternión es una expresión matemática que tiene cuatro partes, tres son vectores y la cuarta es un escalar. Peter Guthrie Tait, desarrolló el método para usarlos para representar movimientos y fuerzas en el espacio y convenció a Maxwell para usarlos en su *Treatise*.

Lorentz- FitzGerald”. Por la importancia que tiene el trabajo de Oliver Heaviside en el desarrollo de la teoría de la relatividad, lo transcribimos íntegro en su idioma original como Anexo A, al final de este capítulo.

A partir de 1889, la comunidad de físicos electricistas comenzó a reconocer los méritos de Heaviside. William Thomson lo elogió públicamente, Fitzgerald lo visitó en su vivienda de Camden, Oliver Lodge lo promocionó en varias de sus publicaciones, y a él se fueron sumando Heinrich Hertz, Joseph Larmor y otros. En 1891, fue electo *Fellow* de la *Royal Society* y sus trabajos comenzaron a mencionarse en los libros de la especialidad. En 1894, August Foppl, publicó sus ideas en su libro *Einführung in die Maxwellsche Theorie*, libro que usó Albert Einstein para estudiar la teoría electromagnética.

A fines de 1889, Oliver y sus padres se mudaron a Paignton para vivir en el mismo edificio que su hermano Charles. Allí se dedicó no sólo al electromagnetismo, sino que empezó a desarrollar métodos matemáticos para la resolución de problemas vectoriales y en 1893 presentó ante la *Royal Society* su trabajo “On operators in physical mathematics”, pero su trabajo fue objetado por los matemáticos cuestionando la manera en que trató las series divergentes. Sometido el trabajo a un referato, el mismo fue rechazado.

En 1896, Fitzgerald y otros amigos, gestionaron ante el Gobierno una pensión de £ 120 anuales para Heaviside, que luego fue aumentada a £ 200, con la que subsistió hasta la muerte.

Luego de la muerte de los padres, se mudó a una casa en Newton Abbot, pero la relación con el vecindario no fue muy buena y las reyertas no le permitían concentrarse en su trabajo. Su salud se fue debilitando y su hermano Charles le consiguió una vivienda en Torquay. Allí, en 1908 comenzó a compartirla con Mary Way, la cuñada soltera de su hermano Charles. La relación duró hasta 1916. Desde entonces y hasta el 9 de febrero de 1925 en que falleció, Oliver Heaviside vivió en soledad.

Heaviside nunca patentó sus ideas. En cambio, el físico Michael Pupin tomó un trabajo de Heaviside sobre la inducción en las redes telefónicas, lo patentó y le vendió la patente a la ATT en medio millón de dólares.

Algunas publicaciones de Heaviside pueden descargarse desde la Internet. Entre las publicadas en el *Jour. Soc. Tel. Eng.* Podemos mencionar “On induction between parallel wires” (1881) Vol.9. p. 427, “On the resistance of galvanometers” (1880) Vol. 9. P. 202, On the electrostatic capacity of suspended wires” (1880) Vol. 9, p. 115. “On electromagnets” (1878 Vol. Vii, p. 303. “Magneto-electric currents generators” (1881) Vol. 10, p. 271. Entre las publicadas en *The Electrician*; “Notes of the self induction of wires” (1886) I April 23, p. 471, II May 07, (1886) p. 510. “On the use of the bridge as an induction balance” April 30 1886, p. 489.

#### **17 – 4. Heinrich Hertz y la corroboración de la teoría de Maxwell.**

Heinrich Rudolf Hertz, nació en Hamburgo el 22 de febrero de 1857. Fue el hijo mayor de Gustav Ferdinand Hertz, un abogado de origen judío, convertido al luteranismo, que llegó a ser autorizado a defender casos en las cortes superiores y en 1887 fue electo Senador. La madre de Heinrich fue Elisabeth Pfeffercorn, la hija de un médico de Frankfurt. Los otros cuatro hermanos fueron tres varones y una niña.

La educación formal de Heinrich Hertz comenzó a los seis años al ingresar a una escuela privada, dirigida por Richard Lange y estudió allí durante diez años. En esa escuela, no sólo demostró gran capacidad intelectual, sino también una gran habilidad práctica, entre otras para el tallado de la madera, lo que le sirvió en la adultez, para fabricarse su propio instrumental. En su mesa de trabajo hizo hasta un espectroscopio completo. También mostró una gran facilidad para aprender idiomas, tanto modernos como los clásicos latín y griego. Además del trabajo manual, le gustaba dibujar.

En 1872, ingresó al Johanneum Gymnasium de Hamburg y allí continuó mostrando excelencia en un amplio rango de temas. Le interesaba la Botánica, los problemas de la Astronomía, la Física y las Matemáticas, temas en los cuales, estaba muy adelantado a sus compañeros de clase. También se destacó en otros campos, como la lingüística. Dedicó gran atención a sus estudios clásicos, y en años posteriores pudo recuperar páginas de Homero a partir de los escritos de los trágicos griegos. En esa época comenzó a estudiar sánscrito y árabe.

Egresó del Gymnasium en la Semana Santa de 1875, con la intención de dedicarse al campo de la ingeniería en la Universidad de Frankfurt, ciudad donde trabajó como voluntario en la oficina municipal de construcción, donde colaboró en la construcción del nuevo Puente Principal. Luego estudió durante un semestre en el Politécnico de Dresden y después, en Berlín, cumplió su año de voluntariado en el regimiento del ferrocarril. En otoño de 1877 pudo continuar sus estudios en la Universidad de Munich. Aquí fue que, al graduarse, se decidió por la ciencia pura;

Pasó los últimos y más fructíferos años de sus estudios en Berlín. Allí tuvo dos grandes maestros, Hermann von Helmholtz y Gustav Kirchhoff, los que influyeron sobremanera sobre su pensamiento científico, y con los que tuvo un vínculo muy cálido durante toda su vida.

Su primer trabajo importante, que llevó a cabo en este entonces recién construido instituto, fue para competir por un premio otorgado por la Facultad de Filosofía para el año 1879, por el que accedió a ese premio. Se refería a la investigación experimental de una posible fuerza viva de la electricidad que circula en la corriente galvánica. Hertz tuvo éxito, midiendo las corrientes adicionales que se producen en dos cables que se encuentran cerca uno del otro y que fluyen en la misma dirección, encontrando que la “fuerza viva” de la electricidad en movimiento en cuestión, si es diferente de cero, debe ser más pequeña que un determinado valor especificado, muy pequeño.

En marzo de 1880, Hertz presentó su tesis doctoral sobre la inducción en la rotación de esferas conductoras o esferas huecas entre imanes. Resolvió las ecuaciones diferenciales del problema derivado de la teoría de Neumann, descomponiendo el potencial inductor en funciones esféricas. Estableció que, a bajas velocidades de rotación, la autoinducción puede ignorarse por completo. Sin embargo, a altas velocidades de rotación, la autoinducción se vuelve tan fuerte que el flujo en las capas internas desaparece por completo y se retira a las partes superficiales del conductor. Como una reflexión posterior a este trabajo, también desarrolló el estudio de la distribución de la electricidad en la superficie de los conductores móviles, especialmente en las esferas giratorias, que publicó cuando era un asistente en el Instituto de Física. En este caso, la rotación no tiene lugar en el campo magnético sino en el electrostático. Los fenómenos resultantes se deben esencialmente a la relación de la resistencia específica medida electrostáticamente del conductor y el tiempo de revolución.

Trabajó con mercurio tratando de cuantificar el proceso de evaporación del mercurio en un espacio vacío. Su objetivo era establecer la velocidad de evaporación en función de la temperatura de la superficie de la fase líquida y de la presión de vapor, pero no tuvo buenos resultados debido a las complicadas condiciones del proceso.

Realizó algunos trabajos experimentales menores, como la construcción de un higrómetro y de un electrodinamómetro, que utilizó para sus experimentos. En 1883, Hertz recibió la habilitación en la Universidad de Kiel y fue asignado para la tarea docente en la asignatura Física teórica.

Le encantaba el puerto de Kiel, por lo que, a menudo, hacía breves excursiones alrededor del mismo, lo que lo incitó a estudiar los fenómenos meteorológicos y su influencia sobre el mar.

En esa época volvió al estudio de la electrodinámica, dedicándose a las relaciones entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de la “teoría de los opuestos”, o sea, las concepciones electrodinámicas de Weber y de Neumann.

En la primavera de 1885, se mudó a Karlsruhe, donde trabajó en el Politécnico local. Allí realizó experimentos termoeléctricos, con el permiso y el apoyo del Director del Instituto de Física de Kiel, Gustav Kaesten.

En Karlsruhe conoció a Elisabeth Doll, la hija de un colega geodésico, con ella se casó en julio de 1886. Tuvieron dos hijas, Johanna y Mathilde.

En noviembre de 1886, comenzó a trabajar en un problema que von Helmholtz había presentado ante la Academia de Ciencias de Berlín. En 1879, Helmholtz había intentado persuadirlo para que se dedicase a resolver ese problema, pero Hertz no lo hizo, pero, en 1884, luego de encarar el estudio y las implicaciones de las ecuaciones de Maxwell, Hertz se sintió confiado en poder resolverlo.

Entre 1887 y 1888, comenzó a investigar sobre la teoría de Maxwell y a diseñar instrumental y experimentos para corroborarla empíricamente.

Las tareas administrativas le restaban a Hertz bastante tiempo para la investigación experimental y a la muerte de Rudolf Clausius, en agosto, de 1888, la Universidad de Bonn lo invitó a tomar esa cátedra. Hertz aceptó y en la primavera de 1889, él y su familia se mudaron a Bonn. Allí se dedicó a investigar los aspectos teóricos de la teoría electromagnética, publicando dos trabajos sobre ella en 1890, en los que, partiendo de las ecuaciones de Maxwell, trataba de encontrar una base mecánica para la electrodinámica.

Ya en 1889, comenzó a padecer “dolor de muelas”. Realizó distintos tratamientos e inclusive le removieron toda la dentadura. A principios de 1892, comenzó a sufrir dolores de garganta y de nariz. En 1893, le efectuaron varias cirugías para aplacar sus dolores, pero al poco tiempo los dolores volvieron con más intensidad. El 3 de diciembre de 1893, envió al editor el manuscrito de su libro *Die Prinzipien der Mechanik*, cuatro días más tarde alcanzó a dar una conferencia, pero ya no se pudo levantar y falleció el 1º de enero de 1894.

Mucho se ha escrito sobre los experimentos que le dieron respaldo empírico a la teoría electromagnética de Maxwell. Preferimos citar al autor para que nos cuente sobre ello. Los trabajos más importantes sobre los resultados experimentales de Hertz están traducidos en el Anexo D.

#### **17 – 4.1.- Cómo se gestó el *experimentum crucis* de Heinrich Hertz.**

En su trabajo Hertz escribió<sup>7</sup>:

Muy a menudo me han preguntado cuales fueron los motivos que me llevaron a realizar los experimentos que se describen a continuación. El aliciente general fue el siguiente. En el año 1879, la *Akademie der Wissenschaften zu Berlin* anunció un premio para la tarea de probar experimentalmente cualquier relación entre las fuerzas electrodinámicas y la polarización dieléctrica de los aislantes, ya sea por una fuerza electrodinámica que excita procesos en los no - conductores, ya sea una polarización de los no conductores por las fuerzas de inducción electrodinámica. Como en ese momento estaba ocupado en investigaciones electrodinámicas en el Instituto de Física de Berlín, el Sr. von Helmholtz me llamó la atención sobre ese problema y me prometió que contaría con la asistencia del Instituto en el caso que decidiera emprender el trabajo. Reflexioné sobre la tarea y calculé el éxito que podía esperarse en las condiciones más favorables si utilizaba las oscilaciones que producen las

---

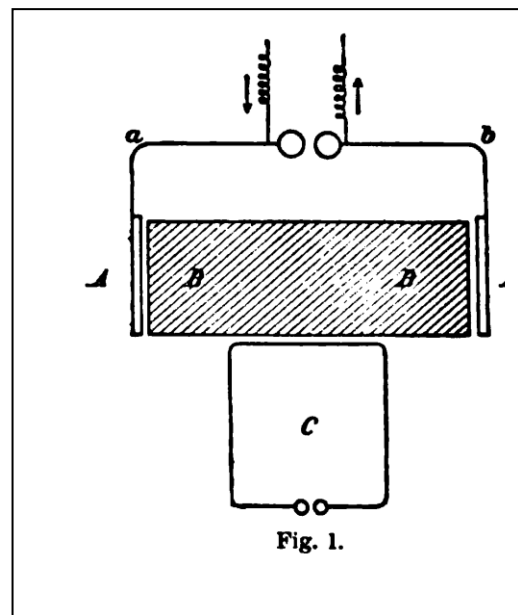
<sup>7</sup> Traducido de Hertz, H., *Electric Waves*, Authorised English Translation by D. E. Jones, B.Sc., London, Mac-Millan & Co. 1893.

botellas de Leyden o las bobinas abiertas de inducción. Por supuesto, el resultado al que llegué no fue lo que yo había deseado; parecía que difícilmente se podía esperar lograr un efecto indudable sino alguno que se encontraría dentro de los límites de la observación. Por lo tanto, abandoné la idea de trabajar en ese tema; tampoco sabía si la misma tarea había sido encarada en otro lugar. Pero mi ambición siguió siendo encontrar, más tarde y de una manera novedosa, la solución abandonada en la época que mi atención se centraba en todo lo relacionado con las oscilaciones eléctricas. Era casi imposible que pasara por alto cualquier nueva forma de tales oscilaciones, si se produjera una feliz oportunidad para traerla a mi conocimiento.

Tal oportunidad se presentó en la primavera de 1886, y trajo consigo el incentivo especial para iniciar las investigaciones siguientes. Entre la colección de instrumentos físicos de la *Technischen Hochschule zu Karlsruhe* (donde se llevaron a cabo estas investigaciones), encontré y utilicé para dar conferencias, un par de las llamadas espirales de Riess o Knochenhauer. Me sorprendió descubrir que no se necesitaba descargar grandes baterías a través de una de estas espirales para que se produzcan chispas en la otra; sino que, para este propósito, eran suficientes las pequeñas botellas de Leyden, y que incluso se podía lograr la descarga mediante una pequeña bobina de inducción, en tanto la descarga tuviera un espacio para que salte una chispa.

Al modificar las condiciones noté la aparición de chispas laterales que dieron origen a la siguiente investigación. Inicialmente, pensé que las perturbaciones eléctricas serían demasiado turbulentas e irregulares como para extraer una conclusión; pero cuando descubrí la existencia de un punto neutro en el medio de un conductor lateral y que el fenómeno era claro y ordenado, me convencí de poder lograr la solución del problema de la Academia de Berlín. En ese momento, mi expectativa no iba más allá de esto. La convicción en encontrar la solución aumentó al encontrar que las oscilaciones que se producían eran regulares. El primero de los trabajos aquí publicados ("*Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen*")\* muestra en orden temporal, el curso de la investigación que se llevó a cabo hasta fines del año 1886 y comienzos de 1887.

Cuando este trabajo estaba en prensa, descubrí que su contenido no era tan nuevo como yo creía. Para las Jornadas por el Día del geógrafo, de abril de 1887, vino a Karlsruhe el Sr. W. von Bezold, quien visitó mi laboratorio. Cuando le comenté sobre mis experimentos, él me respondió que años atrás había observado fenómenos similares, lo que llamó mi atención sobre su trabajo



\*\*\* (Sobre las oscilaciones eléctricas muy rápidas) *Annalen der Physik*, Vol. 267, 7, 1887, pp. 421 – 448.



"*Untersuchungen über die elektrische Entladung. Vorläufige Mitteilung*"\*\*\*\*, en vol. CXL. p.541 de los *Annalen* de Poggendorff.

Este ensayo se me había escapado por completo, ya que su apariencia externa parecía indicar que se refería a cuestiones distintas de las oscilaciones eléctricas, como ser, las figuras de Lichtenberg; realmente, no parece haber atraído tanta atención como merece la importancia de su contenido. En un *addendum* al trabajo anterior, reconocí los derechos más antiguos del Sr. von Bezold sobre toda la serie de observaciones. En vez de este apéndice, en este volumen, con el amable consentimiento del Sr. von Bezold, se incluye, como segundo documento, la parte de su comunicación que es de interés inmediato en conexión con el tema. Uno podría preguntarse, con sorpresa, cómo fue posible que resultados tan importantes y tan claramente enunciados no hayan tenido mayor influencia sobre el progreso de la ciencia. Quizás podría haber tenido algo que ver, el hecho de que el Sr. von Bezold describió su comunicación como un estudio preliminar.

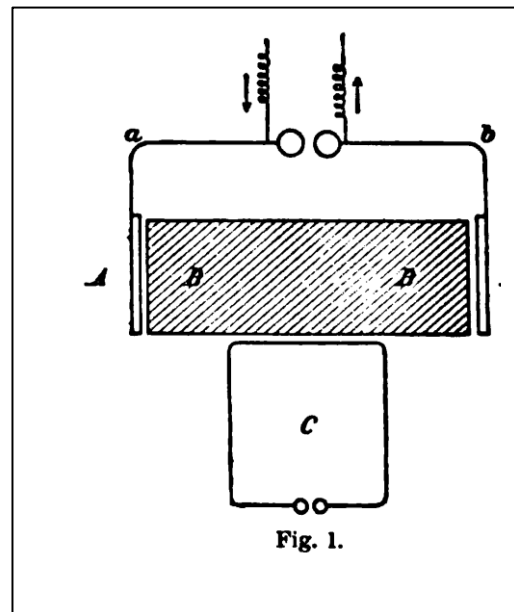
También quiero hacer notar el excelente trabajo realizado por dos colegas ingleses que, al mismo tiempo que yo, trabajaban sobre el tema. En el mismo año en que llevé a cabo la investigación anterior, el profesor Oliver Lodge, en Liverpool, investigó la teoría del pararrayos, realizando una serie de experimentos sobre la descarga de pequeños condensadores que lo llevaron a la observación de oscilaciones y ondas en cables. Dado que él aceptó por completo los puntos de vista de Maxwell y se esforzó ansiosamente por verificarlos, apenas puede haber dudas de que, si yo no lo hubiera anticipado, él también habría tenido éxito en observar las ondas en el aire y, con el tiempo, también en demostrar la propagación de la fuerza eléctrica. El profesor Fitzgerald, en Dublín, también se había empeñado, algunos años antes, en predecir, con la ayuda de la teoría, la posibilidad de tales ondas y descubrir las condiciones para producirlas. Mis propios experimentos no fueron influenciados por las investigaciones de estos científicos, ya que solo posteriormente conocí sus trabajos. De hecho, creo que hubiera sido imposible llegar al conocimiento de estos fenómenos solamente con la ayuda de la teoría ya que su aparición en la escena de nuestros experimentos depende no sólo de su posibilidad teórica, sino también de la especial y sorprendente propiedad de la chispa eléctrica que no podría ser prevista por ninguna teoría.

Mediante los experimentos ya mencionados, pude obtener un método para excitar perturbaciones eléctricas más rápidas de las que hasta entonces estaban a disposición de los científicos. Pero antes de que pudiera proceder a aplicar este método al examen del comportamiento de los cuerpos aislantes, tuve que terminar con otra investigación. Poco después de comenzar los experimentos, me llamó la atención una notable acción recíproca entre chispas eléctricas simultáneas. No quería que este fenómeno distraiga mi atención del objeto principal que tenía en mente; pero ocurrió de una manera tan definida y desconcertante que no pude descuidarlo por completo. Durante un tiempo, estuve dudando si no tenía ante mí una forma completamente nueva de acción eléctrica a distancia. La suposición de que la acción se debía a la luz parecía excluirse por el hecho de que las placas de vidrio la impedían;

---

\*\*\*\* "Estudios sobre la descarga eléctrica. Comunicación preliminar."

y, naturalmente, pasó un tiempo antes de que comenzara a experimentar con placas de cristal de roca. Tan pronto como supe con certeza que sólo estaba tratando con un efecto de luz ultravioleta, dejé de lado esta investigación para dirigir mi atención una vez más a la cuestión principal. En la medida en que se requiere un cierto conocimiento del fenómeno para investigar las oscilaciones, he reimpresso la comunicación relacionada con este ("*Ueber einen Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die elektrische Entladung.*")\* como el cuarto de estos documentos. Varios investigadores, especialmente los Sres. Eighi, Hallwachs y Elster y Geitel, han ayudado a que nuestro conocimiento del fenómeno sea más preciso; sin embargo, la mecánica de los mismos aún no se ha revelada por completo a nuestro entendimiento.



El verano de 1887 estuvo dedicado a esfuerzos infructuosos para establecer la influencia electromagnética de los cuerpos aisladores con la ayuda de la nueva clase de oscilaciones. El método más simple consistió en determinar el efecto de los dieléctricos sobre la posición del punto neutro de un circuito lateral. Pero en ese caso debería haber tenido que incluir las fuerzas electrostáticas en el fenómeno, pero el problema consistía precisamente en investigar sólo la inducción electromagnética. El plan que adopté fue el siguiente: – El conductor primario tenía la forma mostrada en la Fig. 1; entre las placas *A* y *A'* en sus extremos se introdujo un bloque *BB* de azufre o parafina, que luego se eliminó rápidamente. Coloqué el conductor secundario en la misma posición, con respecto al primario, como antes (la única posición que tuve en cuenta), y esperaba que cuando el bloque estaba en su lugar aparecerían chispas muy fuertes en el secundario, y que cuando se quitara el bloque solo se producirían chispas débiles. Esta última expectativa se basó sobre la suposición de que las fuerzas electrostáticas en ningún caso podrían inducir una chispa en el circuito *C* casi cerrado, ya que estas fuerzas tienen un potencial muy pequeño, que se deduce de su integral sobre un circuito casi cerrado. Por lo tanto, en ausencia del cuerpo aislante, solo deberíamos tener en cuenta el efecto inductivo del cable más distante *ab*. El experimento se vio frustrado por la aparición invariable de fuertes chispas en el conductor secundario, por lo que el moderado efecto de fortalecimiento o debilitamiento que debe ejercer el cuerpo aislante no se pudo apreciar. Poco a poco se me fue haciendo claro que la ley que había supuesto como base de mi experimento en este caso no se aplicaba; que, a causa de la rapidez del movimiento, aún las fuerzas que poseen un potencial pueden inducir chispas en el conductor casi cerrado; y, en general, que se debe tener el mayor cuidado al aplicar aquí las ideas y leyes generales que forman la base de las teorías eléctricas usuales. Todas estas leyes se relacionan con estados estáticos o estacionarios; mientras que aquí tuve ante mí un estado verdaderamente variable. Me di cuenta

\*\*\* ("*Acerca de la influencia de las luces ultravioleta sobre las descargas eléctricas*") *Annalen der Physik*, Vol. 267, 8, 1887, pp. 983 – 1000.

que, en cierto sentido, había atacado el problema demasiado directamente. Todavía había un número infinito de otras posiciones del secundario con respecto al conductor primario, y entre éstas podría haber algunas más favorables para mi propósito. Estas diversas posiciones tuvieron que ser examinadas. Así llegué a descubrir los fenómenos que se describen en el quinto documento ("*Ueber die Einwirkung einer geradlinigen elektrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn*")\*, y que me sorprendieron por su variedad y regularidad. El descubrimiento y el desenlace de estos fenómenos extremadamente ordenados me proporcionaron un gran placer. El documento ciertamente no incluye todos los detalles detectables: quien extienda los experimentos a otras formas del conductor encontrará que la tarea es muy grata. Las observaciones a distancias mayores también son, probablemente, muy inexactas, porque se ven afectadas por la influencia perturbadora de reflejos, algo que, en ese momento, no sospechaba. Lo que me sorprendió especialmente fue el continuo aumento de la distancia hasta la cual podía percibir la acción inductiva, hasta ese momento la opinión generalizada era que las fuerzas eléctricas disminuían de acuerdo con la ley de Newton, y por lo tanto tenderían rápidamente a cero a medida que la distancia aumentaba.

Durante el curso de esta investigación, me había asegurado de que había otras posiciones del conductor secundario en las que era posible, al acercar un aislante, provocar la producción o desaparición de chispas, en vez de, simplemente, modificar su tamaño. El problema que estaba investigando entonces se resolvió directamente de la manera descrita en el sexto documento ("*Ueber Inductionerscheinungen hervorgerufen durch die elektrischen Vorgänge in isolatoren*")†. El 10 de noviembre de 1887 pude informar el éxito del trabajo a la Academia de Berlín.

El problema particular de la Academia, que había sido mi guía hasta el momento, fue propuesto por el Sr. von Helmholtz en la siguiente conexión: — Si una parte de las proposiciones de la electrodinámica, que gozaban de reconocimiento general en ese momento, uno puede llegar a las ecuaciones de la teoría de Maxwell, que no eran generalmente aceptadas<sup>8</sup> en ese momento, añadiendo los siguientes prerequisites: Primero, que los cambios en las polarizaciones dieléctricas de los no conductores ponderables, ejercen las mismas fuerzas electrodinámicas que las corrientes equivalentes; segundo, que las fuerzas electrodinámicas son capaces de excitar tanto las polarizaciones dieléctricas como las electrostáticas; tercero, que el espacio que ocupa el aire y el espacio vacío se comportan, en estas relaciones, como cualquier otro dieléctrico.

---

\*\*\* ("Acerca de la influencia de una oscilación eléctrica rectilínea sobre el desplazamiento de una corriente adyacente") *Annalen der Physik*, Vol. 270, 5, 1888, pp. 155 – 170.

††† ("Fenómenos de inducción provocados por procesos eléctricos en aislantes"). *Annalen der Physik*, Vol. 270, 6, 1888, pp. 273 – 285.

<sup>8</sup> en la Alemania de 1879.

En la última parte de su artículo ("*Ueber die Bewegungsgleichungen de Elektrizität für ruhende leitende Körper*"),<sup>8</sup> von Helmholtz dedujo las ecuaciones de Maxwell a partir de los puntos de vista más antiguos y de las hipótesis que son equivalentes a las recién establecidas. El problema de probar las tres hipótesis y, por lo tanto, establecer la exactitud de la totalidad de la teoría de Maxwell, parecía ser una demanda irracional; la Academia, por lo tanto, se contentó con requerir una confirmación de uno de los dos primeros.

La primera suposición ahora se mostró correcta y, por un tiempo, pensé en atacar la segunda. Probarlo no parecía imposible; y para este propósito coloqué anillos de parafina cerrados. Pero mientras estaba en el trabajo, me di cuenta de que el centro de interés en la nueva teoría no radicaba en las consecuencias de las dos primeras hipótesis. Si se demostrase que estas eran correctas para cualquier aislador dado, se seguiría que las ondas del tipo esperado por Maxwell podrían propagarse en este aislante, con una velocidad finita que podría diferir ampliamente de la luz. Sentí que la tercera hipótesis contenía la esencia y el significado especial del punto de vista de Faraday, y por lo tanto la de Maxwell y que, para mí, sería un objetivo más digno de alcanzar. Para el aire, no vi manera de probar por separado la primera y la segunda hipótesis<sup>2</sup>; pero ambas hipótesis se probarían simultáneamente si se lograra demostrar que, en el aire, las ondas se propagan con una velocidad finita. Obviamente, algunos de los primeros experimentos en esta dirección fallaron; estos se describen en el documento mencionado, y se llevaron a cabo en distancias cortas. Pero mientras tanto había logrado detectar la acción inductiva a distancias de hasta 12 metros. Dentro de esta distancia, la fase del movimiento debe haberse revertido más de una vez; por lo que sólo quedaba detectar y probar esta reversión. Por lo tanto, se concibió el esquema que se llevó a cabo como se describe en la investigación "*Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*"<sup>3</sup>. El primer paso que tuve que tomar fue fácil. En alambres estirados rectos se produjeron ondas estacionarias sorprendentemente distintas con nodos y antinodos, y por medio de estos fue posible determinar la longitud de onda y el cambio de fase a lo largo del cable. Tampoco tuve mayor dificultad para producir interferencia entre las ondas que se habían propagado a lo largo del cable y las que se habían propagado por el aire, y así poder comparar sus fases. Ahora bien, si ambas acciones se propagaron, como esperaba, con una misma velocidad finita, deben interferir en todas las distancias con la misma fase. Un simple experimento cualitativo que, con la experiencia que luego obtuve, podría haberse completado en una hora, debiendo decidir esta cuestión y conducir de inmediato a la meta. Pero cuando había instalado cuidadosamente el aparato y llevado a cabo el experimento, descubrí que la fase de la interferencia era obviamente diferente a diferentes distancias, y que la alternancia era tal que correspondería a una velocidad infinita de propagación en el aire. Descorazonado, suspendí los experimentos. Pasaron

---

<sup>8</sup> "Sobre las ecuaciones del movimiento de la electricidad para la conducción de los cuerpos en reposo" V. Helmholtz, *Wiess. Abhandl.* 1, pp. 545 – 628.

<sup>2</sup> Las expresiones aire (*Luftraum*) y espacio vacío (*leerer Raum*) son usadas aquí como sinónimos, en tanto que la influencia del aire en esos experimentos es despreciable.

<sup>3</sup> "*Sobre la velocidad finita de propagación de las acciones electromagnéticas*" (*Aus. den Sitzungsber. Der Berl. Acad.* Vom. 2. Febr. 1888, mit einigen Zusätzen)

algunas semanas antes de que los reiniciara. Pensé que sería tan importante descubrir que la fuerza eléctrica se propagaba con una velocidad infinita, y que la teoría de Maxwell era falsa, como sería demostrar que esta teoría era correcta, para lo cual la única condición sería que el resultado obtenido debía ser definitivo y seguro. Por lo tanto, repetí con el mayor cuidado, y sin prestar atención a cuál podría ser el resultado, los experimentos realizados: las conclusiones a las que llegué se dan en el documento. Cuando procedí a considerar más de cerca estos resultados, vi que la secuencia de las interferencias no podía armonizarse con el supuesto de una velocidad de propagación infinita; que era necesario suponer que la velocidad era finita, pero mayor en el aire que en el cable. Como se muestra en el documento, me esforcé por poner en armonía varias posibilidades; y aunque la diferencia en las velocidades me parecía algo improbable, no pude ver ninguna razón para desconfiar de los experimentos. Y no era de ninguna manera imposible que el movimiento en el cable pudiera ser retrasado por algunas causas desconocidas, como, por ejemplo, por una inercia esencial de la electricidad libre.

He introducido estos detalles aquí para que el lector pueda estar convencido de que mi objetivo no era, simplemente, corroborar una idea preconcebida, de la manera más conveniente, mediante una interpretación adecuada de los resultados experimentales. Por el contrario, he llevado a cabo con el mayor cuidado posible estos experimentos (en modo alguno fáciles), aunque estuvieran en oposición a mis puntos de vista preconcebidos. Y, sin embargo, aunque pude haber tenido suerte en otros lugares, en esta investigación he tenido mala suerte. Porque en vez de alcanzar el objetivo propuesto con poco esfuerzo, como un plan bien diseñado podría haberme permitido hacer, parece que he tenido grandes inconvenientes, por lo que, después de todo, he caído en el error.

En primer lugar, la investigación estaba desfigurada por un error de cálculo. El tiempo de oscilación fue sobrestimado en la relación de  $\sqrt{2}:1$ . M. Poincaré fue el primero en llamar la atención sobre este error.<sup>1</sup> De hecho, este error afectó más a la forma de la investigación que a la sustancia de la misma. Mi confianza en la exactitud del cálculo se debió principalmente a que, supuestamente, estaba de acuerdo con los experimentos de Siemens y Fizeau<sup>2</sup>. Si hubiera utilizado el valor correcto para la capacidad, y así descubrir la discrepancia entre el cálculo y el experimento, hubiera puesto menos confianza en el cálculo; la investigación habría sido algo alterada en su forma, pero el tema no habría cambiado.

En segundo lugar (y este es el punto más importante), una de las principales conclusiones de la investigación apenas puede considerarse correcta, a saber, que las velocidades en el aire y en el cable son diferentes. Algunos conocimientos posteriores obtenidos respecto de la propagación de las ondas en alambres, en vez de confirmar este resultado, tendían a hacerlo cada vez más improbable. Ahora parece bastante cierto que, si el experimento se hubiera llevado a cabo correctamente y sin ninguna causa perturbadora, habría dado casi exactamente el resultado que esperaba al principio. No hay duda

---

<sup>1</sup> H. Poincaré, *Comptes Rendus* 111, p. 322.

<sup>2</sup> Ver la observación al final de la segunda parte de este trabajo (p.114).

de que la fase de la interferencia debe haber cambiado el signo una vez (y esto no lo había esperado de antemano); pero la interferencia no debería haber exhibido un segundo cambio de signo; y, sin embargo, los experimentos sin excepción señalaron esto. No es fácil encontrar cualquier causa perturbadora que pueda imitar de forma tan engañosa el efecto de una diferencia de velocidad; pero no hay ninguna razón por la cual no debemos admitir la posibilidad de tal error. Mientras realizaba los experimentos, nunca sospeché que pudieran verse afectados por las paredes vecinas. Recuerdo que el cable a lo largo del cual viajaban las ondas estaba situado cerca de una estufa de hierro, a sólo 1,5 metros de ella. Una perturbación causada de esta manera, y siempre actuando en el mismo punto, podría haber dado lugar al segundo cambio de fase de la interferencia. Sin embargo, cualquiera haya sido, me gustaría expresar la esperanza de que estos experimentos puedan ser repetidos por otro observador en las condiciones más favorables posibles, por ejemplo, en un recinto lo más grande posible. Si el plan del experimento es correcto, como creo que lo es, entonces, siempre que se lleve a cabo correctamente, debe dar el resultado esperado; entonces probaría, sin necesidad de medir la velocidad finita de propagación de las ondas en el aire, y al mismo tiempo demostrar la igualdad entre esta velocidad y la velocidad de las ondas en el cable.

También podría mencionar aquí algunas consideraciones adicionales que en ese momento fortalecieron mi convicción de que las ondas en el cable sufrían un retraso. Si las ondas en el cable se propagan a la misma velocidad que las ondas en el aire, entonces las líneas de las fuerzas eléctricas deben ser perpendiculares al cable. Por lo tanto, un cable recto atravesado por ondas no puede ejercer ninguna acción inductiva sobre un cable paralelo vecino. Pero descubrí que tal interacción ocurría, aunque sólo era débil. Llegué a la conclusión de que las líneas de fuerza no eran paralelas al cable, y que la velocidad de las ondas no era la misma que la de la luz. Además, si las líneas de fuerza son perpendiculares al cable, se puede demostrar mediante un simple cálculo que la energía propagada por una onda en un solo cable se vuelve logarítmicamente infinita. Por lo tanto, concluí que tal onda era *a priori* imposible. Por último, me pareció que no podría tener ningún efecto sobre la velocidad de propagación a través de un conductor recto, si el conductor era un cable liso o un cable con proyecciones laterales, o un cable torcido, o un cable en espiral con pequeñas circunvoluciones, supuesto siempre que estas desviaciones de la línea recta eran pequeñas en comparación con la longitud de onda, y que su resistencia no se tomaba en consideración. Pero luego descubrí que todas estas alteraciones producían un efecto muy notable sobre la velocidad de propagación. Por lo tanto, llegué a la conclusión de que aquí también había una causa desconocida en el experimento que causaba un retraso, y que también se hacía sentir en simples alambres rectos y lisos. Estas y otras razones similares no me parecieron de importancia decisiva; pero en ese momento me satisficieron tanto que afirmé sin reservas que había una diferencia entre las velocidades, y consideré esta decisión como uno de los resultados experimentales más interesantes. Pronto iba a descubrir lo que parecía ser una confirmación de mi opinión; y en ese momento fue muy bienvenida.

Mientras investigaba el efecto de mi oscilación primaria a grandes distancias, encontré algo así como una especie de formación de sombras detrás de masas conductoras, y esto no me pareció muy

sorprendente. Algo más tarde pensé que se notaba un refuerzo peculiar de la acción frente a tales masas que forman sombras y las paredes de la habitación. Al principio se me ocurrió que este refuerzo podría surgir de una especie de reflejo de la fuerza eléctrica de las masas conductoras; pero, aunque estaba familiarizado con las concepciones de la teoría de Maxwell, esta idea me pareció casi inadmisibles, tan completamente distinta a las concepciones entonces vigentes sobre la naturaleza de las fuerzas eléctricas. Pero cuando establecí con certeza la existencia de ondas reales, volví al modo de explicación que en un principio había abandonado y atendido los fenómenos que se describen en el documento "*Über electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*"\*. No se puede presentar ninguna objeción contra la parte cualitativa de esta investigación: los experimentos se han repetido y confirmado con frecuencia. Pero la parte de la investigación que se relaciona con las mediciones es dudosa, en la medida en que también conduce al resultado poco probable de que la velocidad en el aire sea considerablemente mayor que la velocidad de las ondas en los cables. Suponiendo que este resultado sea incorrecto, ¿cómo podemos explicar el error producido? Ciertamente, no se debe a la simple inexactitud de la observación. El error de observación puede ser aproximadamente un decímetro, pero, ciertamente, no un metro. Solo aquí puedo atribuir el error, en un sentido general, a las condiciones especiales de resonancia del recinto utilizado. Pueden haberse producido vibraciones naturales, y pude haber registrado los nodos de tal vibración cuando pensé que estaba observando los nodos de las ondas del conductor primario.

Ciertamente, la distancia entre los nodos que medí en el aire, era sustancialmente diferente de las longitudes de onda en el cable. Había dirigido expresamente mi atención a la cuestión de si eran diferentes o iguales. En lo que respecta a la concordancia exacta con la primera serie de experimentos, admito que, en la interpretación de los resultados experimentales, puedo haberme dejado influir por el deseo de establecer el acuerdo entre los dos conjuntos de mediciones. Establecí el primer nodo a cierta distancia detrás de la pared, y, por su tamaño, no se pudo deducir un control exacto a partir de experimentos. Si hubiera querido combinar los experimentos de manera diferente, podría haber sido capaz de calcular una relación de velocidades más cercana a la unidad; pero ciertamente no pude deducir, de esa relación, que las velocidades eran iguales. Ahora bien, si los experimentos que hice en ese momento coinciden en señalar una diferencia entre las velocidades, naturalmente se preguntarán qué razones ahora me inducen a admitir que puede haber fuentes de error desconocidas en los experimentos, en lugar de mantener la afirmación hecha en cuanto a la diferencia de velocidades. ¿Es la objeción que se ha suscitado en varios sectores en cuanto a la falta de acuerdo entre los resultados y la teoría? Ciertamente no. La teoría me era conocida en ese momento; y, además, debía estar subordinada a los experimentos. ¿Es el experimento en esta conexión hecho por el Sr. Lecher?<sup>1</sup> Esto, también, debo negarlo, aunque reconozco plenamente el valor del trabajo que el Sr. Lecher ha hecho en esta dirección. Al elaborar sus resultados, el Sr. Lecher supone que el cálculo es correcto y, por lo

---

\* "Sobre las ondas electrodinámicas en el aire y su reflexión." *Annalen der Physik*, Vol. 270, 8A, 1888, pp. 609 – 623.

<sup>1</sup> E. Lecher, "Eine Studie über elektrische Resonanzerscheinungen," *Wied. Ann.* 41, p. 850.

tanto, en cierto sentido, que la teoría en sí misma es correcta.<sup>2</sup> ¿Es entonces el resultado de los Sres. E. Sarasin y L. de la Rive,<sup>3</sup> que repitieron cuidadosamente los experimentos y llegaron a conclusiones que estaban completamente de acuerdo con la teoría? En cierto sentido, sí; en otro sentido, no. Los físicos ginebrinos trabajaban en un recinto mucho más pequeño que el mío; la distancia más grande de la que podían disponer era de sólo 10 metros, y las ondas no podían desarrollarse libremente incluso hasta esta distancia. Su espejo tenía solo 2,8 metros de altura. El cuidado en la realización de las observaciones no puede compensar la naturaleza desfavorable de la habitación. Por otro lado, en mis experimentos, las ondas tenían un movimiento perfectamente libre de hasta 15 metros. Mi espejo tenía 4 metros de altura. Si la decisión descansara simple y exclusivamente en los experimentos, no podría atribuir mayor peso a los de los Sres. Sarasin y De la Rive que a los míos.<sup>4</sup> Hasta ahora, vuelvo a decir que no. Pero ciertamente los experimentos de Ginebra muestran que mis experimentos están sujetos a variaciones locales; muestran que los fenómenos son diferentes si las paredes reflectantes y las habitaciones son diferentes, y también que bajo ciertas condiciones las longitudes de onda tienen los valores requeridos por la teoría. Pero si los experimentos proporcionan información que es ambigua y contradictoria, obviamente contienen fuentes de error que no se conocen plenamente y, por lo tanto, no pueden presentarse como argumentos en contra de una teoría respaldada por tantas razones basadas en la probabilidad. De modo que los experimentos de Ginebra privan sobre los míos y, hasta ahora, inclinan el equilibrio de la probabilidad hacia el lado teórico.

Aun así, debo reconocer que las razones que me decidieron fueron de un tipo más indirecto. Cuando por primera vez pensé que había encontrado un retraso de las ondas en los cables, esperaba descubrir pronto la causa de este retraso y encontrar algún cambio gradual en su valor. Esta esperanza no se ha cumplido. No encontré tal cambio y, a medida que aumentaba mi experiencia, en vez de encontrar una explicación, encontré discrepancias cada vez mayores, hasta que finalmente me parecieron insolubles, y tuve que renunciar a toda esperanza de demostrar lo correcto de mi primera observación. Mi propio descubrimiento, que, para las ondas cortas, la diferencia entre las velocidades casi desaparece, tendió en la misma dirección. Antes de que uno de mis colegas científicos atacara esta pregunta, expresé mi opinión en las siguientes palabras<sup>5</sup> — "Así descubrí que para ondas largas

---

<sup>2</sup> La misma observación rige también para el trabajo recientemente publicado por el Sr. Blondlot, C. R. 113, p. 628 (cp. Nota 15 al final del libro).

<sup>3</sup> **Edouard Sarasin et Lucien de la Rive**, *Comptes Rendus*, 112, p. 658.

<sup>4</sup> El Sr. Trouton, en una habitación cuyas dimensiones exactas no fueron dadas, encontró — igual que yo — que la longitud de mi primer conductor en el aire, fue de alrededor de 10 metros. — *Nature* 39, p. 391.

<sup>5</sup> Desde que escribí lo de arriba, quiero expresar que quedé ampliamente satisfecho con los experimentos de los Sres. Sarasin y de la Rive, llevados a cabo en el gran hall de la planta depuradora de agua de Rhone en Genève (ver *Archives de Genève*, 29, pp. 358 y 441). Estos experimentos probaron la igualdad de las velocidades en el aire y en los alambres, estableciendo así un completo acuerdo entre los experimentos y la teoría. Considero que esos experimentos son concluyentes. Considero y me someto a ellos ahora, con tanta disposición como cuando tuve dudas al someterme a experimentos que no eran superiores a los míos. Con mucho gusto aprovecho la oportunidad para agradecer a los Sres. Sarasin y de la Rive por la gran amabilidad y buena voluntad que exhibieron invariablemente en toda la controversia, una controversia que ahora se ha decidido enteramente a favor de ellos.



la longitud de onda es mayor en el aire que en los cables, mientras que para ondas cortas ambas parecen ser prácticamente iguales. Este resultado es tan sorprendente que no podemos considerarlo como cierto. La decisión debe reservarse hasta que se realicen nuevos experimentos". Los únicos experimentos del tipo al que se hace referencia que se han hecho hasta ahora son los de los Sres. Sarasin y de la Rive; y en la medida en que se llevaron a cabo en salas pequeñas, pueden considerarse más bien como una confirmación de la segunda parte de mi afirmación que como una refutación de la primera parte. Los experimentos decisivos para las ondas largas me parecen todavía deficientes. Tengo pocas dudas de que decidirán a favor de velocidades iguales en todos los casos.

El lector tal vez pregunte por qué no me he esforzado por resolver el punto dudoso repitiendo los experimentos. De hecho, he repetido los experimentos, pero solo he encontrado, como era de esperar, que una simple repetición bajo las mismas condiciones no puede eliminar la duda, sino que la aumenta. Solo se puede llegar a una decisión definitiva mediante experimentos llevados a cabo en condiciones más favorables. Condiciones más favorables aquí significan recintos más grandes, y esos recintos no estaban a mi disposición. Una vez más, enfatizo la afirmación de que el cuidado puesto en hacer las observaciones no puede compensar la falta de espacio. Si las ondas largas no pueden desarrollarse, claramente no se pueden observar.

Los experimentos hasta ahora descritos sobre el reflejo de las ondas, terminaron en marzo de 1888. En el mismo mes, intenté, por medio de la reflexión en una superficie curva, evitar la dispersión de la acción. Para mi gran oscilador construí un espejo parabólico cóncavo de 2 metros de apertura y 4 metros de altura. Al contrario de lo que esperaba, descubrí que la acción se debilitó considerablemente. El espejo grande actuó como una pantalla de protección que rodea el oscilador. Llegué a la conclusión de que la longitud de onda de la oscilación era demasiado grande en comparación con la distancia focal del espejo. Una reducción moderada en el tamaño del conductor primario no mejoró el resultado. Por lo tanto, traté de trabajar con un conductor que era geoméricamente similar al más grande, pero más pequeño en la proporción de 10: 1: Tal vez no perseveré lo suficiente en este intento; de todos modos, en ese momento fracasé totalmente en la provisión y observación de tales oscilaciones cortas, y abandoné estos experimentos para dirigir mi atención a otras cuestiones.

En primer lugar, era importante idear un tratamiento teórico más claro de los experimentos. En las investigaciones a las que me he referido hasta ahora, los experimentos fueron interpretados desde el punto de vista que tomé estudiando los trabajos de von Helmholtz.<sup>1</sup> En estos artículos, el Sr. von Helmholtz distinguió dos formas de fuerza eléctrica: la electromagnética y la electrostática, que, hasta que la experiencia demuestre lo contrario, se atribuyen dos velocidades diferentes. Una interpretación de los experimentos desde este punto de vista ciertamente no puede ser incorrecta, pero tal vez sea innecesariamente complicada. En un caso límite especial, la teoría de Helmholtz se simplifica considerablemente, y sus ecuaciones en este caso se vuelven las mismas que las de la teoría de Maxwell; solo queda una forma de la fuerza, y esta se propaga con la velocidad de la luz. Tenía que probar si

---

<sup>1</sup> von Helmholtz, *Wiss. Abhandl.* 1, pp. 545 – 628.

los experimentos no estarían de acuerdo con estas suposiciones mucho más simples de la teoría de Maxwell. El intento fue exitoso. Los resultados del cálculo se dan en el documento sobre "*Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie*"\*. La parte de la investigación que se relaciona con la interferencia entre las ondas en el aire y en los cables podría ser claramente adaptada sin dificultad a cualquier otra forma de tal interferencia que pueda resultar de experimentos más completos.

Al lado de las discusiones teóricas, continué con el trabajo experimental, dirigiendo este último más a las ondas en los cables. Al hacerlo, mi principal objetivo era descubrir la causa del supuesto retraso de estas ondas. En segundo lugar, quise comprobar la exactitud de la opinión según la cual el asiento y el campo de acción de las ondas no están en el interior del conductor, sino en el espacio circundante. Ahora hice que las ondas viajaran en el espacio intermedio entre dos cables, entre dos placas, y en espacios tubulares, en lugar de a lo largo de un único cable; en varios aisladores interpuestos en lugar de en diferentes metales. La investigación sobre "La propagación de ondas eléctricas por medio de cables" se llevó a cabo, en su mayor parte, en el verano de 1888, aunque solo se completó y publicó más tarde.

No presté especial atención al fenómeno que me llevó de vuelta a la observación de ondas cortas; y, como no surgió una ocasión adecuada para hacerlo, no lo he mencionado en mis documentos. Claramente, fue un caso especial del mismo fenómeno que más tarde fue descubierto por los Sres. Sarasin y de la Rive,<sup>2</sup> llamados con el nombre de *Resonancia Múltiple*, y explicaron que el conductor primario no poseía ningún período definido de oscilación, sino que realizaba simultáneamente todas las oscilaciones posibles dentro de amplios límites. Si presté poca atención a este fenómeno, fue en parte porque pronto me llevaron a otras investigaciones. Surgió no menos del hecho de que desde el principio había concebido una interpretación del fenómeno que le prestaba mucho menos interés que la interpretación dada por los Sres. Sarasin y de la Rive. Consideré el fenómeno como una consecuencia de la amortiguación rápida de la oscilación primaria, una consecuencia necesaria y que podría preverse. El Sr. Sarasin fue lo suficientemente gentil para comunicarme los resultados de su investigación, y le conté mis dudas sobre su explicación del fenómeno, y le di mi propia explicación; pero, aunque recibió mi explicación con la mejor buena voluntad, no logramos llegar a un entendimiento común sobre la interpretación del experimento. Con el Sr. H. Poincaré se logró tal comprensión de inmediato; él había formado una concepción del fenómeno que era prácticamente idéntica a la mía, y me lo había comunicado en una carta. Esta concepción la desarrolló matemáticamente y publicó en su libro *Electricité et Optique*<sup>1</sup>. El Sr. V. Bjerknes ha resuelto los desarrollos matemáticos simultáneamente e independientemente.<sup>2</sup> Que la explicación dada por los Sres. Poincaré y Bjerknes no sólo

---

\* ("Las fuerzas de las oscilaciones eléctricas tratadas según la teoría de Maxwell"). *Annalen der Physik*, Vol. 272, 1, 1889, pp. 1 – 22.

<sup>2</sup> E. Sarasin and L. de la Rive, *Arch, de Genève* (3), 23, p. 113, 1890.

<sup>1</sup> H. Poincaré, *Electricité et Optique*, 2, p. 249.

<sup>2</sup> V. Bjerknes, *Wied. Ann.* 44, p. 92, 1891.

es posible, sino que es la única posible, según me parece probado por una investigación del Sr. Bjerknes,<sup>3</sup> que ha aparecido recientemente, y que asegura que la vibración del conductor primario es, en cualquier caso, a una primera aproximación, una onda sinusoidal uniformemente amortiguada de período determinado. De ahí que las investigaciones cuidadosas de los Sres. Sarasin y de la Rive son de gran valor para completar nuestro conocimiento de esta parte del trabajo, pero de ninguna manera contradicen ninguna afirmación hecha por mí. Los propios autores consideran sus experimentos desde esta perspectiva. Sin embargo, estos experimentos dieron ocasión a una crítica adversa de mi trabajo por parte de un distinguido físico francés que, sin embargo, no había repetido los experimentos él mismo. Espero que ahora se reconozca que no hubo motivo para tal crítica.<sup>4</sup>

También quiero aprovechar esta oportunidad para mencionar las dudas que los Sres. Hagenbach y Zehnder plantearon recientemente en cuanto a la fuerza probatoria de mis experimentos.<sup>5</sup> No quiero considerar que el trabajo de los Sres. Hagenbach y Zehnder haya concluido todavía. Los autores se reservan el derecho de volver a la explicación de la resonancia, el tipo de efecto a larga distancia y la formación de nodos y vientres en mis experimentos. Pero es precisamente sobre estos fenómenos donde descansan mis experimentos y toda su interpretación.

Después de haber tenido éxito (como ya se describió) al observar ondas muy cortas, elegí ondas de unos 30 cm de largo y, en primer término, repetí con estas ondas los experimentos anteriores. Entonces descubrí, contrariamente a lo que esperaba, que estas ondas cortas viajaban a lo largo de cables con casi la misma velocidad que en el aire. Como era fácil conseguir el juego libre para tales ondas cortas, sin duda podría surgir en este caso la corrección de los resultados. Después de acostumbrarme a manejar estas ondas cortas, volví al experimento con el reflector cóncavo. El gran reflector viejo ya no estaba a mi disposición, por lo que hice uno más pequeño, de unos 2 metros de alto y algo más de 1 metro de abertura. Funcionó tan bien que, justo después de la primera prueba, pedí no solo un segundo reflector cóncavo, sino también una superficie reflectora plana y un gran prisma. Los experimentos que se describen en el documento "*Ueber Strahlen elektrischer Kraft*"\* ahora ocurrían en rápida sucesión, y sin dificultad; habían sido consideradas y preparadas mucho antes, con la excepción de los experimentos de polarización, que sólo diseñé a medida que progresaba del trabajo. Estos experimentos con espejos cóncavos pronto concitaron mi atención y, con frecuencia, fueron repetidos y confirmados. La aprobación con la que fueron recibidos excedió ampliamente mis expectativas.<sup>1</sup> Una parte considerable de esta aprobación se debió a razones de naturaleza filosófica; ya que se volvieron a plantear las viejas preguntas sobre la posibilidad y la naturaleza de las fuerzas que

---

<sup>3</sup>*Ibid.* 46, p. 513, 1891.

<sup>4</sup> Cornu, *Comptes Rendus*, 110, p. 72, 1890.

<sup>5</sup> E. Hagenbach and L. Zehnder, *Wied. Ann.* 43, p. 610, 1891.

\*(" Sobre los rayos de la fuerza eléctrica"). *Annalen der Physik*, Vol. 272, 4, 1889, pp. 769 – 783.

<sup>1</sup> Estos experimentos dieron ocasión para la conferencia "Sobre la relación entre la luz y la electricidad" que dicté en la *Naturforscherversammlung* de Heidelberg in 1889, en la cual di una descripción general de mis experimentos en una forma popular (publicada por E. Strauss, Bonn).

actuaban a distancia. En teoría, la preponderancia de tales fuerzas ha sido aceptada durante mucho tiempo por la ciencia, pero siempre lo ha sido con renuencia debido al sentido común ordinario. En el dominio de la electricidad, estas fuerzas parecían contradecir la teoría mediante experimentos simples y llamativos.

Si bien en los últimos experimentos mencionados, mi investigación había alcanzado sus objetivos, todavía tenía la sensación de que algo faltaba. Los experimentos se relacionaban sólo con la propagación de la fuerza eléctrica. Era deseable mostrar que la fuerza magnética también se propagaba con una velocidad finita. Según la teoría, para este propósito no era necesario producir ondas magnéticas especiales; las ondas eléctricas deberían ser al mismo tiempo ondas de fuerza magnética; lo único importante era detectar realmente, en estas ondas, la fuerza magnética en presencia de la fuerza eléctrica. Esperé que esto fuera posible al observar las fuerzas mecánicas que ejercían las ondas sobre los conductores en forma de anillo. De manera que se planearon experimentos que (por otras razones) sólo se llevaron a cabo más adelante y, además, de manera incompleta; estos experimentos se describen en la última investigación experimental "*Ueber die mechanischen Wirkungen elektrischer Drahtwellen*".<sup>†</sup>

Echando una mirada hacia atrás, vemos que, por los experimentos arriba esbozados, la propagación en el tiempo de una supuesta acción a distancia fue probada por primera vez. Este hecho forma el resultado filosófico de los experimentos; y, de hecho, en cierto sentido, es el resultado más importante. La prueba incluye el reconocimiento del hecho de que las fuerzas eléctricas pueden desanudarse de los cuerpos materiales y pueden continuar subsistiendo como condiciones o cambios en el estado del espacio. Los detalles de los experimentos prueban además que la manera particular en que se propaga la fuerza eléctrica exhibe la analogía más cercana<sup>2</sup> con la propagación de la luz; de hecho, que le corresponde casi por completo. Por lo que, la hipótesis de que la luz es un fenómeno eléctrico se volvió altamente probable. Dar una prueba contundente de esta hipótesis requeriría, lógicamente, experimentos sobre la luz misma.

Lo que aquí hemos indicado como alcanzado por los experimentos, se llevó a cabo independientemente de la corrección de teorías particulares. Sin embargo, existe una conexión obvia entre los experimentos y la teoría en relación con la cual realmente se emprendieron. Desde el año 1861, la ciencia ha estado en posesión de una teoría que Maxwell construyó sobre los puntos de vista de Faraday, y que, por lo tanto, llamamos la teoría de Faraday-Maxwell. Esta teoría afirma la posibilidad de que la clase de fenómenos aquí observada sea tan positiva como que otras teorías eléctricas se apoyen en las mismas observaciones para negarla. Desde el principio, la teoría de Maxwell superó a todas las demás teorías en elegancia y en la abundancia de las relaciones entre los diversos fenómenos

---

<sup>†</sup> ("Acerca de los efectos mecánicos de las ondas de cables eléctricos"). *Annalen der Physik*, Vol. 278, 3, 1891, pp. 407 – 415.

<sup>2</sup> La analogía no consiste solo entre la concordancia entre las velocidades, más o menos, medidas. La, aproximada, velocidad igual es sólo uno de los elementos entre muchos otros.

que incluía. La probabilidad de la validez de esta teoría, y por lo tanto el número de sus adherentes, fue aumentando de un año a otro. Pero como la teoría de Maxwell dependía únicamente de la probabilidad de sus resultados, y no de la certeza de sus hipótesis, no podría desplazar completamente las teorías que se oponían a ella. Las hipótesis fundamentales de la teoría de Maxwell contradecían las opiniones usuales, y no se apoyaban sobre la evidencia de experimentos decisivos. En relación con esto, podemos caracterizar mejor el objeto y el resultado de nuestros experimentos diciendo: El objetivo de nuestros experimentos era probar las hipótesis fundamentales de la teoría de Faraday-Maxwell, y el resultado de los experimentos fue confirmar las hipótesis fundamentales de la teoría.

## **B. Teoría**

Y ahora, para ser más precisos, ¿a qué se llama "la teoría de Faraday-Maxwell"? Como resultado de su pensamiento maduro, Maxwell ha dejado un gran tratado sobre Electricidad y Magnetismo; por lo tanto, podría decirse que la teoría de Maxwell es la que se propone en ese trabajo. Pero tal respuesta apenas será considerada satisfactoria por todos los científicos que han considerado la cuestión de cerca. Muchos hombres han emprendido con entusiasmo al estudio del trabajo de Maxwell, y, aun cuando no haya tropezado con inusitadas dificultades matemáticas, se han visto obligados a abandonar la esperanza de formarse una concepción totalmente coherente de las ideas de Maxwell. A mí no me ha ido mejor. A pesar de la gran admiración por las concepciones matemáticas de Maxwell, no siempre me he sentido seguro de haber comprendido el significado físico de sus afirmaciones. Por eso, en mis experimentos, no pude guiarme directamente por el libro de Maxwell. Preferí guiarme por el trabajo de Helmholtz, como puede verse claramente por la manera en que se exponen los experimentos. Pero desgraciadamente, en el caso límite especial de la teoría de Helmholtz que conduce a las ecuaciones de Maxwell, y al que apuntan los experimentos, la base física de la teoría de Helmholtz desaparece, como siempre ocurre, tan pronto como se ignora la acción a distancia. De modo que me esforcé en unir de manera coherente las concepciones físicas necesarias, comenzando con las ecuaciones de Maxwell, pero simplificando la teoría de Maxwell en la medida de lo posible eliminando, o simplemente dejando de lado, aquellas partes que se podrían prescindir, en tanto no pudiesen afectar a ningún fenómeno posible. Esto explica cómo los dos artículos teóricos (que forman la conclusión de esta colección) llegaron a escribirse. Por lo tanto, la representación de la teoría en el propio trabajo de Maxwell, su representación como un caso límite de la teoría de Helmholtz, y su representación en las disertaciones actuales, por diferentes que sean sus formas, tienen sustancialmente el mismo significado interno. Este significado común de los diferentes modos de

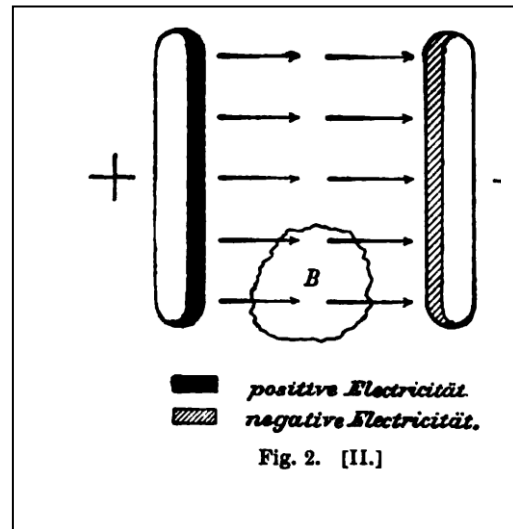
representación (y otros ciertamente se pueden encontrar) me parece ser la parte eterna de la obra de Maxwell. Esto, y no las concepciones o métodos peculiares de Maxwell, lo designaría como la "Teoría de Maxwell". A la pregunta, "¿Cuál es la teoría de Maxwell?" No conozco una respuesta más corta o más definida que la siguiente: — ¡La teoría de Maxwell es el sistema de ecuaciones de Maxwell! Toda teoría que conduzca al mismo sistema de ecuaciones y, por lo tanto, comprende los mismos fenómenos posibles, la consideraría como una forma o caso especial de la teoría de Maxwell; cada teoría que conduce a diferentes ecuaciones, y por lo tanto a diferentes fenómenos posibles, es una teoría diferente. En este sentido, y sólo en

este sentido, las dos disertaciones teóricas del presente volumen pueden considerarse como representaciones de la teoría de Maxwell. En ningún sentido pueden pretender ser una representación precisa de las ideas de Maxwell. Por el contrario, es dudoso si Maxwell, si estuviera vivo, los reconocería como representantes de sus propios puntos de vista en todos los aspectos.

El mismo hecho de que los diferentes modos de representación contengan lo que sustancialmente es la misma cosa, hace que el entendimiento apropiado de cualquiera de ellos sea aún más difícil. Las ideas y concepciones parecidas pero diferentes, pueden simbolizarse de la misma manera en los diferentes modos de representación. Por lo tanto, para una comprensión adecuada de cualquiera de estos, es esencial que primero debamos esforzarnos por comprender cada representación por sí misma sin introducir en ella las ideas que pertenecen a otra. Tal vez pueda ser útil para muchos de mis colegas si explico brevemente las concepciones fundamentales de las tres representaciones de la teoría de Maxwell a las que ya me he referido. Tendré así una oportunidad de decir en qué consiste, en mi opinión, la dificultad especial de la propia representación de Maxwell. No puedo estar de acuerdo con la opinión reiterada de que esta dificultad es de naturaleza matemática.

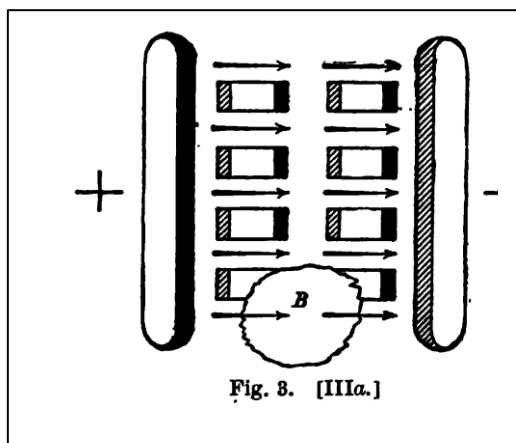
Cuando vemos cuerpos que actúan entre sí a distancia, podemos formar para nosotros varias concepciones sobre la naturaleza de esta acción. Podemos considerar que el efecto es el de una acción directa a distancia, que salta a través del espacio, o podemos considerarlo como la consecuencia de una acción que se propaga de un punto a otro en un medio hipotético. Sin embargo, en la aplicación de estas ideas a la electricidad, todavía podemos hacer una serie de distinciones más finas. Si pasamos de la concepción pura de la atracción directa a la idea pura de los efectos mediados a distancia, podemos distinguir alrededor de cuatro puntos de vista.

Desde el primer punto de vista consideramos la atracción de dos cuerpos como una especie de afinidad espiritual entre ellos. La fuerza que ejerce cada uno de los dos está ligada a la presencia del otro cuerpo. Para que la fuerza esté presente, debe haber al menos dos cuerpos presentes. De alguna manera, un imán solo obtiene su fuerza cuando otro imán llega a sus proximidades. Esta idea es la



concepción pura de la acción a distancia, la concepción de la ley de Coulomb. En la teoría de la electricidad, casi ha sido abandonada, pero todavía se usa en la teoría de la gravitación. La astronomía matemática habla de la atracción entre el Sol y un planeta, pero la atracción en el espacio vacío no preocupa.

Desde el segundo punto de vista, aún consideramos la atracción de los cuerpos como una especie de influencia espiritual de cada uno sobre el otro. Pero, aunque admitimos que solo podemos notar esta acción cuando tenemos al menos dos cuerpos, suponemos, además, que cada uno de esos cuerpos actuantes se esfuerza, continuamente, por ejercer en todos los puntos que lo rodean atracciones de



magnitud y dirección definidas, incluso si en las vecindades no hay otros cuerpos similares. Con estos esfuerzos, que siempre varían de un punto a otro, llenamos (de acuerdo con esta concepción) el espacio circundante. Al mismo tiempo, suponemos que no hay ningún cambio en el lugar donde se ejerce la acción; el cuerpo actuante sigue siendo el asiento y el origen de la fuerza. Este es el punto de vista de la teoría potencial. Obviamente, también es el punto de vista de ciertos capítulos en el trabajo de Maxwell, aunque no es el punto de vista de la teoría de Maxwell. Para comparar más fácilmente estas concepciones entre sí, re-

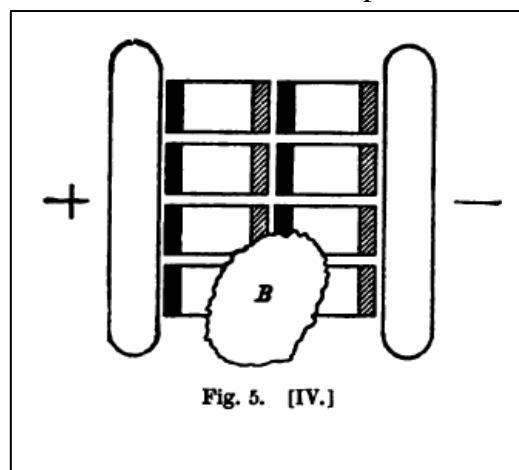
presentamos desde este punto de vista (como en la Fig. 2) dos placas de un capacitor electrizadas opuestamente. La representación mediante el diagrama será fácilmente comprendida; sobre las placas se ven las electricidades positiva y negativa (como si fueran materiales); la fuerza entre las placas se indica con flechas. Desde este punto de vista, es irrelevante si el espacio entre las placas está lleno o vacío. Si admitimos la existencia del éter luminífero, pero suponemos que se elimina una parte B del espacio, la fuerza permanecerá inalterada en este espacio.

El tercer punto de vista mantiene las concepciones del segundo punto de vista, pero les agrega una complicación adicional. Supone que la acción de dos cuerpos separados no está determinada solamente por las fuerzas que actúan directamente a distancia. Más bien, supone que las fuerzas inducen cambios en el espacio (supuesto que en ningún lugar hay vacío) y que esos cambios provocan nuevas fuerzas a distancia (*Fernkräften*). Las atracciones entre los cuerpos separados dependen, en parte, de la acción directa entre ellas, y en parte de la influencia de los cambios en el medio. El cambio en el medio mismo es considerado como una polarización eléctrica o magnética de sus partes más pequeñas bajo la influencia de la fuerza actuante. Esta opinión ha sido desarrollada por Poisson con respecto a fenómenos estáticos en el magnetismo, y ha sido transferida por Mossoti a fenómenos

eléctricos. En su desarrollo más general, y en su extensión sobre todo el dominio del electromagnetismo, está representado por la teoría de Helmholtz<sup>1</sup>.

La Fig. 3 ilustra este punto de vista para el caso en el que el medio cumple sólo una pequeña parte en la acción resultante. Sobre las placas se ven las electricidades libres, y en las partes del dieléctrico los fluidos eléctricos que están separados, pero que no pueden “divorciarse” uno del otro. Supongamos que el espacio entre las placas contiene solo el éter luminífero, y deja que un espacio, como B, en el que no haya éter lumínifero; las fuerzas permanecerán en este espacio, pero la polarización desaparecerá.

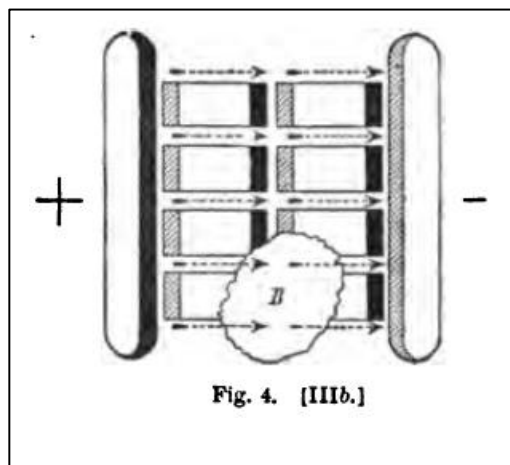
Un caso límite de este modo de concepción es de especial importancia. Como muestra un examen más detallado, podemos dividir la acción resultante (que solo puede observarse) de los cuerpos materiales entre sí en: una influencia debida a la acción directa a distancia, y una influencia debida al medio interviniente. Podemos incrementar esa parte de la energía total que tiene su asiento en los cuerpos electrificados a expensas de la parte que buscamos en el medio, y viceversa. Ahora, en el caso límite, buscamos toda la energía en el medio. Como ninguna energía corresponde a la electricidad que existe en los conductores, las fuerzas que actúan a distancia deben ser infinitamente pequeñas. Pero para esto es una condición necesaria que no haya electricidad libre. Por lo tanto, la electricidad debe comportarse como un fluido incompresible. Por lo tanto, sólo tenemos corrientes cerradas y de ello surge la



posibilidad de extender la teoría a toda clase de perturbaciones eléctricas, a pesar de nuestra ignorancia sobre las leyes que rigen para las corrientes no cerradas.

El tratamiento matemático de este caso límite nos lleva a las ecuaciones de Maxwell. Por lo tanto, llamamos este tratamiento una forma de la teoría de Maxwell. von Helmholtz también lo llamó “el caso límite”. Pero en ningún sentido debe tomarse como significando que las ideas físicas sobre las que está basado son las ideas de Maxwell.

La Fig. 4 indica el estado del espacio entre dos placas electrificadas de acuerdo con las concepciones de esta teoría. Las fuerzas a distancia se han vuelto meramente nominales. La electricidad sobre los conductores todavía está presente, y es una parte necesaria de la concepción, pero su acción a distancia está completamente neutralizada por la



<sup>1</sup> von Helmholtz, al final del trabajo "Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruende leitende Körper". - (Wiss. Abh. 1, pp. 545 - 628).



electricidad opuesta del medio que se desplaza hacia ella. La presión que ejerce este medio, debido a la atracción de sus electrificaciones internas, tiende a unir las placas. En el espacio vacío B solo están presentes fuerzas a distancia infinitamente pequeñas.

El cuarto punto de vista pertenece a la concepción pura de la acción a través de un medio. Desde este punto de vista, aceptamos que los cambios en el espacio asumidos desde el tercer punto de vista están realmente presentes, y que es por medio de ellos que los cuerpos materiales actúan entre sí. Pero no admitimos que estas polarizaciones sean el resultado de fuerzas a distancia; de hecho, negamos por completo la existencia de estas fuerzas a distancia; y descartamos las electricidades de las cuales se supone que proceden estas fuerzas. Ahora, más bien, consideramos a las polarizaciones como las únicas cosas que están realmente presentes; ellas son la causa de los movimientos de los cuerpos ponderables, y de todos los fenómenos que nos permiten percibir los cambios en estos cuerpos. Disentimos con la explicación de la naturaleza de las polarizaciones, de sus relaciones y efectos y buscamos averiguarlas explicaciones mediante hipótesis mecánicas; pero declinamos reconocer en las electricidades las fuerzas a distancia que hasta ahora han sido una explicación satisfactoria de estas relaciones y efectos. Las expresiones electricidad, magnetismo, etc., no tienen más valor para nosotros más allá de las abreviaturas.

Considerado desde el punto de vista matemático, este cuarto modo de tratamiento puede suponerse completamente como coincidiendo con un caso límite del tercero. Pero desde el punto de vista físico, los dos son, fundamentalmente, diferentes. Es imposible negar la existencia de fuerzas a distancia y, al mismo tiempo, considerarlas como la causa de las polarizaciones. Cualquier cosa que podamos designar como "electricidad", desde este punto de vista, no se comporta como un fluido incompresible. Si consideramos la figura 5, que nos trae simbólicamente la visión presentada desde este punto de vista, nos impacta otra distinción. La polarización del espacio está representada por el mismo método simbólico que se empleó para discutir el tercer punto de vista. Pero mientras que en las Figs. 3 y 4 este modo de representación explicaba la naturaleza de la polarización a través de la naturaleza de la electricidad (supuestamente conocida), aquí tenemos que considerar el modo de representación como la definición de la naturaleza de una carga eléctrica a través del estado de polarización del espacio (considerado como conocido). Cada partícula del dieléctrico aquí aparece cargada con electricidad en sentidos opuestos, tal como se propuso en el tercer punto de vista. Si nuevamente eliminamos el éter del espacio B, no queda nada en este espacio que pueda recordarnos la perturbación eléctrica en las vecindades.

Ahora, este cuarto punto de vista, en mi opinión, es el punto de vista de Maxwell. Las explicaciones generales en su trabajo no dejan lugar a dudas de que deseaba descartar por completo las fuerzas a distancia. Expresamente dice que, si la fuerza o "desplazamiento" en un dieléctrico se dirige hacia la mano derecha, debemos concebir que cada partícula del dieléctrico esté cargada con electricidad negativa en el lado derecho y con electricidad positiva en el lado izquierdo. Pero no se puede negar que otras afirmaciones hechas por Maxwell parecen, a primera vista, contradecir las concepciones de este punto de vista. Maxwell supuso que la electricidad también existe en los conductores; y que esta

electricidad siempre se mueve de tal forma que forma corrientes cerradas con los desplazamientos en el dieléctrico. La afirmación de que la electricidad se mueve como un fluido incompresible es una de las afirmaciones favoritas de Maxwell. Pero estas declaraciones no ajustan a las concepciones del cuarto punto de vista; sino que llevan a sospechar que Maxwell más bien veía las cosas desde el tercer punto de vista. Mi propia opinión es que esto nunca fue realmente el caso; que las contradicciones son solo aparentes y surgen de un malentendido en cuanto a las palabras. Si no me equivoco, lo que sigue es el estado de las cosas: Maxwell desarrolló originalmente su teoría con la ayuda de concepciones muy definidas y especiales sobre la naturaleza de los fenómenos eléctricos. Supuso que los poros del éter y de todos los cuerpos estaban llenos de un fluido diluido que, sin embargo, no podía ejercer fuerzas a distancia. En los conductores, este fluido se movía libremente, y su movimiento formaba lo que llamamos una corriente eléctrica. En los aislantes este fluido estaba confinado en su lugar por fuerzas elásticas, y su "desplazamiento" se consideraba idéntico a la polarización eléctrica. Al fluido mismo, como la causa de todos los fenómenos eléctricos, Maxwell lo llamó "electricidad". Ahora, cuando Maxwell compuso su gran tratado, las hipótesis acumuladas de este modo de concepción anterior ya no le convenían, o bien descubrió contradicciones en ellas y las abandonó. Pero él no las eliminó por completo; quedaban muchas expresiones derivadas de sus ideas anteriores. Y así, desafortunadamente, la palabra "electricidad", en el trabajo de Maxwell, obviamente tiene un doble significado. En primer lugar, la usó (como también nosotros lo hacemos) para denotar una cantidad que puede ser positiva o negativa, y que forma el punto de partida de las fuerzas a distancia (o lo que parece ser tal). En segundo lugar, denota ese fluido hipotético del que no pueden proceder las fuerzas a distancia (ni siquiera las aparentes), y cuya cantidad en cualquier espacio dado debe ser, en cualquier circunstancia, una cantidad positiva. Si leemos las explicaciones de Maxwell y siempre interpretamos el significado de la palabra "electricidad" de manera adecuada, casi todas las contradicciones que al principio son tan sorprendentes pueden desaparecer. Sin embargo, debo admitir que no he tenido éxito en hacer esto completamente, o para mi entera satisfacción; de lo contrario, en lugar de dudar, hablaría más definitivamente<sup>1</sup>.

Si esto es así o no, se ha intentado comprobar, en los dos trabajos teóricos aquí impresos, que exponen la teoría de Maxwell, es decir, el sistema de ecuaciones de Maxwell, desde este cuarto punto de vista. He tratado de evitar desde el principio la introducción de concepciones que son ajenas a este punto de vista y que luego deberían ser eliminadas.<sup>2</sup>En la exposición, me he ocupado más en limitar lo más posible, el número de concepciones que son arbitrariamente introducidas por nosotros, y solo

---

<sup>1</sup> El Sr. Poincaré, en su tratado "*Électricité et Optique*" (vol. i., *Les Théories de Maxwell*); expresa una opinión similar. El Sr. L. Boltzmann, en su *Vorlesungen über Maxwell's Theorie*, parece, al igual que yo, tratar un desarrollo consistente del sistema de Maxwell, más que tratar de expresar los pensamientos de Maxwell. Pero no se puede dar una opinión definitiva en tanto que ese trabajo aún no ha sido completado.

<sup>2</sup> La expresión "fuerza eléctrica" en estos documentos es solo otro nombre para un estado de polarización del espacio. Tal vez hubiera sido mejor, para evitar conceptos erróneos, si lo hubiera reemplazado por otra expresión, como, por ejemplo, como "Intensidad de campo eléctrico" o "elektrische intensität" que el Sr. E. Cohn propone en su artículo, que se refiere al mismo tema ("*Zur Systematik der Elektrizitätslehre*" *Wied. Ann.* 40, p.625, 1890).

para admitir elementos que no pueden ser eliminados o alterados sin, al mismo tiempo, alterar los posibles resultados experimentales. Es cierto que, como consecuencia de estos esfuerzos, la teoría adquiere una apariencia muy abstracta e incolora. No es particularmente agradable escuchar declaraciones generales sobre "cambios de estado dirigidos", donde solíamos colocar ante nuestros ojos imágenes de átomos electrificados. No es particularmente satisfactorio ver ecuaciones establecidas como resultados directos de la observación y el experimento, donde solíamos obtener largas deducciones matemáticas como pruebas evidentes de ellas. Sin embargo, creo que no podemos, sin engañarnos a nosotros mismos, extraer mucho más de hechos conocidos de lo que se afirma en los documentos mencionados. Si queremos darle más color a la teoría, no hay nada que nos impida suplementar todo esto y ayudar a nuestros poderes de imaginación mediante representaciones concretas de las diversas concepciones sobre la naturaleza de la polarización eléctrica, la corriente eléctrica, etc. Pero la precisión científica nos exige que no confundamos, de ninguna manera, la figura sencilla y hogareña, tal como nos la presenta la naturaleza, con la prenda alegre que usamos para vestirla. Por nuestra propia voluntad no podemos hacer ningún cambio en la forma de una, pero el corte y el color de la otra podemos elegirlos como queramos.

Las observaciones adicionales que deseo hacer sobre los detalles se encontrarán al final del libro como notas complementarias.

### **17 – 5.- Hendrik A. Lorentz de la crítica a Michelson a la contracción de los cuerpos en movimiento.**



H. A. Lorentz (1853 – 1928)

Hendrik Antoon Lorentz nació en Arnhem el 18 de julio de 1853. Su padre, Gerrit Frederik Lorentz, (1822 – 1893), era dueño de una guardería cerca de Arnhem. Su madre, Geertruida van Ginkel, (1826 – 1861), falleció cuando Hendrik tenía ocho años. Al año siguiente, su padre se casó con Luberta Hupkes, (1820 – 1897),

Lorentz hizo sus estudios primarios y secundarios en Arnhem, destacándose como uno de los mejores alumnos en sus clases. En sus estudios secundarios, se interesó mucho por la Física. Desde joven mostró una gran capacidad para el aprendizaje de idiomas extranjeros. Si bien su familia era protestante, él se consideraba un librepensador en temas religiosos y, si bien asistía regularmente a la iglesia francesa de Arnhem local, lo hacía para practicar y mejorar su manejo del idioma francés.

En 1870 se matriculó en la Universidad de Leiden, con intención de profundizar sus conocimientos de Física y Matemáticas. Para ello, asistió a las clases y conferencias del Profesor de Física de la Universidad, Pieter Leonhard Rijke (1812 – 1899). También se interesó por la Astronomía, cursando esa asignatura con el profesor Frederick Kaiser (1808 – 1872), quien, además, era Director del Observatorio de Leiden. En 1871, obtuvo su primer grado académico al aprobar los exámenes de Matemáticas y de Física y comenzó a prepararse para ingresar al doctorado y escribir su disertación sobre los fenómenos de reflexión y refracción de la luz. En 1873, aprobó el examen de ingreso al doctorado con la calificación *suma cum laude* (que era la más alta) y en 1875 obtuvo su doctorado defendiendo su tesis “La teoría de la reflexión y refracción de la luz”.<sup>9</sup>

Durante su preparación para el doctorado, compró las obras completas de Augustin-Jean Fresnel y quedó fascinado por la agudeza y la claridad de su exposición. A lo largo de toda su carrera, Lorentz tomaría como modelo la manera de expresar las ideas que utilizaba Fresnel.

El tema de su tesis doctoral, si bien había sido desarrollado ampliamente por Fresnel, fue encarado por Lorentz desde el punto de vista de Maxwell, según la interpretación de Helmholtz y eso impactó mucho entre los físicos que se dedicaban al estudio de la Óptica. Los elogios que recibió por su trabajo, hicieron que, en 1878, fuera nombrado Profesor de Física-matemática en la Universidad de Leiden, cátedra que mantuvo hasta 1912, año en que se retiró y fue sucedido por Paul Ehrenfest, (1880 – 1933). A pesar de estar retirado, trabajó como Director de Investigaciones del Instituto de la Fundación Teyler en Haarlem y mantuvo un cargo honorario en Leiden, donde solía dar conferencias.

Más que dedicarse a las aplicaciones prácticas de la Física, la obra de Lorentz consiste, principalmente, en estudios sobre Física teórica. Durante su estada en Arnhem un corto viaje lo llevaba a la Universidad de Leiden, donde usaba la biblioteca para consulta y búsqueda de información, la que aprovechaba al máximo gracias a su dominio del idioma inglés, del alemán y del francés.

En 1881, Lorentz se casó con Aletta Catharina Kaiser, (1858 – 1931) sobrina de su antiguo profesor de astronomía. Ella se destacó como luchadora por los derechos de las mujeres en los Países bajos. Hendrik y Aletta tuvieron cuatro hijos. Su primera hija, Geertruida Luberta, nació en 1885; su segunda, Johanna Wilhelmina, en 1889. Su primer hijo Hendrik nació en 1893 y murió antes de cumplir un año; el segundo hijo, Rudolf, nació en 1895.

Antes de que se comprobara la existencia de los electrones, Lorentz propuso que las ondas luminosas se debían a las oscilaciones de cargas eléctricas en los átomos. Sobre esa hipótesis desarrolló su teoría matemática del electrón por la cual recibió el Premio Nobel de Física en 1902. El premio Nobel lo recibió conjuntamente con Pieter Zeeman, que había sido su estudiante en Leyden. Zeeman

---

<sup>9</sup> Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Academisch Proefschrift, Leiden University (1875).

verificó experimentalmente el trabajo teórico de Lorentz sobre la estructura atómica, demostrando el efecto de un fuerte campo magnético sobre las oscilaciones de las longitudes de onda de la luz.

Lorentz también es famoso por su trabajo en la contracción FitzGerald–Lorentz, que es una contracción en la longitud de un objeto que se desplaza a velocidades relativistas. Las transformaciones de Lorentz, que introdujo en 1904, forman la base de la teoría de la relatividad especial de Einstein. Describen el aumento de masa, el acortamiento de la longitud y el tiempo de dilatación de un cuerpo que se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

Entre las numerosas publicaciones de Lorentz se destacan: Una memoria temprana, que se hizo famosa, Lorentz aplicó por primera vez consideraciones relacionadas con moléculas discretas para la propagación eléctrica en cuerpos materiales y, por cierto, llegó a un equivalente de reflexión racional para cada sustancia, independientemente de su densidad. En 1884 comenzó a estudiar el efecto que ejerce la magnetización sobre la polarización de la luz reflejada. Su "Théorie Electromagnétique de Maxwell et son application aux Corps Mouvants" y su "Versuch einer Theorie der Elektrischen und Optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", que se publicaron en 1892 y 1895 respectivamente, constituyeron la primera aparición sistemática del principio electrodinámico de la relatividad. En 1920 publicó "La teoría de la relatividad de Einstein: una declaración concisa". En 1909 publicó su "Teoría de los electrones", basada en una serie de conferencias dadas en la Universidad de Columbia, y en 1916, publicó en francés, en Leipzig, un recuento de teorías termodinámicas estadísticas basadas en conferencias pronunciadas en el Collège de France en 1912. La edición de sus conferencias universitarias, titulada "Lecciones sobre física teórica", comenzó a aparecer, bajo su supervisión, en 1919. También fue autor de un libro de texto sobre el cálculo diferencial e integral; "Movimientos visibles e invisibles", 1901; y "La teoría electromagnética de Clerk Maxwell", en 1924.

En 1887, Lorentz publicó su trabajo, *De l'influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes lumineux*<sup>10</sup>. A lo largo de sus 73 páginas fue dando razones físicas y matemáticas que ponían en duda la validez de las conclusiones del experimento de Michelson de 1881. El trabajo finaliza con el siguiente texto:

“En mi opinión, sigue siendo dudoso, que la hipótesis de Fresnel sea refutada por la experiencia del Sr. Michelson. En cualquier caso, no podemos concluir de este experimento que el éter, como quiere la teoría original del Sr. Stokes, sigue completamente el movimiento de la Tierra. Porque no es solo entre esta teoría y la de Fresnel que debemos decidir. La velocidad relativa del éter con respecto a la Tierra puede tener, no solo los valores 0 y  $g$ , sino muchos otros valores. Sin embargo, si esta velocidad fuera, por ejemplo =  $1/2 g$ , la cual no se puede considerar imposible, el desplazamiento proporcional al cuadrado de la velocidad, que sufrirían

---

<sup>10</sup> Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, T. XXI, (1887) p.103 – 176.

las franjas por una rotación del aparato del Sr. Michelson será, seguramente, completamente insensible.”

Pero una cosa es refutar la interpretación del resultado de un experimento y otra es dar una explicación científica adecuada de ese resultado.

Ya hemos mencionado la idea que expuso FitzGerald del trabajo que publicó Heaviside sobre los efectos electromagnéticos de una carga en movimiento. Lorentz se enteró de las ideas de FitzGerald a través de las publicaciones de Oliver Lodge. Le pareció plausible la idea de FitzGerald y se dedicó a darle una forma más cuantitativa. Terminó de completar su trabajo en 1892, que presentó ante la Academia de Ciencias de Holanda y, en 1894, antes de publicarlo le escribió a FitzGerald:

Leiden, November 10th, 1894.

My dear Sir:

In his "Aberration problems", Professor Oliver Lodge mentions a hypothesis which you have imagined in order to account for the negative result of Mr. Michelson experiment. Two years ago, I arrived at the same view as you may see from the number of Proceedings of the Dutch Academy of Sciences which I have the honour to send you at the same time with this letter.

A memoir in which I consider the whole subject of aberration is concerned with the refraction theory of light, being now in course of publication, it will in fact appear in a week, you would oblige me very much by telling me if you have published your hypothesis. I have been unable to find it, and yet I should want to refer the reader to it.

Yours very respectfully.

H. A. Lorentz

Cuatro días después, FitzGerald le respondió:

Dublin, 14.11.94

My dear sir.

I have been for years preaching and lecturing on the doctrine that Michelson's experiment proves, and is one of the only ways of proving, that the length of a body depends on how it is moving through the ether, A couple of years after Michelson's results were published, as I recollect, I wrote a letter to "Science" the American paper that has recently become defunct, explaining my view, but I do not know whether they ever published it, for I did not see the

journal for some time afterwards. I am pretty sure that your publication is then prior to any of my printed publication for I had looked up several places where I thought I might have mentioned it but cannot find that I did. I certainly never wrote any special article about it as I ought to have done for the information of others besides my students here,

I am particular delighted to hear that you agree with me, for I have been rather laughed at for my view over here. I could not even persuade my own pupil Mr. Preston to introduce this criticism into his book on Light published in 1890 although I pressed upon him to do so and it was only after reiterated positiveness that Dr. Lodge to mention in his paper; bur now that I hear you as an advocate and authority, I shall begin to jeer at others for holding any other view.

Thank you very much for your papers, I can make out their general drift and wish I were able to reciprocate by replying to you in Dutch.

Yours most sincerely.

Geo. Fran. FitzGerald

En Leiden, Lorentz publicó varios artículos y dos libros de texto en holandés<sup>11</sup>, uno en 1882 sobre las fórmulas usadas en Electrodinámica y otro, en 1888, “Principios de Física: una guía para las lecciones en la Universidad de Leiden.

Lorentz desarrolló su contribución más original a la física teórica, su célebre teoría electrónica. Anunció y articuló la teoría en una serie de publicaciones que comenzaron en 1892. En sus quince años en Leiden antes de 1892, Lorentz no había sido extraordinariamente productivo según los

---

<sup>11</sup> Oplossing van een prijsvraag. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 1: 189–193 (1875); Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. I, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 22: 1–30 (1877); Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. II, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 22: 205–219 (1877); Lorentz, Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. III, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 23: 197–210 (1878); Ueber die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte, *Annalen der Physik* 245: 641–665 (1880); Les équations du mouvement des gaz, et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz, *Archives Néerlandaises* 16: 1–46 (1881); Ueber die Anwendung des Satzes vom Virial in der kinetischen Theorie der Gase, *Annalen der Physik* 248: 127–136 (1881); Nachtrag zu der Abhandlung: Ueber die Anwendung des Satzes vom Virial in der kinetischen Theorie der Gase, *Annalen der Physik* 248: 660–661 (1881); Les formules fondamentales de l'électrodynamique, *Archives Néerlandaises* 17: 83–100 (1882); Le phénomène découvert par Hall et la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière, *Archives Néerlandaises* 19: 123–152 (1884); Sur l'application aux phénomènes thermo-électriques, de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur, *Archives Néerlandaises* 20: 129–170 (1886); Über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolekülen *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien* 95: 115–152 (1887); Beginselen der natuurkunde: leidraad bij de lessen aan de Universiteit te Leiden, (1888).

estándares contemporáneos. Había publicado una media de un artículo al año; además, había escrito dos libros de texto ampliamente utilizados en holandés, uno sobre cálculo para científicos físicos en 1882 y otro sobre física elemental en 1888. El período más productivo de Lorentz comenzó en 1892, cuando tenía casi cuarenta años. Entre 1892 y 1904, tiempo durante el cual completó en gran medida su teoría electrónica, produjo un promedio de tres a cuatro publicaciones de investigación al año. Para Lorentz, como para otros, la teoría electrónica abrió un gran número de nuevas direcciones experimentales y teóricas. Gran parte de la comunidad de físicos miraba ahora a Leiden en busca de orientación.

La influencia de Lorentz en la física teórica se ejerció no solo a través de sus escritos, sino también a través de la impresión personal que dejó en los jóvenes físicos que venían a Leiden de todo el mundo para escuchar sus conferencias. Su influencia fue involuntaria en el sentido de que no interfirió con los demás y no inspiró una escuela del tipo habitual. Siguió el trabajo de estudiantes y físicos más jóvenes, pero no trató de influir en la dirección de sus intereses; sus relaciones con ellos estaban de acuerdo con su naturaleza básicamente privada, a la vez amable y distante. Einstein y otros teóricos de la generación más joven lo veneraron, haciendo frecuentes viajes a Leiden para visitarlo y escuchar sus pensamientos sobre sus últimas ideas. Lo apreciaban por su audacia y dominio intelectuales, su profunda familiaridad con todas las áreas de la física y su liderazgo natural y no manipulador. Einstein dijo que Lorentz había sido la mayor influencia en su vida.

En 1905, Lorentz consideró mudarse a la Universidad de Munich como profesor de física teórica. Fue solo después de que la Universidad de Leiden lo relevó de la tarea de dar conferencias introductorias nombrando a un tercer profesor de física que accedió a quedarse. Lorentz renunció a su cátedra de Leiden en 1912, después de treinta y cinco años de dar conferencias sobre todos los aspectos de la física teórica. Se mudó a Haarlem, donde se desempeñó como curador del gabinete físico de la Fundación Teyler, un museo que alberga colecciones de ciencia, arte y monedas, y como secretario de *Hollandsche Koninglijke Maat-schappij der Wetenschappen*, una organización para promover el patrocinio privado de la ciencia. El museo contenía un laboratorio, que fue remodelado después del de la Royal Institution de Londres para uso de Lorentz. Por primera vez, Lorentz tenía su propio laboratorio, algo que la Universidad de Leiden le había prometido, pero no cumplió, para su gran decepción.

Durante años, Lorentz dio conferencias populares de física, una tarea que le gustaba y se tomaba en serio; pero principalmente usó la mayor libertad de su nuevo puesto para proseguir sus investigaciones teóricas. Conservó una conexión con la Universidad de Leiden como profesor honorario, en cuya capacidad impartió sus famosas conferencias de los lunes por la mañana sobre problemas actuales de la física. En la última parte de su carrera realizó varios servicios para el gobierno. Estaba muy interesado en la educación y sirvió en la junta de educación del gobierno desde su fundación en 1919 hasta 1926, ayudando a reformar los exámenes universitarios y redistribuir las cátedras entre las universidades; desde 1921 fue presidente del departamento de educación superior. También trabajó en aplicaciones prácticas de la física para el gobierno; en 1920 se hizo cargo de los cálculos de la altura del dique que oba a cerrar la bahía de Zuider Zee, dedicando años a la resolución del problema.



La influencia de Lorentz en la Física teórica se ejerció no solo a través de sus escritos, sino también a través de la impresión personal que dejó en los jóvenes físicos que, desde diversos lugares del mundo, venían a Leiden, para escuchar sus conferencias. Nunca tuvo intención de formar una escuela. No le gustaba interferir con las ideas científicas de estudiantes y físicos más jóvenes ni trató de influir en la dirección de sus intereses. Einstein, — quien afirmó que Lorentz tuvo la mayor influencia científica en su vida, — y otros físicos teóricos de la generación más joven lo veneraron.

En 1905, Lorentz consideró mudarse a la Universidad de Munich como profesor de Física teórica. Fue sólo que accedió a quedarse, después de que la Universidad de Leiden lo relevó de la tarea de dar conferencias introductorias nombrando a un tercer profesor de Física.

Lorentz renunció a su cátedra de Leiden en 1912, después de treinta y cinco años de dar conferencias sobre todos los aspectos de la física teórica. Se mudó a Haarlem, donde se desempeñó como curador del gabinete físico en Teyler's Stichting, un museo que alberga colecciones de ciencia, arte y monedas, y como secretario de Hollandsche Maat-schappij der Wetenschappen, una organización para promover el patrocinio privado de la ciencia. El museo contenía un laboratorio, que fue remodelado para uso de Lorentz. Por primera vez, Lorentz tenía su propio laboratorio, algo que la Universidad de Leiden le había prometido, pero no cumplió.

A pesar de retirarse de la Universidad de Leiden, conservó una conexión con esa Universidad como profesor honorario, impartiendo sus famosas conferencias de los lunes por la mañana sobre los problemas que, en esa época, eran relevantes en la Física. En la última parte de su carrera realizó varios servicios para el gobierno. Estaba muy interesado en la educación y sirvió en la junta de educación del gobierno desde su fundación en 1919 hasta 1926, ayudando a reformar los exámenes universitarios y redistribuir las cátedras entre las universidades; desde 1921 fue presidente del Departamento de Educación Superior. También trabajó, para el Gobierno, en aplicaciones prácticas de la Física. Así, en 1920 se hizo cargo de los cálculos de la altura del dique de cierre del Zuider Zee, dedicando años a la resolución del problema.

### **17 – 5. 1. Lorentz y su búsqueda de una teoría.**

Los trabajos más importantes de Lorentz fueron desarrollados en Óptica y Electromagnetismo. Cuando, en la década de 1870, él comenzó a interesarse por estos temas, el pensamiento óptico estaba entonces dominado por las teorías desarrolladas por Fresnel, Cauchy, Neumann, Stokes y otros, teorías que presentaban grandes dificultades. Así, mientras que la teoría preveía la presencia de ondas longitudinales y transversales en sólidos elásticos, en los fenómenos ópticos sólo se conocían ondas transversales. Otra dificultad resultó el fracaso de los sólidos elásticos para producir la difracción de Fresnel para la luz reflejada en la interfaz de dos medios ópticos. Estas y otras dificultades llevaron a propuestas de hipótesis tendientes a salvar las teorías. Así la no comprobación de la existencia de

ondas luminosas longitudinales, llevaron a la hipótesis de que éstas podrían despreciarse si su velocidad de propagación se hiciera infinita. Ciertas propiedades del paso de la luz a través de medios ópticos podrían explicarse suponiendo diferentes densidades para el éter dentro y fuera de la materia; otras contradicciones empíricas se justificaban suponiendo diferentes elasticidades para el éter dentro y fuera de la materia. Algo similar ocurría con las teorías electromagnéticas. En Alemania, las dos teorías más aceptadas eran las de Weber y la de Neumann, originadas en la década de 1840. Así, por ejemplo, la teoría de Weber postulaba que una corriente eléctrica estaba formada por dos fluidos de partículas eléctricas de cargas de signo opuesto que se movían en direcciones opuestas.

Una teoría trata de dar una explicación racional a una generalización empírica, basada sobre ciertos enunciados que suponen verdaderos. Obviamente, cuando un hecho de la realidad contradice a alguno de esos enunciados supuestos verdaderos, el enunciado debe modificarse o anularse. Prácticamente, ningún científico abandona una teoría que considera buena ante su más mínima contradicción con un hecho empírico. Generalmente, se establecen nuevas hipótesis para justificar sus fallos o que restringen la aplicación de la teoría a determinados hechos experimentales.

El estado de la electrodinámica en la década de 1870 era al menos tan insatisfactorio como el de la óptica. Hubo poco acuerdo sobre los principios teóricos apropiados para desarrollar la teoría electrodinámica. Las dos teorías electrodinámicas más exitosas en Alemania fueron la de Weber y la de Neumann. Ambas teorías se habían originado a mediados de la década de 1840, y la de Weber, especialmente, se había desarrollado ampliamente desde entonces. Abarcando todos los fenómenos eléctricos y magnéticos, la teoría de Weber se basaba en la hipótesis de que una corriente eléctrica constaba de dos fluidos de partículas eléctricas de signos opuestos que se movían en direcciones opuestas. También se basó en la hipótesis de una fuerza instantánea que actuaba a distancia entre pares de partículas eléctricas. La fuerza era análoga a la atracción gravitacional entre partículas materiales, excepto que dependía tanto del movimiento relativo como de la separación de las partículas y era atractiva o repulsiva según los signos de las partículas. La fuerza dependiente del movimiento de Weber tenía una relación poco clara con el principio de energía y era cuestionada por esta razón. La teoría de las corrientes eléctricas inducidas de Neumann se basaba sobre la hipótesis de una fuerza dependiente de la posición y el movimiento entre dos elementos de corriente eléctrica en vez de entre pares de partículas eléctricas. Ambas teorías siguieron a la de Ampere al referir el magnetismo a corrientes eléctricas circulares elementales.

Varias otras teorías electrodinámicas se propusieron posteriormente en Alemania. Riemann en 1858 y Neumann en 1868 desarrollaron teorías modeladas a partir de las de Weber. ellas se diferenciaban en que postulaban una velocidad finita de propagación de la acción eléctrica, introduciendo para ello potenciales retardados.

A mediados de la década de 1870, Clausius introdujo otra variante de la teoría de Weber suponiendo la existencia de un solo fluido eléctrico móvil y una fuerza entre dos partículas eléctricas que no era central y que dependía del movimiento absoluto, en vez del relativo, de las partículas.

Una teoría electrodinámica prominente no alemana fue la propuesta por el físico danés Ludwig Lorenz en 1867. A partir de las ecuaciones de Kirchhoff, que se derivan de la electrodinámica weberiana, para el movimiento de la electricidad, Lorenz, con el uso de potenciales retardados, demostró que las corrientes eléctricas periódicas se comportan como las vibraciones de la luz, concluyendo que la luz misma consiste en corrientes eléctricas.

Otra teoría continental prominente no alemana fue propuesta por el físico sueco Erik Edlund en 1871. Edlund derivó la ley fundamental de Weber asumiendo un solo fluido eléctrico particulado, que pensó que probablemente era el éter luminífero, y asumiendo que las acciones eléctricas se propagan finitamente. Mientras que Lorenz rompió con la acción a distancia, Edlund no lo hizo; mientras que Edlund asumió un éter eléctrico, Lorenz no lo hizo. Los desacuerdos se multiplicaron.

Las diversas teorías electrodinámicas continentales dieron como resultado un laberinto de hipótesis probadas sólo parcialmente, y no parecía probable una determinación experimental inmediata. Las hipótesis contradictorias se centraron en varias cuestiones: el número —ya sea uno o dos— de fluidos eléctricos móviles; la existencia de un éter eléctrico; la identidad de la luz con los movimientos eléctricos; la naturaleza de las fuerzas entre partículas fluidas eléctricas, a las que pertenecían las cuestiones de fuerzas centrales o no centrales, y del movimiento relativo o absoluto que entraba en las leyes de fuerza; y la relación de las fuerzas dependientes del movimiento con los principios de la dinámica, especialmente con el principio de energía.

Una tradición teórica muy diferente que se había desarrollado en Gran Bretaña durante el mismo período contribuyó aún más a la profusión de principios electrodinámicos. Basándose en el trabajo de Faraday y William Thomson, Maxwell propuso una teoría matemática de la electricidad y el magnetismo en artículos de las décadas de 1850 y 1860 y en su completo Tratado sobre electricidad y magnetismo de 1873. Rechazando la acción a distancia y los fluidos eléctricos de partículas asociados de la electrodinámica continental, Maxwell basó su teoría en el concepto de un medio electromagnético. El punto esencial de la teoría era que el medio electromagnético soportaba vibraciones transversales que se propagaban a la velocidad de la luz. La teoría prometía ser fructífera, especialmente en la predicción que compartía con ciertas teorías continentales de que la luz es un fenómeno eléctrico. Maxwell tomó en serio las implicaciones ópticas de su teoría, investigando una serie de problemas ópticos: en particular, la presión ejercida por la luz, la propagación de la luz en los cristales, la relación entre la conductividad eléctrica y la opacidad óptica de los metales, y la rotación magnética del plano de polarización de la luz. Sin embargo, fracasó en derivar las leyes de la reflexión y la refracción de la luz, el problema que había resultado tan embarazoso para las teorías ópticas del sólido elástico.

A pesar de toda su promesa, la teoría de Maxwell, en la forma o varias formas en que la dejó, fue una fuente de gran perplejidad para muchos de sus lectores más cercanos. Ehrenfest recordó que el Tratado de Maxwell parecía una “especie de bosque primigenio intelectual, casi impenetrable en su fecundidad no aclarada”. La teoría no estaba clara precisamente en aquellas características básicas que la diferenciaban de la mayoría de las teorías continentales. Maxwell no aclaró la naturaleza de la

carga eléctrica, un concepto que había recibido interpretaciones claras, si no unánimes, en términos de fluidos eléctricos particulados. En rigor, Maxwell se negó a comprometerse con ninguna posición sobre la naturaleza de la electricidad. A veces se refirió a ella como el proceso de polarización dieléctrica, pero en otras ocasiones se refirió a la polarización como un movimiento de la electricidad. A veces comparó el movimiento de la electricidad con el de un fluido incompresible, aunque no lo consideraba como tal. En el Tratado mencionó a una “molécula de electricidad”, pero agregando que esa expresión está “fuera de armonía con el resto de este tratado”.

Concediendo únicamente que la electricidad era una cantidad física, Maxwell advirtió contra la suposición de que “es o no es una sustancia, o que es, o no es, una forma de energía, o que pertenece a cualquier categoría conocida de cantidades físicas”. No es de extrañar que sus seguidores continentales encontraran muy difícil la tarea de clarificar el concepto de carga. También les resultaba difícil entender el concepto maxwelliano de campo electromagnético.

Un poco de ayuda para el entendimiento de la base conceptual de la teoría de Maxwell, la proporcionó el artículo publicado por Hermann von Helmholtz en 1870 que puso un poco de orden en la electrodinámica. Aplicó su ley de inducción general al caso en el que se encuentra presente un medio polarizable eléctrica y magnéticamente. postuló que la interacción eléctrica de los cuerpos depende en parte de las fuerzas directas a distancia y en parte de la polarización del medio, que a su vez depende de las fuerzas a distancia y es la fuente de nuevas fuerzas a distancia. Demostró que el desplazamiento eléctrico en un dieléctrico obedece a las mismas ecuaciones de onda que el desplazamiento de partículas ponderables en un sólido elástico.

Cinco años después del artículo de von Helmholtz, Lorentz defendió su tesis doctoral sobre óptica electromagnética y para su desarrollo teórico tomó muchas de las conclusiones de Maxwell clarificadas por von Helmholtz.

En un artículo posterior de 1878 sobre el tema<sup>1</sup>. Lorentz comenzó el programa de investigación que había esbozado al final de su disertación; y al hacerlo, reforzó aún más su distinción entre los roles de la materia y el éter. Allí desarrolló una teoría de la dispersión de la luz asumiendo que las moléculas materiales se comportan como osciladores armónicos cargados y que el éter en todas partes, excepto posiblemente en la vecindad inmediata de las moléculas, tiene las mismas propiedades que tiene en el vacío. Lorentz explicó la dispersión de la luz en un cuerpo, de la siguiente manera: las ondas de luz incidentes en el éter hacen vibrar las partículas eléctricas del cuerpo; las partículas vibrantes envían ondas secundarias en el éter que interfieren con las ondas incidentes, haciendo que la velocidad de propagación de la luz a través del cuerpo dependa de la frecuencia.

---

<sup>111</sup> H, A, Lorentz, Üeber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. III. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 23: 197 – 210 (1878).

En la década de 1880, el interés de Lorentz por el electromagnetismo se reflejó en un artículo sobre la fuerza entre dos elementos de corriente considerados desde el punto de vista de la electrodinámica continental, y en otro sobre el efecto Hall\* y la rotación electromagnética del plano de polarización de luz. Su continuo interés en el éter se reflejó en un estudio de la aberración de la luz en 1886, en el que concluyó que la visión de Fresnel del éter luminífero era superior a la de Stokes. A diferencia de Stokes, Fresnel en su teoría de la aberración supuso que el éter cercano a la tierra no participaba en su movimiento, Lorentz pensó que la hipótesis de la total transparencia de la materia al éter estaba implícita en toda la teoría de Fresnel.

Sin embargo, el principal interés de Lorentz en la década de 1880 no era el electromagnetismo y la óptica, sino la teoría cinética molecular del calor. La ciencia de la termodinámica se había completado en gran medida en su época y él no participó en su construcción. Pero la interpretación cinético-molecular de la termodinámica estaba lejos de ser completa, y trabajó en varios de sus problemas; por un lado, corrigió la prueba del teorema H de Boltzmann, Lorentz fue muy receptivo a la teoría cinética, como lo fue al punto de vista molecular en la física en general, el tema que había ampliado en su conferencia inaugural en la Universidad de Leiden.

Desde la década de 1890, la teoría del electrón dominó las investigaciones de Lorentz. Al construir una teoría de electrones y campos, reunió una serie de ideas que había acumulado durante varios años de variadas investigaciones. El concepto de partículas de la electricidad que se encuentra en la base de su teoría electrónica estuvo condicionado por su larga familiaridad con la electrodinámica continental y su suposición de fluidos eléctricos en partículas. También estuvo condicionado por la misma orientación molecular en física que había impulsado su intenso trabajo sobre la teoría cinético-molecular y, antes de eso, sobre la interacción de la luz y la materia molecular. Igualmente, fundamental para su teoría electrónica, era el concepto de éter estacionario, al que había llegado a través de sus estudios de aberración óptica. Finalmente, sus estudios pioneros de la óptica maxwelliana en la década de 1870 prepararon el camino para la separación completa y explícita de los roles del éter y la materia en su teoría electrónica.

La ocasión inmediata para que Lorentz volviera a los fundamentos de la teoría de Maxwell fueron las investigaciones de Hertz en electromagnetismo. A fines de la década de 1880, en respuesta al programa de Helmholtz para lograr una decisión empírica entre las teorías electrodinámicas rivales, Hertz llevó a cabo sus influyentes experimentos sobre las ondas eléctricas de Maxwell. Tras su demostración experimental de ondas eléctricas en el aire, Hertz realizó estudios teóricos en 1890 de la electrodinámica maxwelliana de cuerpos estacionarios y en movimiento. Habiendo abandonado la interpretación de acción a distancia de Helmholtz de la teoría de Maxwell con la que había comenzado sus investigaciones experimentales, Hertz en sus estudios teóricos aceptó la interpretación de acción contigua de Maxwell de los procesos electromagnéticos en el éter, junto con su negación de los fluidos

---

\*\* H.A. Lorentz, Le phénomène découvert par Hall et la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. Archives Néerlandaises 19: 123-152 (1884)

eléctricos en partículas. , Hertz basó su estudio de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento en el concepto de un éter que era completamente arrastrado por cuerpos ponderables. Al darse cuenta de que un éter arrastrado estaba en conflicto con los hechos ópticos, justificó su aplicación a los fenómenos estrechamente electrodinámicos sobre la base de que era compatible con tales fenómenos y que facilitaba una presentación sistemática de la teoría, único propósito de su estudio teórico. Al asumir un éter arrastrado, Hertz solo necesitaba un conjunto de vectores eléctricos y magnéticos en lugar de los dos requeridos por un éter que era separable de la materia. También basó su estudio en su versión de las ecuaciones del Tratado de Maxwell, que postuló en lugar de derivar de modelos y principios mecánicos.

Las investigaciones teóricas y experimentales de Hertz generaron un amplio interés en la teoría de Maxwell entre los físicos continentales. De las principales declaraciones teóricas de la electrodinámica maxwelliana que siguieron a las investigaciones de Hertz, varias propusieron una visión molecular de la electricidad junto con un éter estacionario. Estas teorías, que pronto se llamarán teorías electrónicas, fueron propuestas de forma independiente a principios de la década de 1890 por Lorentz, Wiechert y Larmor. Aunque las tres teorías tenían grandes áreas de semejanza, también diferían en aspectos importantes. Mientras que Larmor, por ejemplo, veía a los electrones como estructuras en el éter y al éter como la única realidad física, Lorentz trataba a los electrones y al éter como entidades distintas. De las tres teorías, la de Lorentz obtuvo la mayor autoridad en el continente, en parte debido a su claridad, aunque en última instancia insatisfactorio, dualismo de electrón y campo.

En un discurso ante el Congreso Holandés de Física y Medicina en 1891, Lorentz, siguiendo a Hertz, declaró su conversión a la acción contigua en los procesos electromagnéticos. Sin embargo, Lorentz se opuso a dos características de la electrodinámica de Hertz, lo que provocó su primera memoria en 1892 sobre la teoría del electrón; “La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants”\*. Criticó el éter totalmente arrastrado de Hertz por motivos ópticos bien conocidos; y aunque admiraba la forma matemática clara y sucinta que Hertz y Heaviside habían dado a la teoría de Maxwell, criticaba la simple postulación de Hertz de las ecuaciones de campo. Refiriéndose a "uno de los capítulos más bellos" del Tratado de Maxwell en el que Maxwell aplicó la mecánica lagrangiana para dilucidar el electromagnetismo sin asumir un mecanismo detallado, Lorentz en 1892 continuó la exploración mecánica iniciada por Maxwell. Remarcó que “siempre se ha intentado volver a las explicaciones mecánicas”, y con razón, en su opinión. Después de establecer sus propias hipótesis sobre el éter estacionario y los electrones, aplicó el principio de d'Alembert para derivar las ecuaciones de campo y las ecuaciones de movimiento de un electrón en el campo. De manera característica, Lorentz explicó al principio las suposiciones físicas de su teoría; fue un esfuerzo constructivo de claridad ejemplar en una ciencia crónicamente sujeta a la oscuridad.

Lorentz incorporó a su teoría electrónica la opinión de Fresnel de que el éter penetra en la materia (Lorentz se aferró a un éter estacionario con más tenacidad que incluso Fresnel, quien admitió cierta

---

\* Archives Néerlandaises 25: 363-552 (1892)

resistencia), pero rechazó la opinión adicional de Fresnel de que la densidad del éter varía de sustancia a sustancia, así como la opinión de Neumann de que el éter difiere en elasticidad en diferentes sustancias. Para Lorentz, el éter tenía propiedades idénticas en todas partes y no se sentía inclinado a especular sobre su naturaleza última. Separó completamente el éter y la materia ordinaria; sin embargo, dado que se observó que el éter y la materia interactuaban, necesitaba restablecer su conexión. Supuso que su única conexión la proporcionaban los electrones pasivos y negativos, a los que consideraba cuerpos rígidos, pequeños y ponderables. Asumió que los electrones están contenidos en todas las moléculas de materia ordinaria (Lorentz escribió sobre "partículas cargadas" en 1892, sobre "iones" en 1895 y sobre "electrones" solo después de 1899; en este artículo, el término "electrones" se usa en todo, sin sugerir que Lorentz tenía una visión inmutable de las propiedades de los electrones durante estos años).

A diferencia de Maxwell y Hertz, Lorentz proporcionó una interpretación clara y sencilla de la carga y la corriente eléctricas y de su relación con el campo electromagnético. Un cuerpo lleva carga si tiene un exceso de uno u otro tipo de electrones. Una corriente eléctrica en un conductor es un flujo de electrones: un desplazamiento dieléctrico en un no conductor es un desplazamiento de electrones de sus posiciones de equilibrio. Los electrones crean el campo electromagnético, cuyo asiento es el éter; el campo, a su vez, actúa de manera ponderomotriz sobre la materia ordinaria a través de los electrones incrustados en las moléculas materiales.

Debido a que Lorentz separó completamente el éter y la materia, solo necesitaba un par de magnitudes dirigidas, una eléctrica y otra magnética, para definir el campo en un punto, y esto era así, estuviera o no presente la materia en el punto; de esta manera respondió a la objeción formal de Hertz a un éter estacionario de que requería dos conjuntos de magnitudes dirigidas para definir el campo en un punto, uno para la materia y otro para el éter. Lorentz también respondió a la objeción de Hertz de que los fluidos eléctricos en partículas pertenecían a la electrodinámica de acción a distancia, no de acción contigua. Por medio de sus conceptos de un éter estacionario y de electrones transparentes a él, Lorentz construyó una electrodinámica consistente que al mismo tiempo rechazaba la acción a distancia y retenía fluidos eléctricos particulados.

Por esta razón, Lorentz caracterizó su teoría como una fusión de la electrodinámica continental y maxwelliana. Conservó la clara comprensión de la electricidad de las teorías de Weber y Clausius, y al mismo tiempo aceptó el quid de la teoría de Maxwell: la propagación de la acción eléctrica a la velocidad de la luz. En la electrodinámica de Weber y Clausius, dos partículas eléctricas actúan entre sí con una fuerza que depende de su separación y de su movimiento en el instante de la acción. En la teoría de Lorentz, la fuerza sobre un electrón también depende de la posición y el movimiento de otros electrones, pero en instantes anteriores, debido a la propagación finita de las perturbaciones eléctricas a través del éter mediador.

Lorentz explicó la interacción de la luz y la materia de una manera cercana a su teoría óptica de la década de 1870. La luz se desvía y se retarda en su paso a través de un cuerpo debido a los electrones

en las moléculas del cuerpo; la luz incidente genera vibraciones en los electrones, que a su vez producen ondas de luz que interfieren con las originales y entre sí. Con esta concepción, Lorentz en 1892 derivó el coeficiente de arrastre de Fresnel, una medida del movimiento que un cuerpo transparente en movimiento comunica a la luz que lo atraviesa. El coeficiente había sido confirmado por el experimento de Fizeau de 1851 sobre el movimiento de la luz en una columna de líquido en movimiento y la repetición de Michelson y Morley en 1886. Entre las interpretaciones físicas que se le habían dado al coeficiente, una era que el cuerpo en movimiento arrastra parcialmente el éter con él, Lorentz demostró que el coeficiente de arrastre resultaba de la interferencia de la luz y, por lo tanto, no implicaba un verdadero arrastre parcial del éter. Esta demostración fue el logro más impresionante de su primera memoria sobre la teoría del electrón, lo que inspiró a Max Born a referirse a ella, correctamente, como uno de los "ejemplos más hermosos del poder del análisis matemático en el mundo físico".

Aunque en 1892 Lorentz creía que era importante relacionar los procesos electromagnéticos con las leyes mecánicas, no había construido una electrodinámica totalmente mecanicista. En ciertos aspectos, su éter era inherentemente una sustancia no mecánica. Dado que su éter ocupa el mismo espacio que los electrones y las moléculas materiales, y sus propiedades no se ven afectadas por su coextensión, no tiene conexión mecánica con la materia ordinaria.

La siguiente gran exposición de Lorentz de su teoría electrónica fue *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (1895)<sup>†</sup>. Ya no derivó las ecuaciones básicas de su teoría a partir de principios mecánicos, sino que simplemente las postuló. Escribió las ecuaciones por primera vez en notación vectorial compacta; en unidades electromagnéticas las cuatro ecuaciones que describen el campo electromagnético en el vacío son

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = p,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi(\mathbf{p}\mathbf{v} + \mathbf{d}),$$

$$-4\pi c^2 \operatorname{rot} \mathbf{d} = \mathbf{H},$$

$$\mathbf{E} = 4\pi c^2 \mathbf{d} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

---

<sup>†††</sup> Verlag: E.J. Brill, Leiden, 1895.



Las primeras cuatro ecuaciones encarnan el contenido de la teoría de Maxwell; la quinta ecuación es la contribución del propio Lorentz a la electrodinámica, conocida hoy como la fuerza de Lorentz, que conecta el campo continuo con la electricidad discreta.

En 1892, Lorentz había discutido brevemente el problema de los efectos del movimiento de la tierra a través del éter estacionario; en el *Versuch* repasó sistemáticamente todo el problema. Como el éter no es arrastrado, un cuerpo en movimiento como la Tierra tiene una velocidad absoluta relativa a él. Surge la pregunta de si la velocidad absoluta de la tierra es detectable o no a través de los efectos ópticos o electromagnéticos del "viento" del éter que lo acompaña. La magnitud de los efectos del viento se mide teóricamente por la relación entre la velocidad del movimiento de la tierra  $v$  y la velocidad de la luz  $c$ . La relación es pequeña para la Tierra, pero no tan pequeña como para estar fuera del alcance de la observación.

Los efectos del viento, sin embargo, no se observaron; y para que su teoría fuera creíble, Lorentz tuvo que explicar por qué. Demostró que, de acuerdo con la teoría, una compensación inesperada de acciones elimina todos los efectos del viento etéreo en una aproximación de primer orden (despreciando los términos que involucran las potencias segundas y superiores mucho más pequeñas de  $v/c$ ). Analizó la ausencia de efectos de primer orden del viento del éter en fenómenos como la reflexión, la refracción y la interferencia con la ayuda de un "teorema de los estados correspondientes" formal. El teorema afirmaba que, con una precisión de primer orden, ningún experimento con fuentes de luz terrestre podría revelar el movimiento de la tierra a través del éter. Al introducir transformaciones para las magnitudes de campo, las coordenadas espaciales y un "tiempo local", Lorentz demostró que, en aproximación de primer orden, las ecuaciones que describen un sistema eléctrico en un marco móvil eran idénticas a las que describen el sistema eléctrico correspondiente en un marco en reposo en el éter (para el cual Lorentz asumió que las ecuaciones de Maxwell se cumplen exactamente)

La aproximación de primer orden de Lorentz representó casi toda la experiencia con la óptica y la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Sin embargo, se habían realizado experimentos de segundo orden para los cuales teóricamente no deberían ocurrir acciones compensatorias. Los experimentos de segundo orden más importantes fueron el experimento del interferómetro de Michelson en 1881 y su repetición más precisa y la de Morley en 1887. Sus experimentos no lograron producir evidencia de los efectos de viento de éter de segundo orden esperados de la teoría de Lorentz. La única solución que se le ocurrió a Lorentz fue la famosa hipótesis de la contracción que él y Fitzgerald propusieron de forma independiente aproximadamente al mismo tiempo. Lorentz publicó una forma aproximada de su hipótesis en 1892. En 1895 publicó una forma exacta, que establecía que los brazos del interferómetro se contraen por un factor de  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  en la dirección del movimiento de la tierra a través del éter. Lorentz consideró la hipótesis como dinámica más que cinemática, que requería que las fuerzas moleculares que determinaban la forma de los brazos del interferómetro se propagaran a través del éter de forma análoga a las fuerzas eléctricas.

En 1899, Lorentz publicó otra declaración importante de su teoría, "Théorie simplifiée des phénomènes électriques et optiques dans des corps en mouvement"<sup>‡</sup>. Fue una respuesta a la afirmación de Alfred Liénard de que, según la teoría de Lorentz, el experimento de Michelson debería producir un efecto positivo, si la luz pasa a través de un líquido o sólido en lugar de aire. Lorentz creía que el efecto positivo era improbable, y simplificó y profundizó su teoría para apoyar su creencia. Ahora trató matemáticamente su hipótesis de contracción dinámica, como si fuera una transformación de coordenadas general a la par de la transformación del tiempo local. Excepto por un coeficiente indeterminado, las transformaciones resultantes para las coordenadas de espacio y tiempo fueron equivalentes a las que publicó en su más conocido artículo de 1904; las "transformaciones de Lorentz". En 1899, Lorentz discutió por primera vez la extensión de su teorema de los estados correspondientes a los efectos de segundo orden. En relación con esta extensión introdujo, sin explorarla a fondo, una idea que pronto se trasladaría al centro de las preocupaciones de la teoría electrónica; las transformaciones de segundo orden implican que la masa de un electrón varía con la velocidad y que la masa es diferente para movimientos paralelos y perpendiculares a la dirección de traslación a través del éter. Aunque solo discutió los electrones, su análisis implica que toda masa, cargada o no, debería variar con la velocidad, una implicación que hizo explícita en su artículo más completo de 1904.

Poco antes de 1900 se estableció empíricamente que los rayos catódicos son partículas cargadas negativamente y que son lo mismo independientemente de cómo y de qué fuente se produzcan. Dado que las propiedades de las partículas de los rayos catódicos coincidían con la hipótesis de Lorentz sobre la naturaleza de la electricidad, identificó con seguridad las partículas de los rayos catódicos con los electrones de su teoría. La confirmación empírica de la unidad discreta de electricidad prestó gran autoridad a las teorías electrónicas de Lorentz y otros. En 1896, Zeeman observó un ensanchamiento de las líneas espectrales cuando se colocaba una llama de sodio entre los polos de un imán. Lorentz explicó inmediatamente el efecto sobre la base de su teoría del electrón, un resultado que apuntaba a su teoría como una herramienta prometedora para desentrañar las complejidades de la estructura atómica.

La aplicación de la teoría de Lorentz al efecto Zeeman mostró que los electrones que vibran en los átomos de sodio son negativos. Además, arrojó un valor para la relación entre la carga y la masa de los electrones negativos que coincidía con las estimaciones posteriores de J. J. Thomson, Walther Kaufmann y otros, halladas al desviar los rayos catódicos en campos eléctricos y magnéticos. El éxito del análisis de Lorentz del efecto Zeeman mejoró aún más la posición de su teoría. De hecho, a principios de siglo, la teoría de Lorentz podía contar con muchos logros sólidos, como las explicaciones del experimento de Fizeau, de la dispersión normal y anómala, y de la rotación de la luz de Faraday. Tanto por sus logros como por su promesa, la teoría del electrón de Lorentz fue ampliamente adoptada, especialmente en el continente alrededor de 1900.

---

<sup>‡‡‡</sup> Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen 1: 427-442 (1899)

1904 Lorentz publicó "Fenómenos electromagnéticos en un sistema que se mueve con cualquier velocidad menor que la de la luz".<sup>\*</sup> Fue motivado a hacer otra reformulación, casi definitiva, de su teoría electrónica por varios desarrollos teóricos y experimentales. Primero, Poincaré en 1900 había instado a Lorentz a no dar explicaciones ad hoc para cada orden de efectos nulos, sino a adoptar una única explicación que excluyera los efectos del movimiento de la tierra de todos los órdenes. En segundo lugar, en 1902 Max Abraham había publicado una teoría del electrón rival basada en la hipótesis de un electrón rígido. En tercer lugar, Kaufmann había comenzado a publicar datos experimentales sobre la masa variable de electrones en movimiento que parecían favorecer la teoría de Abraham. Finalmente, Lord Rayleigh, D. B. Brace, Frederick Trouton y H. R. Noble habían realizado nuevos experimentos de segundo orden en 1902-1904; y Lorentz quería discutir sus resultados nulos a la luz de su teoría. En su artículo de 1904, Lorentz refinó su teorema de los estados correspondientes para que se cumpliera en todos los órdenes de pequeñez en el caso de sistemas electromagnéticos sin cargas, lo que significaba que ningún experimento, por preciso que fuera, en tales sistemas podría revelar la traslación del aparato a través del éter. También mostró que su teoría concordaba con los datos de Kaufmann al igual que la teoría de Abraham. Con este artículo, Lorentz casi resolvió el problema del movimiento de la tierra a través del éter estacionario tal como se formuló en ese momento. Poincaré en 1905 mostró cómo extender el teorema de los estados correspondientes de Lorentz a sistemas que incluían cargas y hacer que el principio de relatividad, como lo entendía Poincaré, fuera más que una aproximación dentro del contexto de la teoría de Lorentz,

La solución de Lorentz, desarrollada a lo largo de los años desde 1892, implicó una serie de desviaciones radicales de la dinámica tradicional; estos los explicó explícitamente en 1904. Primero, las masas de todas las partículas, cargadas o no, varían con su movimiento a través del éter de acuerdo con una sola ley. En segundo lugar, la masa de un electrón se debe únicamente a su autoinducción y no tiene una masa mecánica constante. Tercero, las dimensiones del propio electrón, así como las de los cuerpos macroscópicos, se contraen en la dirección del movimiento, surgiendo la deformación física del propio movimiento. En cuarto lugar, las fuerzas moleculares que unen un electrón y una partícula ponderable o que unen dos partículas ponderables se ven afectadas por el movimiento de la misma manera que la fuerza eléctrica. Finalmente, la velocidad de la luz es el límite superior teórico de la velocidad de cualquier cuerpo con respecto al éter; las fórmulas de la energía y la inercia de los cuerpos se vuelven infinitas a esa velocidad. Así, para lograr un teorema de los estados correspondientes completamente satisfactorio, Lorentz tuvo que ir mucho más allá del dominio de su teoría electrónica original y hacer afirmaciones sobre todos los cuerpos y todas las fuerzas, ya fueran eléctricas o no.

---

<sup>\*</sup> **H.A. Lorentz**, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen* **6**: 809-831 (1904)

La nueva dinámica de la teoría electrónica de Lorentz de 1904 era compatible con el pensamiento físico principal de la época. El hecho de que fuera muestra cuán profundamente la teoría del electrón —la forma de Lorentz y la de otros— había cambiado los cimientos de la física clásica prerrelativista.

Lorentz, Larmor, Wien, Abraham y otros anticiparon que la mecánica sería reemplazada por la electrodinámica como la rama fundamental y unificadora de la Física. Creían que los conceptos y leyes mecánicas eran probablemente casos especiales de los de la teoría electrónica. Ellos imaginaron un universo físico que constaba únicamente de éter y partículas cargadas, lo que haría que la Mecánica fuera reemplazada por la electrodinámica. Creían que los conceptos y leyes mecánicas eran probablemente casos especiales de los de la teoría electrónica. Previeron un universo físico que constaría únicamente de éter y partículas cargadas. Fueron alentados en sus anticipaciones de visión del mundo por la creciente evidencia experimental de la naturaleza electromagnética de la masa del electrón. Lorentz escribió sobre la masa electromagnética en 1900, instando a que se hicieran experimentos para determinar la dependencia exacta de la masa del electrón con la velocidad. El problema de la masa era central no sólo por su relación con la dinámica de los electrones, sino también por su relación con la cuestión del fundamento electromagnético de la física y la cuestión relacionada de la conexión del éter y la electricidad con la materia ordinaria. Aunque Lorentz habló con más cautela que otros defensores del programa electromagnético para la física, le dio un poderoso impulso a través de sus propias aplicaciones de la teoría del electrón. Demostró en 1900 que, si la materia estuviera constituida únicamente por partículas cargadas, era posible dar una interpretación teórica electrónica de la gravitación como una fuerza transmitida por el éter de propagación finita. En ese mismo año, 1900, habló de su creencia de que la teoría del electrón podría extenderse a la espectroscopia, la estructura atómica y las fuerzas químicas.

Los resultados experimentales de Michelson y Morley llevaron a Lorentz a preguntarse si daban derecho a suponer que el éter participa en el movimiento de la Tierra y, por lo tanto, que la teoría de la aberración dada por Stokes era correcta. Considerando las dificultades que presentaba la teoría de Stokes, para explicar la aberración, Lorentz prefirió intentar eliminar la contradicción entre la teoría de Fresnel y el resultado empírico de Michelson y Morley. Para ello utilizó la hipótesis propuesta por FitzGerald.

Para ello supuso que trabajaría con el aparato del primer experimento de Michelson y que, en su principal posición, el brazo P está orientado en la misma dirección del movimiento de la Tierra. Si  $v$  es la velocidad de ese movimiento y  $L$  la longitud de cada brazo

Lorentz vivió toda la vida en unas pocas ciudades holandesas cercanas (Arnhem, Leiden, Haarlem) pero fue el más cosmopolita de los físicos. Durante los primeros veinte años de su carrera, su cosmopolitismo fue restringido a lo literario. Después de eso, comenzó a mudarse fuera de su estudio y sala de conferencias de Leiden para establecer contacto personal con físicos en el extranjero. Hizo esto en el momento en que su teoría de los electrones le aseguraba una posición de liderazgo en la Física, que también era el momento de una nueva fase de conciencia internacional de la ciencia. Las

reuniones internacionales de física son esencialmente un fenómeno del siglo XX, aunque antes de eso, los físicos de un país a veces asistían a reuniones de Física en otro. En 1898, Lorentz concurrió por primera vez a una reunión científica fuera de los Países Bajos, al aceptar la invitación de Boltzmann a concurrir a Düsseldorf para participar de la reunión de la Sociedad Alemana de Científicos Naturales y Médicos. En 1900 viajó al Congreso Internacional de Física en París, una asamblea verdaderamente mundial de físicos.

La actividad internacional más importante de Lorentz fue su presidencia regular de los Congresos Solvay de Física desde su inicio en 1911 hasta el de 1927, la última reunión antes de su muerte. Durante esos años, Lorentz fue una especie de institución en estas y otras reuniones internacionales, que presidió como el líder reconocido de la ciencia Física, debido a sus conocimientos, su gran tacto, su capacidad para resumir lúcidamente los argumentos más enredados y, sobre todo, su gran habilidad lingüística. Además de presidir congresos, fue invitado en ellos para dar muchas conferencias. Así habló sobre la teoría del electrón y otros temas de interés físico en Berlín en 1904, en París en 1905, en Nueva York en 1906 y más tarde en Gotinga, Pasadena y otros lugares.

Entre 1909 y 1921 fue presidente de la sección de Física de la Real Academia de Ciencias y Letras de los Países Bajos. Después de la Primera Guerra, usó su influencia para persuadir a sus compatriotas a unirse a las organizaciones científicas internacionales creadas por los Aliados. En 1923, se convirtió en uno de los siete miembros de la Comisión Internacional de Cooperación Intelectual de la Sociedad de Naciones, sucediendo a Henri Bergson como presidente. Sus esfuerzos por instaurar un mayor internacionalismo en la ciencia, chocaron bastante con los poderosos nacionalismos imperantes en la posguerra.

A lo largo de su carrera, recibió muchas distinciones. En 1902 Lorentz compartió el Premio Nobel de Física con su compatriota y ex estudiante Pieter Zeeman "*En reconocimiento al servicio extraordinario que han proporcionado con sus investigaciones sobre la influencia del magnetismo sobre los fenómenos de radiación.*" También fue galardonado con las medallas Rumford y Copley de la Royal Society; recibió doctorados honorarios de las universidades de París y Cambridge; y fue elegido miembro extranjero de la Sociedad Alemana de Física y de la Royal Society.

Cuando Lorentz murió, en 1928, a la edad de setenta y cuatro años, fue honrado como la figura cultural más grande que Holanda había producido en los últimos tiempos. El día de su funeral, los servicios de telégrafo y teléfono holandeses fueron suspendidos durante tres minutos en homenaje. Representantes de la realeza y el gobierno holandeses asistieron a su funeral en Haarlem, al igual que representantes de academias científicas de todo el mundo. Einstein, líder de la segunda generación de físicos teóricos profesionales y representante de la Academia de Ciencias de Prusia, habló junto a la tumba y se refirió a Lorentz como el "hombre más grande y noble de nuestro tiempo".

## 17 – 6.- Zeeman y la ratificación de la teoría de Lorentz

Pieter Zeeman nació el 25 de mayo de 1865 en Zonnemaire, un pequeño pueblo en la isla de Schouwen, Zelanda, Países Bajos. Su padre fue el clérigo Catharinus Forandinus Zeeman y su madre fue Wilhelmina Worst. Pieter hizo sus estudios secundarios en una escuela de la ciudad de Zierikzee, la ciudad principal de la isla. Luego de graduarse estudió durante dos años lenguas clásicas, conocimientos que se requerían para ingresar a la universidad.

Zeeman ingresó a la Universidad de Leyden en 1885 y no sólo fue estudiante de Mecánica de Heike Kamerlingh Onnes, con quien trabó una amistad de por vida, sino que cursó Física experimental con Hendrick Lorentz con quien compartiría el Premio Nobel de Física 1902.

En 1890, fue nombrado asistente de Lorentz, lo que lo llevó a participar en un extenso programa de investigación. Obtuvo su doctorado en 1893, después de lo cual se fue al instituto de F. Kohlrausch en Strasbourg



Pieter Zeeman

donde, durante un semestre, investigó sobre electromagnetismo con Emil Cohn. Regresó a Leyden en 1894 y, al año siguiente fue nombrado "privaat-docent" cargo que mantuvo hasta 1897.

Su trabajo sobre el efecto de un campo magnético sobre las líneas espectrales de los elementos, hizo que fuera reconocido en la comunidad física y en 1897 fue invitado a ejercer la docencia en la Universidad de Ámsterdam. En 1900, llegó su nombramiento como Profesor Extraordinario. Cuando en 1908 Johann Diderik van der Waals alcanzó la edad de jubilación, Zeeman fue elegido como su sucesor, al mismo tiempo que ejercía como Director del Laboratorio de Física.

En 1923 se puso a su disposición un nuevo laboratorio, construido especialmente para él, siendo una característica destacada un bloque de hormigón que pesaba 250 toneladas, construido especialmente para realizar experimentos libres de vibraciones. El instituto ahora se conoce como el Laboratorio Zeeman de la Universidad de Ámsterdam. Muchos científicos de fama mundial han visitado a Zeeman allí o han trabajado con él durante algún tiempo. Permaneció en esta doble función durante 35 años, rechazando en numerosas ocasiones invitaciones para ocupar cátedras en el extranjero.

En 1935, tuvo que renunciar a la Dirección del Laboratorio para acogerse a los beneficios de la jubilación. Entre sus estudiantes más destacados, podemos mencionar a Cornelis Jan Bakker quien llegó a ser el Director General del CERN y Samuel Abraham Goudsmit quien con George Eugene Uhlenbeck introdujeron en la Física el concepto de “spin” del electrón.

Los principales temas de investigación de Zeeman estuvieron relacionados con los fenómenos ópticos y magnéticos. Su primer trabajo “Medidas relativas al fenómeno de Kerr”, escrito en 1892, fue premiado con una Medalla de Oro por la Sociedad Holandesa de Ciencias de Haarlem; su tesis doctoral versó sobre el mismo tema. En Strasbourg estudió la propagación y absorción de ondas eléctricas en fluidos. Su trabajo principal, fue el estudio de la influencia del magnetismo en la naturaleza de la radiación de la luz, iniciado por él en el verano de 1896, que constituyó una continuación lógica de su investigación sobre el efecto Kerr. El descubrimiento del llamado efecto Zeeman, por el que ha sido galardonado con el Premio Nobel, fue comunicado a la Real Academia de Ciencias de Ámsterdam –a través de H. Kamerlingh Onnes (1896) y J.D. van der Waals (1897)– en la forma de artículos titulados *Over den Invloed eener Magnetisatie op den Aard van het door een Stof uitgezonden Licht* (Sobre la influencia de una magnetización en la naturaleza de la luz emitida por una sustancia) y *Over Doubletten en Tripletten in het Spectrum teweeggebracht door Uitwendige Magnetische Krachten* (Sobre dobletes y tripletes en el espectro causado por fuerzas magnéticas externas) I, II y III. (Las traducciones al inglés de estos artículos aparecieron en *The Philosophical Magazine*; del primer artículo apareció una versión francesa en *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, y una versión abreviada en alemán en *Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin*).

La importancia del descubrimiento puede juzgarse inmediatamente por el hecho de que el fenómeno no solo confirmó las conclusiones teóricas de Lorentz con respecto al estado de polarización de la luz emitida por las llamas, sino que también demostró la carga negativa de las partículas oscilantes, así como la relación inesperadamente alta de su carga específica ( $e/m$ )\*. Así, cuando al año siguiente se estableció el descubrimiento de la existencia de electrones libres en forma de rayos catódicos por J. J. Thomson, la identidad de los electrones y las partículas de luz oscilantes podría establecerse a partir de la naturaleza negativa y la relación  $e/m$  de las partículas. El creciente número de observaciones realizadas por otros investigadores al estudiar los efectos del uso de diversas sustancias como emisores de luz, no todas ellas explicables por la teoría original de Lorentz (el llamado “efecto Zeeman anómalo” solo pudo explicarse adecuadamente en una fecha posterior, con la aceptación de la teoría atómica de Bohr, la mecánica cuántica ondulatoria y el concepto del espín del electrón). Sus trabajos sobre estos temas, fueron reunidos por Zeeman en su libro *Researches in Magneto-Optics* (Londres 1913) y traducido al alemán en 1914. El efecto Zeeman no solo ha arrojado mucha luz sobre el mecanismo de la radiación de la luz, así como sobre la naturaleza de la materia y la electricidad. Su enorme importancia radica en el hecho de que, incluso hasta la actualidad, ofrece los medios

---

\* Es por eso, que muchos físicos le adjudican a Zeeman el descubrimiento del electrón.

definitivos para revelar la estructura del átomo. y la naturaleza y comportamiento de sus componentes. Todavía sirve como prueba final en cualquier nueva teoría del átomo.

Ya en su segunda comunicación, Zeeman expresó la opinión de que se podía verificar la existencia aceptada de fuertes campos magnéticos en la superficie del sol, ya que estos deberían alterar las líneas espectrales derivadas del cuerpo celeste. En una carta que, en 1908, le envió el astrónomo G.E. Hale, Director del Observatorio del Monte Wilson, quien corroboró esa opinión mediante fotografías que indicaban que en los vórtices solares las líneas espectrales parecían estar afectadas por campos magnéticos. Incluso la predicción teórica sobre la probable interrelación entre las direcciones de polarización y las de los campos magnéticos fue posteriormente confirmada por Hale.

En cuanto a las actividades de Zeeman fuera del campo del desdoblamiento magnético de líneas espectrales, cabe mencionar en primer término su trabajo sobre el efecto Doppler en óptica y en rayos canales. Otro tema de estudio fue la propagación de la luz en medios en movimiento (con el que justificó la existencia del término de Lorentz en el coeficiente de arrastre de Fresnel). También realizó investigaciones sobre la influencia del momento magnético del núcleo en la estructura hiperfina de las líneas espectrales. Colaboró en el descubrimiento de nuevo isótopos ( $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{64}\text{Ni}$ , entre otros) mediante el espectrógrafo de masas en parábola de Thomson.

Zeeman fue Doctor Honoris causa de las Universidades de Oxford, Filadelfia, Strasbourg, Lieja, Gante, Glasgow, Bruselas y París. También fue miembro, o miembro honorario, de numerosas academias científicas, incluida la distinción de Associé Etranger de la Académie des Sciences de París. También fue miembro y presidente de la Commission Internationale des Poids et Mesures, París. Nombrado miembro de la Real Academia de Ciencias de Ámsterdam en 1898, se desempeñó como Secretario de la Sección Físico-Matemático entre 1912 y 1920. Entre otras distinciones se pueden mencionar el Prix Wilde de la Académie des Sciences de París, la Medalla Rumford de la Royal Society de Londres, la Medalla Matteucci de la Sociedad Italiana de Ciencias, el Baumgartner-Preis de la Akademie der Wissenschaften de Viena, la Medalla Franklin del Instituto Franklin de Filadelfia, la Medalla Henry Draper de la Academia Nacional de Ciencias de Washington. Entre otras distinciones fue nombrado Caballero de la Orden de Orange-Nassau y Comandante de la Orden del León de los Países Bajos.

Zeeman se casó con Johanna Elisabeth Lebret en 1895; tuvieron un hijo y tres hijas. Durante el último año de su cátedra sufrió problemas de salud. Murió tras una breve enfermedad el 9 de octubre de 1943.



En cuanto a su trabajo sobre el ensanchamiento de las líneas espectrales por acción de un campo magnético, podemos resumirlo<sup>12</sup> diciendo que:

Zeeman colocó la llama de un mechero Bunsen entre los polos de un electroimán y contactó la llama con una pieza de asbesto impregnada con sal común. Al encender el electroimán, las dos líneas D del espectro de sodio, que eran estrechas y definidas, se ampliaban. Al desconectar el electroimán, las líneas D volvían a sus posiciones anteriores. Zeeman repitió el experimento reemplazando el mechero Bunsen por una llama de gas alimentada con oxígeno. Al encender el electroimán las líneas espectrales nuevamente se ampliaban claramente. Reemplazando la sal común por un compuesto de litio, observó los mismos fenómenos.

Inicialmente, Zeeman pensó que el ensanchamiento de las líneas espectrales podría resultar del aumento de la temperatura de la sustancia que exponía a la acción del campo magnético. Dado que el imán provocaba una alteración de la forma de la llama, también era posible un cambio posterior de la temperatura y la densidad de la llama. Para excluir esta posibilidad, realizó otro experimento. En un tubo de porcelana colocado horizontalmente entre los polos del electroimán, donde el eje del tubo estaba perpendicular a la dirección del campo magnético, introdujo un poco de sodio en el interior y colocó dos tapas transparentes en los extremos de tubo. Con el mechero Bunsen elevó la temperatura del tubo al tiempo, que la luz de una lámpara eléctrica era orientada por un espejo metálico para atravesar todo el tubo.

El sodio, debido a la acción del mechero Bunsen comenzó a gasificarse. Mediante una rejilla de Rowland obtuvo el espectro de absorción y pudo observar con nitidez las dos líneas D del sodio. A diferentes alturas las variaciones en la densidad del vapor de sodio produjeron una asimetría en el ancho de las líneas, observándose más gruesas en la parte superior. Al funcionar el electroimán, las líneas se tornaban más anchas y oscuras. Al apagar el electroimán las líneas recuperaban su forma inicial.

El experimento demostraba de manera directa la acción del campo magnético sobre la luz. Pero como las diferencias de temperaturas podrían ser las responsables del resultado, Zeeman realizó un experimento más refinado. Usó un tubo más pequeño y lo hacía girar de modo de uniformar la densidad del vapor de sodio en su interior. Las líneas D, mostraban un ancho uniforme en toda su longitud y el encendido del electroimán daba como resultado un ensanchamiento uniforme de las líneas espectrales.

---

<sup>12</sup> La traducción de ese trabajo se encuentra en el Anexo C, junto con los trabajos de Lorentz.

Del resultado de sus experimentos, Zeeman comprobó que las líneas de absorción, y por lo tanto también las de emisión, de un vapor incandescente, se ensanchan por la acción del magnetismo e identificó el origen de las líneas espectrales con la vibración de los átomos.

Lorentz había desarrollado una teoría de los fenómenos electromagnéticos que explicaba la emisión de luz de esta manera. Por lo que los experimentos de Zeeman le daban una corroboración empírica a su teoría. La teoría de Lorentz fue tomada como modelo para todas las investigaciones experimentales posteriores de Zeeman y la concordancia entre los resultados empíricos con los teóricos, hicieron que la teoría de Lorentz fuera cada vez más aceptada en la comunidad científica y que ambos compartieran en Premio Nobel de Física de 1902.

## **17 – 7.- Albert Einstein y la relatividad.**

Albert Einstein nació en Ulm, (Württemberg, Alemania) el 14 de marzo de 1879. Su padre, Hermann Einstein (1847 – 1902), procedía de una familia judía de la Suabia rural. En 1876. Se casó con Pauline Koch (1858 – 1920) hija de un próspero comerciante judío de Württemberg y Albert fue el primogénito de la familia. Dos años después nació su hermana Maya.

Unos meses más tarde del nacimiento de Albert, la empresa de Hermann Einstein quebró, lo que lo llevó a mudarse con su familia a Munich, donde comenzó a trabajar con su hermano Jacob que dirigía una empresa distribuidora electricidad.

De niño, Einstein tuvo un desarrollo muy lento. Recién a los dos años comenzó a hablar y expresarse, — aún en términos muy sencillos, — le provocaba mucha dificultad, al punto que la criada de la familia lo apodaba “Der depperte” (el atontado) y otros parientes lo calificaban como “casi retrasado”.



A. Einstein (1879 – 1955)

Cuando tenía cinco años, su madre — que era una excelente pianista — le regaló un violín que lo acompañaría a lo largo de su vida y que lo ayudaba a recuperar la calma cuando algún hecho lo alteraba anímicamente.

A los seis años, comenzó sus estudios primarios en la escuela católica del barrio en que vivía, la Petersschule. Una de sus características infantiles fue la de rechazar las imposiciones de sus maestros y más de una vez fue enviado a su casa por desobedecer las consignas que le daban sus maestros.

Cuando cumplió los nueve años, Einstein ingresó a una escuela de secundaria ubicada cerca del centro de Munich, el Luitpold Gymnasium. Esta era una institución progresista que brindaba a los estudiantes una buena formación en Matemáticas y ciencias naturales, así como en latín y griego. Además, a los niños de familias judías, la escuela les proporcionaba un maestro para impartirles formación religiosa.

Se ha popularizado la idea de que, durante su formación escolar, Einstein tenía serias dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en una carta a Philipp Frank, de 1940, Einstein le aseguró que antes de sus 15 años, ya dominaba correctamente el cálculo diferencial e integral.\* Pero, a diferencia de otras disciplinas como, por ejemplo, la Física, la Astronomía, la Química, etc., la Matemáticas eran sólo herramientas que esas ciencias utilizaban para la búsqueda y el tratamiento de las regularidades.

En 1894, cuando Einstein tenía quince años, la empresa que su padre y su tío tenían en Munich y que se especializaba en brindar servicios eléctricos tuvo una pérdida enorme al haber hecho una inversión considerable para iluminar la parte central de Munich y el contrato no les fue adjudicado. Sus padres y su hermana, junto con el tío Jakob, se trasladaron al norte de Italia, — primero a Milán y luego a la cercana Pavía, donde los socios italianos de la compañía creían que podría haber condiciones apropiadas para el funcionamiento de una empresa prestadora de servicios eléctricos más pequeña. A Albert lo dejaron en Múnich, en casa de un pariente para que pudiera completar los tres años de estudios que le faltaban en el Luitpold. Pero Albert tenía una relación muy tensa con varios docentes del Luitpold y no quería seguir cursando en ese establecimiento. Consiguió una carta del

---

\* Fölsing, Albrecht, “Albert Einstein: A Biography”, traducida y abreviada por Ewald Osers, Viking, Nueva York, 1997 página 26. (La edición original, sin abreviar, en alemán fue publicada en 1993).

médico de la familia en la que certificaba que sufría de agotamiento nervioso. La utilizó para justificar su ausencia de la escuela en las vacaciones de Navidad de 1894, de las que ya no regresó. En lugar de ello, tomó un tren que cruzó los Alpes rumbo a Italia e informó a sus alarmados padres de que jamás volvería a Alemania.

En 1895 vivió en la casa de sus padres, en Pavia, ayudando en lo que podía a la empresa familiar. Es ese tiempo, se familiarizó con el funcionamiento de los imanes, la electricidad inducida y las bobinas. Su actividad en la empresa impresionó a su familia. Así, cierta vez que su tío Jakob tenía serias dificultades para resolver los cálculos referidos al funcionamiento de una nueva máquina, Einstein se puso a trabajar en ello y resolvió en quince minutos lo que su tío y el ingeniero de la empresa no habían podido resolver en varios días.

Einstein les había prometido a sus padres que estudiaría por su cuenta para entrar en el Politécnico de Zurich (que luego se llamaría Eidgenössische Technische Hochschule). De modo que compró los tres tomos del Cours de Physique de Jules Louis Gabriel Violle para estudiar en su casa.

Sus estudios de los temas del libro de Violle, lo llevaron a escribir su primer ensayo sobre Física Teórica, — cuando tenía dieciséis años, — ensayo que tituló “Sobre la investigación del estado del éter en un campo magnético”. La noción del éter desempeñaría un papel importante en la evolución científica de Einstein- A fines del siglo XIX, los científicos concebían la luz, simplemente, como una ondulación, por lo que suponían que el Universo debía contener una sustancia invisible pero omnipresente que permitiese la propagación de las ondas luminosas. A esa sustancia la llamaron “éter” y Einstein aceptaba esa idea. Así, en su ensayo escribió: “una corriente eléctrica genera algún tipo de movimiento transitorio en el éter circundante”. El ensayo se basaba sobre los conceptos del libro de Violle, así como algunas noticias publicadas en revistas científicas sobre los recientes trabajos de Heinrich Hertz sobre las propiedades de las ondas electromagnéticas. En su trabajo Einstein proponía experimentos destinados a explicar “el campo magnético generado por una corriente eléctrica”. Ello sería interesante “debido a que la exploración del estado elástico del éter nos permitiría apreciar la enigmática naturaleza de la corriente eléctrica.” El artículo se lo envió a su tío Cæsar Koch que era uno de sus parientes preferidos y en la carta le comentaba su preocupación porque quería ingresar al Politécnico de Zurich, pero no contaba con la edad mínima exigida ya que, por las condiciones de ingreso debería tener, al menos, dos años más.

Para ayudarle a sortear el requisito de la edad, un amigo de la familia le escribió al director del Politécnico pidiéndole que hiciera una excepción. Haciendo lugar a la excepción, Einstein fue autorizado a rendir los exámenes de ingreso. Si bien aprobó con facilidad las evaluaciones que versaban sobre Matemáticas y Ciencias, no le fue bien en la evaluación que incluía preguntas sobre Literatura, Francés, Zoología, Botánica y Política. Heinrich Weber, a la sazón Profesor Titular del Departamento de Física del Politécnico, le propuso que asistiera a las clases como oyente para después dar examen como estudiante libre, pero, por consejo del Director del establecimiento, Einstein decidió tomarse un año para prepararse y volver a rendir examen. La preparación la hizo en la Kantonsschule Aarau,

en el cantón de Argau de Suiza, donde la formación de los estudiantes estaba basada sobre la pedagogía de Johann Heinrich Pestalozzi, pedagogía que fue de gran utilidad para la formación intelectual de Einstein y que, según contó él, le ayudó a desarrollar los *gedankenexperimenten*<sup>†</sup> que luego aplicaría con frecuencia en su actividad científica.

Einstein terminó su año en la escuela de Aarau obteniendo las segundas mejores notas de su clase. Esto le permitió aprobar sin dificultades los exámenes en el Politécnico de Zurich.

Durante los cuatro años de la carrera se destacó, especialmente, en los cursos de Física teórica, obteniendo en ellos las máximas calificaciones, a pesar de sus frecuentes enfrentamientos verbales con el Profesor Weber, que continuó después de su graduación y que le ocasionó a Einstein dificultades para conseguir trabajo en la docencia,

En el Politécnico, cursaba la carrera del profesorado de Física, Mileva Marić Ruzić, una joven serbia, nacida el 19 de diciembre de 1875, en Novi Sad, una ciudad serbia que por entonces pertenecía a Hungría. Ella fue la mejor estudiante de sus estudios primarios y su padre convenció al Director del Gymnasium de Zagreb para que le permitiera matricularse allí, ya que era una institución exclusiva para estudiantes varones. Tras la graduación, en la que obtuvo las calificaciones más altas en Física y Matemáticas, ingresó al Politécnico de Zúrich, donde se convirtió, en la única mujer de la sección en la que estudiaba Einstein.

Mileva no era particularmente hermosa, de contextura menuda, cojeaba al caminar debido a una deformación congénita de los huesos de su cadera. Durante el primer año de estudios su relación con Einstein fue sólo de compañerismo educativo. Pero en el verano de 1897, decidieron ir juntos de excursión. En el otoño, “asustada ante los sentimientos que estaba experimentando” por Einstein, (que era judío) decidió hacer una pausa en los estudios en el Politécnico y comenzar a cursar Física, como oyente, en la Universidad de Heidelberg.

Sin embargo, la correspondencia entre ambos fue intensificando en ella el deseo de volver a verlo y en abril de 1898 ya estaba de regreso al Politécnico e iniciando una relación más intensa con Einstein.



Mileva Marić (1875 – 1948)

---

<sup>†††</sup> Experimentos mentales.

Einstein se graduó en julio de 1900 con un promedio de 4.9<sup>‡</sup> pero, a diferencia de otros egresados, no fue invitado a incorporarse al Politécnico como ayudante. Durante más de un año tuvo serias dificultades para conseguir un empleo. Vivió de algunas suplencias y de dar clases particulares de Física o Matemática a algunos estudiantes que lo requerían.

Mientras que, para su subsistencia, publicaba avisos en los diarios ofreciendo dar clases particulares — la primera gratis, — comenzó a buscar temas de investigación que no requiriesen material o instrumental para su desarrollo y así darse a conocer ante la comunidad científica. En 1901, *Annalen der Physik* publicó el primer trabajo de Einstein: "Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen"\*, cuyo mayor interés radicaba en que encaraba el fenómeno de la capilaridad desde el punto de vista molecular, habida cuenta de que, en esa época, las propiedades de los átomos y las moléculas todavía no eran unánimemente aceptadas por la comunidad científica.

Recién a fines de 1901, un ex-compañero suyo del Politécnico, Marcel Grossmann, cuyo padre era amigo del Director de la Oficina de Patentes de Suiza, en Berna, le escribió a Einstein diciéndole que, si él quería, su padre podría recomendarlo para cubrir una vacante en esa institución.

El empleo le fue oficialmente otorgado el 16 de junio de 1902, cuando en una sesión del Consejo Suizo se lo nombró de manera oficial y “provisionalmente” Técnico Experto de Clase 3 de la Oficina Federal de Propiedad Intelectual, con un salario anual de 3.500 francos, que era más de lo que ganaba un docente al iniciar su carrera en un Gymnasium. Si bien el trabajo correspondía a la categoría más baja del escalafón profesional de la Oficina de Patentes, a Einstein le dio la tranquilidad de poder contar con un ingreso asegurado que le permitiese encarar sus proyectos, tanto en su relación con Mileva como para preparar su tesis doctoral y aspirar a un cargo docente universitario.

Fue así, como Einstein acabaría pasando los siete años más creativos de su vida —incluso después de haber escrito su artículo sobre la relatividad especial en la Oficina de Patentes de Suiza. Durante seis días de la semana llegaba a su oficina a las ocho en punto, para examinar, durante ocho horas, las solicitudes de patentes que se presentaban. Poco a poco fue adquiriendo la habilidad de trabajar en las solicitudes de patentes lo bastante rápido como para que le quedara tiempo de dedicar, furtivamente, el resto de la jornada a su propio pensamiento científico.

Durante la Pascua de 1902, Maurice Solovine, un joven rumano que estudiaba Filosofía en la Universidad de Berna leyó un aviso en un diario en el que Einstein se ofrecía para dar clases particulares de Física. Solovine acudió a la dirección del anuncio y quedó impactado por la personalidad de Einstein. Einstein también quedó encantado con la personalidad de Solovine y así fueron estableciendo una amistad y decidieron leer juntos a los grandes pensadores y luego comentar sus ideas. Al poco tiempo, se unió a ellos Conrad Habicht, hijo de un banquero que había estudiado Matemáticas

---

<sup>‡</sup> Sobre un máximo de 6. Mileva obtuvo un promedio de 4,0 que no le alcanzó para lograr la graduación.

\* “Conclusiones acerca del fenómeno de la capilaridad”, *Annalen der Physik*, 309, 3, 1901, 513 – 523.

en el Politécnico de Zurich y decidieron llamar a su reunión como “Academia Olimpia”. Los tres se reunían periódicamente para analizar y discutir temas científicos o leer a Sofocles, Cervantes, David Hume, Ernst Mach, Baruch Spinoza o Henri Poincaré. Fue a partir de la lectura de estos autores que Einstein comenzó a desarrollar su propia filosofía de la ciencia.

En mayo de 1901, Mileva quedó embarazada de Einstein, pero no quiso abortar. En Zurich había un laboratorio que producía un fármaco abortivo que se vendía por correo. Pero ella decidió continuar con el embarazo y así se lo comunicó a Einstein. Él le prometió que, de conseguir un trabajo estable se casarían. En 1902, gravemente enfermo, Hermann Einstein aprobó el casamiento de su hijo con Mileva, aunque nadie de su familia asistió a la boda que se celebró, el 6 de enero de 1903, en la “Academia Olimpia”.

Mileva tuvo una nena a la que llamaron Lieserl y que se supone que fue dada en adopción, pero no se conoce documentación alguna que describa lo que ocurrió con ella.

El 14 de mayo de 1904, Mileva dio a luz al segundo hijo de Einstein, el que fue llamado Hans Albert, quien llegó a ser Profesor de Ingeniería hidráulica en la Universidad de California. Falleció el 26 de julio de 1973,

En 1910, tuvieron su segundo hijo varón, Edward que fue un buen estudiante durante su niñez. Sin embargo, a los 20 años, comenzó a manifestar signos de esquizofrenia. Estuvo internado durante un par de años y su estado se agravó, — según su hermano, debido al tratamiento con electroshock. Cuando fue dando transitoriamente de alta, tuvo una violenta discusión con su padre a raíz de lo cual no volvieron a encontrarse. Edward Einstein falleció de un ACV en 1965.

1905 fue el *annus mirabilis*<sup>§</sup> de Einstein, durante el cual, a los 26 años, el entonces funcionario de tercera categoría de una oficina burocrática de Suiza, escribió una serie de artículos que revolucionaron la forma de entender el Universo<sup>‡</sup>.

El primero de esos artículos, titulado “El movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor para las pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario”<sup>†</sup>, estaba basado en sus estudios sobre el movimiento browniano.

Este movimiento había desconcertado a la comunidad científica desde que se había descubierto y la explicación de Einstein, haciendo uso de las estadísticas del movimiento térmico de los átomos

---

<sup>§</sup> “Año de las maravillas”.

<sup>‡</sup> Para conmemorar ese hecho, las Naciones Unidas decidieron que 2005 fuera el Año Internacional de la Física.

<sup>†</sup> **Einstein, Albert**, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, in: *Annalen der Physik*, 17, p. 549 – 560, (1905).

individuales que forman el fluido, hizo que el movimiento browniano se constituyese en una evidencia experimental de la existencia real de los átomos.

El artículo también dio un fuerte impulso a dos temas muy controvertidos en esa época, la Mecánica estadística y la Teoría cinética de los gases.

En su segundo trabajo “*Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz*”<sup>\*</sup>, enviado a *Annalen der Physik* el 17 de marzo de 1905, adoptó la hipótesis de Planck, según la cual la energía de la radiación no se propaga en forma continua, sino como un haz de cantidades discretas, o *cuántos*, de energía, cada uno de ellos proporcional a la frecuencia  $\nu$  de la radiación siendo la constante de proporcionalidad, la constante  $h$  de Planck ( $6,626176 \times 10^{-34} J.s.$ ). Indicando con  $E$  a la energía de uno de esos cuantos, la fórmula de Planck se expresa  $E = h\nu$ . De esta manera, la propuesta de Einstein explicaba por qué la energía radiante emitida por una superficie metálica no depende de la intensidad sino de la frecuencia de la radiación y que, para cada caso, hay una “frecuencia umbral” ( $\nu_0$ ) por debajo de la cual no hay emisión. La explicación de Einstein fue un argumento contundente contra aquellos que sostenían que la radiación electromagnética sólo se manifestaba como un fenómeno ondulatorio y su trabajo fue tomado para la otorgación del Premio Nobel de Física 1921 y no su Teoría de la relatividad restringida, que tuvo una influencia mucho mayor en la evolución de la Física del siglo XX, pero que fue considerado por el comité Nobel como un desarrollo fundamentalmente matemático.

Su tercer trabajo de 1905 “*Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento*”<sup>±</sup> es una exposición sobre lo que se conoce como su Teoría de la Relatividad restringida. En él postula el Principio de la relatividad, según el cual las leyes de la Física siguen siendo las mismas para cualquier sistema de referencia no acelerante (llamado sistema de referencia inercial) y propone que la velocidad de la luz tiene el mismo valor en todos los marcos de referencia, independientemente del estado de reposo o movimiento del cuerpo emisor.

Por su importancia para el desarrollo de la Física contemporánea, hemos agregado una traducción al castellano en el Anexo E de este volumen.

El cuarto trabajo de Einstein estaba dedicado a la cuestión ¿La inercia de un cuerpo depende de su contenido energético?<sup>♠</sup>

---

\* **Einstein, Albert**, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, in: *Annalen der Physik*, 17, p. 132 – 140, (1905),

± **Einstein, Albert**, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, in: *Annalen der Physik*, 17, p. 891 – 921, (1905).

♠ **Einstein, Albert**, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, in: *Annalen der Physik*, 18, p. 639 - 641, (1905).



En este trabajo, Einstein propuso que, si un cuerpo cede la energía  $L$  en forma de radiación, su masa disminuye en  $L/c^2$ , El hecho de que la energía cedida por el cuerpo se convierta en energía de radiación, carece de relevancia ya que conduce a una conclusión más general:

La masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía; si su energía cambia en  $L$ , la masa cambia en el mismo sentido en  $L/9 \times 10^{20}$ , cuando la energía se mide en ergios y la masa en gramos.

Einstein usó el símbolo  $L$  para designar a la energía. De modo que la conclusión se representaría mediante la ecuación

$$m = L/c^2$$

o, expresada en la forma actual

$$E = mc^2$$

En diciembre de 1905, presentó otro trabajo referido a la cinética de las partículas en el movimiento browniano <sup>‡</sup>. En él analizó distintos casos de esos movimientos, por ejemplo, el movimiento browniano rotacional.

Su trabajo sobre la relatividad hizo que Einstein comenzase a ser conocido entre los profesionales de la Física. Pero él se dio cuenta que, para interactuar con esos círculos, necesitaba un cierto pie de igualdad con los físicos conocidos, por lo que decidió buscar un tema que le permitiese alcanzar el doctorado, pero que no fuese tan controversial como la relatividad. En abril de 1905, se decidió por un tema que podía desarrollar desde el punto de vista de la hidrodinámica clásica, Tituló a su tesis “Una nueva determinación de las dimensiones moleculares” que envió a la Universidad de Zurich en julio de ese año. Si bien desde el trabajo de Amedeo Avogadro hubo varios intentos de determinar lo que hoy llamamos “el número de unidades de un mol”, todos trataban de lograrlo mediante el estudio de comportamientos gaseosos. En cambio, el trabajo de Einstein fue el primero en emplear sistemas

---

<sup>‡</sup> **Einstein, Albert:** Zur Theorie der Brownschen Bewegung, in *Annalen der Physik*; ), **19**, 1906. 371 – 381,

líquidos para estimar dimensiones moleculares. Mediante la determinación de las viscosidades de soluciones de azúcar en agua pudo establecer relaciones entre variables desconocidas, el tamaño de las moléculas de azúcar y el número de esas moléculas en un volumen dado y, a partir de ello pudo establecer para el Número de Avogadro el valor  $2,1 \times 10^{23}$  unidades/mol<sup>§</sup>. La tesis fue aceptada por la Universidad de Zurich en agosto de 1905.\*

Las publicaciones de Einstein contribuyeron a que fuera ascendido a técnico experto de clase 2 en la Oficina de Patentes de Suiza.

Max Planck se convirtió en el primer físico que incorporó la teoría de Einstein. En un artículo publicado en 1906, sostenía que la relatividad se ajustaba al principio de mínima acción. Las opiniones de Planck hicieron que muchos físicos de esa época leyeran los trabajos de Einstein, especialmente el atinente a la relatividad que en los años posteriores darían pie a múltiples investigaciones.

Si bien los trabajos publicados en 1905 lo hicieron conocido en la comunidad científica y algunos investigadores relevantes, como Max Planck y Wilhelm Wien le escribían para pedirle opiniones sobre determinados temas físicos, a principios de 1908, Einstein no había conseguido un puesto como Profesor universitario. Esto lo llevó a buscar trabajo de Profesor de enseñanza secundaria. Por eso, respondió a un anuncio en el que se pedía un “Profesor de matemáticas y geometría descriptiva” en una escuela secundaria de Zúrich, y señaló en su solicitud que “también estaría dispuesto a enseñar Física”. Incluso acompañó la solicitud de empleo con todos los artículos que había publicado, incluido el referente a la teoría de la relatividad especial. Se presentaron veintiún aspirantes, y Einstein ni siquiera llegó a estar entre los tres finalistas ‡

---

§ El Número de Avogadro fue definido como el número de átomos del isótopo 12 del elemento carbono (<sup>12</sup>C) presentes en 12 gramos (exactos) de ese elemento. Esa cantidad fue llamada “un mol de átomos de <sup>12</sup>C. Luego, se generalizó como el número de unidades físicas presentes en 1 mol de una especie dada. En la revisión efectuada en la XXVI Conferencia General de Pesas y Medidas del año 2018 se aprobó el valor establecido por el Committee on Data of the International Council for Science (CODATA) en el 2017, exacto hasta la octava cifra decimal,  $6,02214076 \times 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>.

\* Ni bien la Universidad de Zurich aceptó su tesis, Einstein la envió a *Annalen del Physik* para su publicación, pero el Director de los *Annalen*, Paul Drude, suspendió la publicación porque se conocían datos mucho más precisos de la viscosidad de las soluciones de azúcar que los había expuesto Einstein y le sugirió al autor que rehiciera los cálculos utilizando dichos datos. Usando esos nuevos datos, Einstein obtuvo:  $4,15 \times 10^{23}$ . Unos años después, un estudiante francés comprobó el planteamiento experimentalmente y descubrió que había algo que fallaba, lo que llevó a Einstein a pedirle a un ayudante de Zúrich que lo revisara todo de nuevo. Este encontró un pequeño error, que, una vez corregido, produjo un resultado de  $6,56 \times 10^{23}$ . Teniendo en cuenta los valores aceptados del Número de Avogadro, se evidencia que el método de Einstein no era muy preciso.

‡ Presentación ante el Consejo de Educación de Zurich, 20 de enero de 1908; publicado en **Fölsing, A.**, “Albert Einstein, a biographie”, Viking, New York, **1997**. p. 236.

En 1907, Einstein solicitó un puesto de *privatdozent*, el peldaño inicial del escalafón docente universitario. En su solicitud, enumeró los diecisiete artículos que había publicado incluyendo, por supuesto, el de la relatividad — que a la sazón estaba siendo utilizado por muchos físicos como fundamento para sus investigaciones — y el referido a los cuantos de luz. Su solicitud fue rechazada debido a que el reglamento de la universidad requería la presentación de un trabajo inédito para la habilitación docente (*Habilitationsschrift*) el cual debía ser defendido por el postulante ante las autoridades de la Universidad. Einstein redactó una aplicación de su trabajo sobre los cuantos y en 1908 lo defendió y pudo, al fin, ser docente universitario.

El salario de un *privatdozent* no era muy alto, por lo que Einstein conservó su trabajo en la Oficina de Patentes. Esta entidad, teniendo en cuenta su nombramiento universitario, elevó su categoría a Técnico experto de primera clase con un sueldo anual de 4500 francos.

Si bien a Einstein lo halagaba el hecho de que algunos físicos utilizaran su trabajo de la relatividad para sus investigaciones, dos limitaciones a su teoría le molestaban mucho: que su teoría se aplicase solamente al movimiento uniforme realizado a velocidad constante — ya que, para el observador, los cuerpos se comportaban de manera diferente si la velocidad o la dirección cambiaban — y el no poder incorporar a su teoría, la teoría de la gravitación de Newton.

En noviembre de 1907, se le ocurrió la idea de que “Si una persona cayera libremente, no sentiría su propio peso”. Esa idea haría de en los siguientes ocho años se esforzaría por generalizar la relatividad restringida publicada en 1905.

Einstein fue perfeccionando su experimento mental suponiendo que el hombre que caía estaba dentro de un recinto cerrado, por ejemplo, un ascensor, en caída libre sobre la superficie de la Tierra. En esa cámara en caída —al menos hasta el instante del choque — el hombre se sentiría ingrávigo. Si extraía un objeto de sus bolsillos y lo soltaba, el objeto se mantendría flotando.

Haciendo volar la imaginación, Einstein pensó en un hombre en una cámara cerrada flotando en la inmensidad del espacio, lejos de todo cuerpo celeste. Este hombre experimentaría la misma sensación de ingravidez.

El hombre debería atarse de alguna manera al piso para evitar que hasta el más suave impacto de su cuerpo contra el piso, provocaría que su cuerpo comience a elevarse lentamente hacia el techo.

Luego Einstein imaginó que se enganchaba una soga en el techo de la cámara y se tiraba de ella con una fuerza constante. La cámara y el hombre en su interior comenzarían a moverse “hacia arriba”, estableciendo un “movimiento uniformemente acelerado”, El hombre en el interior, sentirá como una fuerza que lo aprieta contra el piso. Si está de pie en la cámara, tendrá la misma sensación de estar de pie en cualquier lugar de la superficie terrestre. Si extrae un objeto de su bolsillo y lo suelta, el objeto caerá al piso con un movimiento relativo acelerado, que es el mismo e independientemente del peso

del objeto. “«El hombre de la cámara llegará a la conclusión, pues, de que él y la cámara están en un campo gravitatorio.»

Los físicos aceptaban que todo objeto posee una “masa gravitatoria” que determinan su peso sobre la superficie terrestre o, de manera más general, la atracción existente entre y cualquier otro objeto. Pero también sabían que todo objeto posee una “masa inercial” que determina la magnitud de la fuerza que se le debe aplicar para lograr que se acelere. Newton ya había expresado que la masa gravitatoria de un objeto tiene siempre el mismo valor que su masa inercial, pese que ambas se definen de manera distinta. Obviamente, se trataba de algo más que una mera coincidencia, pero nadie había podido explicar, plenamente, por qué. Si para cualquier transformación, ambas masas tienen el mismo valor, ¿por qué se definen de manera diferente?

Para explicar el porqué, se emplean dos concepciones diferentes que dan el mismo resultado, Einstein recurrió al siguiente experimento mental

Imaginó que en una región del espacio en el cual la gravedad era tan baja que no podía detectarse, había un ascensor cerrado, que estaba siendo acelerado hacia arriba por un dispositivo mecánico externo y que en el interior del ascensor había un hombre. Por lo tanto, la fuerza hacia abajo que sentía el hombre encerrado se debería a la masa inercial. La misma causa la atribuiría a un objeto colgado del techo del ascensor mediante una cuerda, al “tirar” hacia abajo. Pero si Einstein imaginaba que el ascensor cerrado en que se encontraba el hombre, estaba en reposo en un campo gravitatorio medible, entonces la fuerza hacia abajo que el hombre sentía (o la fuerza que tiraba hacia abajo un objeto suspendido del techo) se debía a su masa gravitatoria.

“De esta correspondencia —decía Einstein— se deduce que resulta imposible descubrir mediante un experimento si un sistema de coordenadas dado está acelerado, o si... los efectos observados se deben a un campo gravitatorio”<sup>\*</sup> Einstein sugirió que esta imposibilidad se debe a lo que él denominó “Principio de equivalencia”, que expresó “Los efectos locales de la gravedad y de la aceleración son equivalentes.”

Así, mediante este y otros *gedankenexperimenten* fue elaborando su teoría de la relatividad generalizada, la que pudo completar y pulir en 1915.

En 1909, se postuló para profesor en la Universidad de Zurich. Con las recomendaciones de su antiguo profesor Alfred Kleiner, quien lo había ayudado con la tesis del doctorado, pudo lograr el cargo.

---

<sup>\*</sup> **Einstein, Albert** : “Considerations concerning the fundamentals of Theoretical Physics”: *Nature*, Vol., 145, No.3685, **1940** (920 – 924)

A finales del verano de 1909, Einstein fue invitado a asistir al congreso anual del *Naturforscher*, un encuentro de los científicos germanoparlantes, que ese año se celebraba en Salzburgo. Los organizadores habían incluido en la agenda tanto la relatividad como la naturaleza cuántica de la luz, y esperaban que Einstein disertara sobre el primero de los temas. Pero en lugar de ello, Einstein decidió que prefería hacer hincapié en lo que él consideraba la cuestión más acuciante: cómo interpretar la teoría cuántica y reconciliarla con la teoría ondulatoria de la luz que Maxwell había formulado tan elegantemente.

Tras su “idea más feliz”, a finales de 1907, sobre el modo en que la equivalencia entre gravedad y aceleración podía conducir a una generalización de la teoría de la relatividad, Einstein había dejado de lado ese tema, para centrarse en lo que él denominaba “el problema de la radiación” (es decir, la aparente contradicción entre la teoría cuántica y el electromagnetismo de Maxwell). Así, su preocupación era evidente cuando le escribió a Arnold Sommerfeld “dudo seriamente de que sea posible mantener la validez general de las ecuaciones de Maxwell”

Por eso, en el encuentro de Salzburgo, disertó sobre la necesidad de congeniar el comportamiento corpuscular de la radiación con su comportamiento ondulatorio, debidamente fundamentado por el electromagnetismo de Maxwell. En esa ocasión, sostuvo que, mediante determinados experimentos, la luz se comporta como un fenómeno ondulatorio y por otros resultados experimentales de comporta como un haz de partículas. “Esas dos propiedades estructurales no deben considerarse mutuamente incompatibles”. Así, en la reunión de Salzburgo, enunció la primera formulación bien fundada de la dualidad ondulatoria – corpuscular de la luz.

Cuando Einstein debía iniciar su actividad docente en la Universidad, Mileva y él se mudaron a Zurich, fue cuando ella quedó embarazada de su segundo hijo, Edward. Alquilaron un departamento en el mismo edificio donde vivían Friedrich Adler y su esposa y la amistad entre ambas parejas se hizo más estrecha. Einstein y Adler se reunían con frecuencia para charlar sobre temas de Física. En

Zurich, Einstein se reencontró con Marcel Grossmann, quien lo había ayudado a conseguir el puesto en la Oficina de Patentes. Grossmann lo ayudaba a Einstein la resolución de los problemas geométricos que la relatividad le planteaba.

En marzo de 1910, Einstein llevaba menos de seis como docente en la Universidad de Zurich, cuando recibió una invitación de la Universidad de Praga para trabajar allí como Profesor Titular.

Cuando en Zúrich se corrió la voz del posible traslado de Einstein, quince de sus alumnos, firmaron una petición instando a los funcionarios docentes a “hacer todo lo posible por mantener a este destacado investigador y profesor en nuestra universidad”. La cátedra de Física teórica había entusiasmado a los estudiantes. Si bien la Universidad de Zurich le ofreció un sustancial aumento del

suelo, Einstein prefirió trasladarse a Praga, no sólo por el cargo sino por la jerarquía de su Universidad. La recomendación de Einstein había sido formulada por Max Planck quien escribió: La teoría de la relatividad de Einstein, probablemente excede en audacia a todo lo realizado hasta ahora en ciencia especulativa, Este principio ha comportado una revolución en nuestra imagen física del mundo que sólo puede compararse con la producida por Copérnico”, Praga era entonces, parte del Imperio austrohúngaro, por lo que Einstein debía adoptar la ciudadanía del Imperio y jurar lealtad al Emperador. Pero, además, debía declarar una religión. Einstein, quien se había declarado públicamente como agnóstico, no tuvo más remedio que poner, en la planilla con sus datos, en el casillero relativo a la religión: “Mosaica”.

El cargo de Profesor Titular se le adjudicó oficialmente en enero de 1911, con un salario que era el doble de lo que percibía en la Universidad de Zurich. Einstein acordó con las autoridades que se trasladaría a Praga en el mes de marzo. Antes de hacerse cargo de la cátedra, Einstein pasó por Viena donde tuvo la oportunidad de conocer personalmente a dos físicos a los que admiraba: Ernst Mach y Hendrik Antoon Lorentz con quienes departió sobre distintos temas de la Física.

En Praga, Einstein trabó amistad de por vida con Paul Ehrenfest, quien dictaba Física en la Universidad de San Petersburgo. Ambos matizaban sus charlas sobre ciencia interpretando música clásica, Einstein al violín y Ehrenfest al piano.

Cuando Einstein decidió dejar la cátedra en la Universidad de Praga, hizo todo lo posible para que Ehrenfest lo sucediera.

El debut de Einstein en una reunión con los más altos exponentes de la Física fue en el llamado Congreso Solvay de 1911. Con sus treinta y dos años, Einstein era el más joven de la reunión. Entre los asistentes estaban Max Planck, Henri Poincaré, Marie Curie, Ernest Rutherford y Wilhelm Wien. Walther Nernst organizó el evento y actuó como secretario del multimillonario Ernest Solvay. La Presidencia se fue encargada a Hendrik Lorentz, que como diría Einstein “la dirigió con incomparable tacto e increíble virtuosismo”.

El tema central del Congreso fue el “problema cuántico” y se le pidió a Einstein que presentara una ponencia sobre ese tema, quien expuso sobre “El estado actual del problema de los calores específicos”. Heinrich Weber, su antiguo Profesor en el Politécnico de Zurich, había descubierto algunas anomalías, especialmente a bajas temperaturas, en las leyes que se suponía que reglan el calor específico. Desde finales de 1906, Einstein había ideado lo que él denominaba enfoque “cuantificado” del problema. A temperaturas ordinarias, una sustancia absorbe tal cantidad de cuantos de energía que dan la sensación de que la misma se propaga en forma continua. Pero, a temperaturas lo suficientemente bajas se hace evidente que una sustancia sólo absorbe cuantos de energía de un determinado

valor, por lo que la curva que da los valores de la energía absorbida en función de la temperatura se aparta ligeramente de los valores reales observados.

Cuando finalizó su exposición, Einstein se enfrentó a una lluvia de objeciones, tanto de Lorentz, como de Planck, Poincaré y otros. La objeción de Lorentz radicaba en que lo que había dicho Einstein “parece, de hecho, totalmente incompatible con las ecuaciones de Maxwell”. Esa incompatibilidad desaparecería a partir de la consideración de que la luz a veces se comporta en forma ondulatoria pero otras, en forma corpuscular.

Tanto a Einstein como a Mileva, no les agradaba la ciudad de Praga, tanto por sus falencias urbanas — mala calidad del agua potable, escasa higiene, de las calles, etc. — como por la idiosincrasia de su gente, por lo que decidieron volver a Zurich cuando las circunstancias lo permitiesen.

En junio de 1911, el Politécnico de Zurich adquirió categoría universitaria, pasando a llamarse Eidgenössische Technische Hochschule, (ETH) con facultad para conceder títulos de graduados. Con cartas de recomendación de Marie Curie y de Henri Poincaré, en julio de 1912, Einstein volvía a Zurich para tomar una cátedra como Profesor Titular. Pero si bien consiguieron una vivienda confortable, Einstein tenía un buen ingreso y podían estar en contacto con muchos amigos, Mileva entró en una depresión, a la vez que se fueron agudizando sus problemas de salud y el reumatismo le hacía difícil salir de su casa.

Ese año, en un viaje que hizo Einstein a Berlín se reencontró con su prima, Elsa Einstein, a quien no veía desde que eran niños. Elsa era hija de Rudolf Einstein, primo hermano de Hermann, el padre de Albert y de Fanny Koch, la hermana de Pauline, la madre de Albert. A partir de entonces, comenzaron a mantener correspondencia lo que llevó a ambos a una afectuosa relación.

En 1913, Fritz Haber era el Director de *Kaiser Wilhelm Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie*. A instancias de Haber la institución comisionó a Max Planck y Walther Nernst para que convencieran a Albert Einstein para dirigir el *Kaiser Wilhelm Institut für Physik* que se crearía especialmente para él. En su discurso de bienvenida, Haber invitó a Einstein a que “también hiciera por la Química lo que había hecho por la Física”. Einstein aceptó y se trasladó con su familia a Berlín alojándose en la residencia de Haber, con quien estableció una gran amistad.

Einstein no sólo sería el Director del Instituto de Física sino que Planck y Nernst le garantizaron su incorporación a la Academia Prusiana de Ciencias (con un buen estipendio) y el cargo de Profesor Titular en la Universidad de Berlín.

El matrimonio de los Einstein se estaba hundiendo y Haber hizo todo lo posible para ayudar a su amigo, tanto en la Dirección del Instituto de Física como en el sostenimiento del vínculo conyugal. Cuando se dio cuenta que su intento de reconciliarlos era imposible, oficio de mediador redactando el acuerdo de separación por el que Einstein le pagaría a Mileva 5.600 marcos en concepto de manu-

tención anual. El 29 de julio, Mileva y los niños abandonaron Berlín. Einstein, con Haber a su lado, los despidió en la estación de tren, llorando por la pérdida de los chicos. “*Sin Haber, no hubiera sido capaz de hacerlo*”, dijo Einstein más tarde. Deshecho pasó la noche en la casa de su amigo. Tres días después estalló la Gran Guerra.

Luego de su separación y estando en Berlín la relación entre Einstein y su prima se tornó más asidua, aunque él le dijo que, por el momento, no quería casarse y que el matrimonio podría alcanzarse luego de su divorcio de Mileva.

El experimento mental de Einstein según el cual una persona que siente que flota dentro de una cámara cerrada, no podría decidir si esa flotación se debe a que la cámara está en caída libre o suspendida en una región del espacio exterior, libre de gravedad. Esto lo llevó a enunciar un “principio de equivalencia” que le serviría de guía tanto para establecer una teoría de la gravitación como para generalizar la teoría de la relatividad a transformaciones que no fueran sólo movimientos rectilíneos y uniformes.

Así como la masa inercial y la masa gravitatoria son equivalentes, supuso que debería existir una equivalencia entre todos los efectos inerciales, como la resistencia a la aceleración, y los efectos gravitatorios, como el peso de los cuerpos. Por eso, llegó a la convicción que ambos efectos son manifestaciones de la misma estructura. Una consecuencia de esto, sería que el efecto de la gravedad no sólo puede modificar la trayectoria de un cuerpo en movimiento, sino que podría curvar un rayo de luz que es atraído por un cuerpo de una masa apropiada que permita detectar esa curvatura. Durante unos años, si bien lo mantenía en su razonamiento, no hizo nada para profundizar su búsqueda de una teoría de la relatividad generalizada a todo tipo de movimiento, sino que se dedicó a estudiar el fenómeno de los cuantos de energía. Pero un día, le confesó a Michele Besso que estaba cansado de darle vuelta al tema de los cuantos y se centró en la búsqueda de una teoría que le permitiera generalizar la relatividad.

En junio de 1911 envió un artículo a los *Annalen der Physik*, cuyo título fue “Sobre la influencia de la gravedad en la propagación de la luz”, retomaba su idea de que la propagación de la luz sería influenciada por la gravitación. Mediante una serie de cálculos, formuló una predicción sobre un rayo de luz “que si pasa tangente al campo gravitatorio del Sol experimentará una desviación de 0,83 segundos de arco.” Luego agregó: “Como las estrellas que se encuentran en las partes del cielo más cercanas al Sol, son visibles durante los eclipses totales de Sol, esta consecuencia de la teoría de la relatividad puede observarse experimentalmente. Sería muy deseable que los astrónomos se encargasen de verificarlo.”

Einstein también utilizó el ejemplo de un disco en rotación como movimiento no uniforme, Si ese movimiento es observado por una persona, desde un marco de referencia que no giraba con el disco, la relación entre la circunferencia del disco y su diámetro dejaría de ser  $\pi$ , en tales casos no se aplicaría la geometría euclidiana. Einstein no era muy avezado en geometrías no euclidianas por lo que le



solicitó ayuda a su amigo de las épocas de estudiantes, Marcel Grossman. Tras consultar la bibliografía más adecuada para que Einstein utilice para aplicar a los movimientos gravitatorios, Grossmann le recomendó la geometría no euclidiana concebida y desarrollada por Bernhard Riemann. También se ofreció a ayudarlo con las aplicaciones de esa geometría. La geometría de Riemann establecía un modo de determinar matemáticamente la distancia entre puntos en un espacio, independientemente si dicho espacio estuviera curvado. Para lograrlo empleó lo que se denominan *tensores*. Un tensor métrico es una herramienta matemática que establece como calcular la distancia entre dos puntos de un espacio dado. En el espacio tridimensional, un tensor métrico tiene seis componentes independientes. Cuando se trata de un espacio tetradimensional, como el llamado espacio- tiempo, el tensor métrico requiere diez componentes independientes.

En la búsqueda de generalizar la relatividad Einstein trató de encontrarlas ecuaciones matemáticas que permitiesen describir dos procesos complementarios: 1) Cuál es el efecto cuantitativo de un campo gravitatorio sobre la materia 2) Cómo la materia genera campos gravitatorios en el espacio-tiempo provocando su curvatura. Supuso que la gravedad podría definirse como una curvatura del espacio-tiempo y, por lo tanto, podría representarse mediante un tensor métrico.

Una de las condiciones que Einstein le imponía a su teoría, era que para campos gravitatorios muy débiles ella debería tender a la Mecánica newtoniana. Las aparentes contradicciones entre sus modelos matemáticos le hicieron abandonar el modelo matemático y conjuntamente con Grossmann, elaboraron una teoría alternativa que tuviese en cuenta el cumplimiento de los principios de conservación de la energía y del momento y que para campos gravitatorios muy débiles y estáticos fuesen válidas el principio newtoniano de la gravitación universal y sus tres axiomas del movimiento. Por eso, en 1913, Einstein y Grossmann publicaron „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation“\*. Si bien, inicialmente se sintió satisfecho con su trabajo publicado. Pero al poco tiempo encontró que para observadores en distintos movimientos acelerados tenía que modificar las fórmulas y con Michele Besso tuvieron que redactar más de cincuenta páginas de notas correctivas. Inclusive analizaron como concordaban esas correcciones con la variación del perihelio de Mercurio, que se desplazaba alrededor de 43 segundos de arco por cada siglo de lo que establecía la mecánica newtoniana.

En octubre de 1915, Einstein descubrió que la teoría que había pergeñado con Grossmann y corregido con Besso, tenía inconvenientes insalvables. Las ecuaciones no eran covariantes para una transformación que rotara uniformemente los ejes de coordenadas. Por ello, abandonó la estrategia

---

\* Esbozo de una teoría generalizada de la Relatividad y una Teoría de la Gravedad.

física imperante en el *Entwurf*...y comenzó a buscar una solución aplicando los tensores. Así se dio cuenta que sólo mediante una teoría de covariancia general podría hallar una solución satisfactoria. A partir de la covariante de Riemann, durante cuatro semanas estuvo lidiando con las ecuaciones matemáticas exponiendo sus avances, ante la Academia de Prusia. La primera exposición fue el 4 de noviembre de 1915, aunque sus ecuaciones no eran, todavía, generalmente covariantes. Al jueves siguiente, presentó su nueva idea empleando el tensor de Ricci, que no mejoró mucho su teoría. Para el tercer jueves rehízo los cálculos para el perihelio de Mercurio obteniendo el resultado correcto: 43 segundos de arco por siglo.

Varios años había estimado la curvatura de un rayo de luz que pasase tangente a la superficie del Sol. Esta vez rehízo los cálculos encontrando que la curvatura de la luz debida a la gravedad tenía que ser el doble a causa del efecto producido por la curvatura del espacio-tiempo. Por lo que el campo gravitatorio solar haría curvar un rayo de luz en aproximadamente, 1,7 segundos de arco.

Para su última conferencia, el 25 de noviembre de 1915, logró expresar las ecuaciones de campo de la gravitación, un conjunto de ecuaciones covariantes con las que completó su teoría de la relatividad general.

Las ecuaciones de campo se pueden condensar y contienen en forma comprimida toda la información relativa a la manera en que la geometría del espacio-tiempo, es deformada y curvada por los objetos.

Las ecuaciones de campo explicaban todas las formas de movimiento, tanto inercial como acelerado, rotatorio o arbitrario.

El trabajo definitivo fue publicado en *Annalen der Physik* en marzo del año siguiente.

Recién cuando terminó la Primera Guerra, Einstein y Mileva, obtuvieron el divorcio. Cuatro meses después Einstein se casó con su prima Elsa.

La confirmación de la teoría general de la relatividad que más trascendió a través de los medios, fue una expedición dirigida por Arthur Stanley Eddington para observar la desviación de la luz proveniente de una estrella al pasar por las proximidades de la superficie solar durante un eclipse ocurrido en 1919, de la que damos cuenta en este volumen en el capítulo referido a Eddington y en un Anexo donde reproducimos el trabajo presentado con todos los detalles de dicho estudio y el resultado experimental de esa desviación. Una parte de la expedición de Eddington se dirigió a Sobral, en el Norte de Brasil y la otra a la Isla del Príncipe situada a 1° al norte del ecuador frente a la costa atlántica de África. Si bien, durante el eclipse, el clima no ayudó las fotografías tomadas desde la isla del Príncipe, que tenía mejor equipo, comprobó una desviación media de 1,7 segundos de arco corroborando experimentalmente así, la teoría propuesta por Einstein.

En 1921, le fue otorgado el Premio Nobel de Física, pero no por su trabajo sobre la relatividad general sino por un trabajo menor sobre el efecto fotoeléctrico. El argumento del Comité Nobel fue que la teoría de la relatividad era un tratamiento matemático y, por lo que instituyó Nobel, debería adjudicarse a aquellos que efectuaran trabajos de investigación (empírica) sobre temas de la Física. Tal como había acordado al separarse de Mileva, Einstein le donó a ella todo el importe del Premio.

Einstein, pasó a ser un físico conocido en todo el mundo como autor de una teoría que casi nadie entendía. Su visita a los Estados Unidos, acompañando a Chaim Weitzman, que iba a recolectar fondos para la construcción de la Universidad Hebrea de Jerusalem, fue recibida en todas las ciudades que estuvo por multitudes que vivaban su nombre.

En cambio, en Alemania el clima era distinto. Alemania había perdido la guerra y tenía que pagar enormes indemnizaciones en oro a los aliados. La guerra había consumido casi todas las reservas monetarias internacionales y la inflación iba en aumento, al punto de que el Banco Central de Alemania tuvo que acuñar billetes de miles de millones de marcos, la desocupación era altísima y todo eso incentivaba el odio hacia los aliados, los norteamericanos y... los judíos, algunos científicos alemanes bregaban por crear una “ciencia aria” o “Ciencia germana” que expulsase de Alemania a científicos extranjeros y a los judíos, como Einstein.

La década de 1920 fue muy fructífera en el desarrollo de la Mecánica Cuántica, pero Einstein que había contribuido al desarrollo teórico de los cuantos de Planck, no se sentía muy a gusto con esta teoría.

Uno de los más grandes exponentes de la Mecánica Cuántica, Niels Bohr trató infructuosamente de convencer a Einstein de las bondades y el futuro de la Mecánica Cuántica. Pero Einstein no podía aceptar que el comportamiento íntimo de la materia era aleatorio. “Dios no juega a los dados”, le dijo a Bohr. Exasperado, Bohr le contestó: “Deje de decirle a Dios lo que tiene que hacer con los dados”. Pero, a pesar de eso, Bohr apreciaba mucho a Einstein. Curiosamente, Einstein realizó un importante aporte cuando en junio de 1924 recibió un artículo escrito en inglés de un joven físico de la India, llamado Satyendra Nath Bose, en el que deducía la ley de radiación del cuerpo negro de Planck, tratando a la radiación como si fuera una nube de gas y aplicándole luego un método de análisis estadístico. Este método se aplica a partículas indistinguibles. Einstein no sólo hizo publicar el artículo de Bose, sino que lo amplió con tres artículos propios en los que aplicaba el método de conteo de Bose, por lo que más tarde el método se conoce como estadística de Bose – Einstein. En la actualidad las partículas se caracterizan por su número total de espín. Las que tienen un número de espín entero, (0, 1, 2, ...) se llaman *bosones* y no cumplen con el Principio de exclusión de Pauli. Los que tienen un número total de espín semientero ( $1/2$ ,  $3/2$ ) se llaman *fermiones* y cumplen con el principio de exclusión de Pauli (dentro de un sistema cuántico, no puede haber dos fermiones en el mismo

estado cuántico). El comportamiento estadístico de los bosones, se ajusta a la estadística de Bose – Einstein, mientras que el de los fermiones, se ajusta a la estadística de Fermi- Dirac.

Cuando un gas de bosones se enfría a temperaturas próximas al cero absoluto, una cantidad macroscópica de partículas del material pasan al nivel de mínima energía, denominado “estado fundamental”, formando lo que se conoce como “condensado de Bose-Einstein”. Estos condensados no se obtienen con fermiones.

Einstein reconoció el comportamiento dual de la materia cuando observó el paso de un gas a través de una rendija que daba un patrón de interferencia como el que obtuvo Thomas Young al hacer pasar un haz de luz a través de una rendija.

Entre 1922 y 1932, Einstein integró, como representante de Alemania, el Comité Internacional de Cooperación Intelectual, una dependencia de la Liga de las Naciones, con sede en Ginebra. Allí compartió tareas con Lorentz y Marie Curie.

El crecimiento del nacionalismo en Alemania, con sus consignas radicalizadas y su proclamado antisemitismo, indujeron a Einstein a emigrar y radicarse en los Estados Unidos. Fue así que, en 1930, aceptó una oferta para trabajar unos meses en el California Institute of Technology. En los Estados Unidos trabó amistad, entre otros, con Charles Chaplin, un pacifista como él.

En 1933, el triunfo del nacional-socialismo en las elecciones que consagraron a Adolf Hitler como Canciller hizo que Einstein abandonase definitivamente Alemania y viajase a Gran Bretaña para luego instalarse en los Estados Unidos, inicialmente como “refugiado”, hasta conseguir la ciudadanía norteamericana.

Conjuntamente con John von Neumann, Kurt Gödel y Hermann Weil, fue invitado a integrar el Institute for Advanced Study, de la Universidad de Princeton, donde intentó desarrollar una teoría del campo unificado, que explicase la interacción entre los distintos tipos de fuerzas, gravitatorias, electromagnéticas, nucleares fuertes y nucleares débiles, También, trató de desarrollar argumentos contra la llamada “versión de Copenhagen” de la Mecánica Cuántica. Einstein trabajó en ese Instituto hasta su muerte en 1955.

Estando en Princeton intentó llegar a la teoría que unificase el comportamiento de todas las fuerzas, empleando distintas estrategias. Trató de efectuar un planteamiento matemático pentadimensional que había esbozado Theodor Kaluza y que Einstein había analizado dos décadas antes. Tuvo cierta colaboración de Wolfgang Pauli, que había pasado parte del período bélico en Princeton. Pero Einstein no pudo obtener las ecuaciones matemáticas apropiadas para describir el comportamiento de partículas en ese esquema. También intentó obtener su teoría del campo unificado, utilizando los

llamados “campos bivectoriales” pero tuvo que descartarla porque no llegaba a ningún resultado. Retomó una estrategia que había encarado en la década de 1920, que empleaba una métrica de Riemann, la que no se suponía simétrica, que lo llevaba al uso de dieciséis magnitudes, de las cuales empleaba diez combinaciones para la gravedad y otras para el electromagnetismo. Las primeras versiones de este trabajo se las envió a Erwin Schrödinger para pedirle su opinión por la introducción de un tensor asimétrico. Schrödinger se tomó tres días para analizar el trabajo y quedó impresionado por la forma en la que lo había desarrollado Einstein. Este se entusiasmó por el apoyo de Schrödinger pero al poco tiempo se dio cuenta que, si bien el método conducía a desarrollos teóricos muy elegantes, estos no parecían estar relacionados con nada físico.

Einstein falleció el 18 de abril de 1955, sin haber logrado desarrollar su Teoría del campo unificado.

### 17 – 8.- Jules-Henri Poincaré y su concepción de la relatividad.



Poincaré, nació en Nancy, Francia el 29 de abril de 1854. El pertenecía a una antigua familia de Lorraine (Lorena) que se remonta a Jean Poincaré<sup>‡</sup> (1630 – 1692). Henri Poincaré fue un integrante de la sexta generación de ese apellido que habitaron la zona de Lorraine. La familia Poincaré incluía parlamentarios, políticos y militares: uno de sus miembros fue abogado en el Parlamento de Nancy, otro participó, como comandante, en la Defensa de Thionille<sup>†</sup> contra los prusianos en 1792. Raymond Poincaré (1860 – 1934), primo de Henri, fue Presidente de la República durante la Primera Guerra y tres veces Primer Ministro de Francia. El padre de Henri, Émile-Léon Poincaré (1828 – 1892) fue un médico y anatomista y Profesor de Medicina en la Universidad de Nancy, Su madre, Marie Pierrette Eugénie Launois (1830 – 1897) era originaria del pueblo de Arrancy: era una mujer alerta, vivaz, muy cariñosa y muy devota. Dedicó toda su

atención a la educación de sus hijos Henri y Aline Catherine y veló por sus desarrollos con preocupación constante.

---

<sup>‡</sup> El apellido Poincaré es una traducción al francés del siglo XVII del apellido italiano Pugniquadrati, (puño cuadrado) que en francés se tradujo en poing (puño), carré (cuadrado).

<sup>†</sup> Ciudad próxima a la frontera con Luxemburgo.

Cuando Henri tenía cinco años contrajo difteria, a raíz de la cual sufrió parálisis de laringe durante nueve meses. La enfermedad lo debilitó físicamente e influyó en su personalidad convirtiéndolo en un niño retraído y tímido que evitaba la presencia de niños de su edad por temor a ser hostigado y prefería refugiarse en la compañía de su hermana menor con la que compartía juegos tranquilos. En esos tiempos fue educado por su madre.

Desde muy pequeño tuvo pasión por la lectura, y su memoria era tal que siempre podía decir en qué página, y hasta en qué línea de la página de un libro, había visto esto o aquello.

En 1862 ingresó al Liceo de Nancy (entidad que, en su honor, hoy lleva el nombre de Lycée Henri Poincaré).

Tan pronto como ingresó al Liceo, fue el primero de su clase. Las únicas disciplinas donde no obtuvo las mejores calificaciones fueron música y educación física.

Su profesor de matemáticas lo describió como «un monstruo de las matemáticas», afirmación que se vio respaldada por los premios que ganó en el *concours général*, competencia en la que participaban los alumnos más destacados de los liceos de Francia.

Poincaré egresó del Liceo en 1871, con el grado de bachiller en Ciencias y Letras.

En 1873, ingresó a la École Polytechnique, donde, entre otras asignaturas, estudió Matemáticas con Charles Hermite y, bajo su tutela, en 1874 publicó su primer artículo científico (*Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface*).

Después de completar sus estudios en la École Polytechnique, continuó su formación en la École des Mines. Allí siguió estudiando matemáticas en forma adicional a los contenidos de ingeniería en minas, y recibió su título de ingeniero en marzo de 1879.

Como graduado de la École, Poincaré se unió al Corps des Mines en calidad de inspector para la región de Vesoul, en el noreste de Francia. Estuvo en el lugar de los hechos durante el desastre de Magny en agosto de 1879, donde 18 mineros perdieron la vida. Poincaré condujo, en forma sumamente detallada, la investigación oficial sobre el accidente.

Mientras cumplía su tarea de inspector, comenzó a preparar su tesis doctoral en ciencias matemáticas bajo la supervisión de Charles Hermite. Su tesis doctoral trataba sobre el campo de las ecuaciones diferenciales. Poincaré desarrolló un nuevo método para estudiar las propiedades de dichas ecuaciones. No solo encaró el problema de la determinación de la integral de estas ecuaciones, sino que fue la primera persona en estudiar sus propiedades geométricas. Por otra parte, se dio cuenta de que dichas propiedades geométricas podían ser utilizadas para modelar el comportamiento de varios

cuerpos en movimiento libre en el Sistema Solar. Poincaré defendió su tesis exitosamente y obtuvo su doctorado en la Universidad de París en 1879.

Poco después de su graduación, la recomendación de los profesores universitarios que lo conocían influyó para que la Universidad de Caen le ofreciera un puesto de Profesor. Poincaré aceptó y comenzó a ejercer la enseñanza de las Matemáticas en el curso lectivo de 1880. A pesar de su dedicación a las Matemáticas, nunca abandonó totalmente sus actividades vinculadas con la Minería. Prueba de ello es su trabajo en el Ministerio de Servicios Públicos, en el que estuvo empleado como ingeniero a cargo del desarrollo de ferrocarril del norte entre 1881 y 1885. Años más tarde, en 1893, Poincaré sería nombrado responsable del Corps de Mines, e inspector general en 1910.

A partir de 1881, comenzó a cumplir tareas docentes en la Universidad de París. Inicialmente como *maître de conférences d'analyse* (una suerte de docente asociado de análisis matemático). Con los años, fue Profesor de las cátedras de Mecánica, Física y Experimental; Física Matemática, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celeste y Astronomía.

También en 1881, Poincaré contrajo enlace con Louise Poulain d'Andecy. El matrimonio tuvo cuatro hijos: Jeanne (nacida en 1887), Yvonne (en 1889), Henriette (en 1891), y Léon (en 1893)

En esa época, alcanzar los 60 años de vida era un logro para las personas. Cuando el que los cumplía era un científico, sus colegas le dedicaban trabajos de investigación que se compilaba en un texto conocido como *festschrift*. El Rey Óscar II de Suecia y Noruega, cumplía sus 60 años el 21 de enero de 1889 y, a instancias del matemático Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927) instituyó una competencia matemática en la que los inscriptos debían resolver cuatro problemas, aunque dejaban abierta la posibilidad de resolver cualquier otro. La convocatoria del concurso se publicó a mediados de 1885 en las revistas *Acta Mathematica* (fundada con ayuda del Rey por Mittag-Leffler en 1882) y en *Nature*.

El primero de los problemas a resolver, fue propuesto por Karl Weierstraß, (1815 – 1897) es conocido como problema de  $n$  cuerpos y está relacionado con la determinación de la estabilidad del Sistema Solar. En julio de 1887, Poincaré se presentó a dicho concurso, pero cuando comenzó a analizar el problema, llegó a la conclusión de que un problema con  $n$  cuerpos era irresoluble. Por lo que comenzó a estudiar el problema, pero restringiéndolo a sólo tres cuerpos. Su memoria, presentada en mayo de 1888, fue tan notable que el jurado decidió declararle ganador, confirmándolo el monarca el 20 de enero de 1889, un día antes de su cumpleaños.

La conclusión principal de Poincaré fue si se analizaba la interacción entre  $n$  cuerpos, una perturbación infinitesimal en el estado inicial, por ejemplo, una variación infinitesimal en la posición inicial de uno de los cuerpos, podría llevar, al cabo de un cierto tiempo, a un estado del sistema completamente diferente. De modo que, si con los instrumentos de medición no se pudiera medir la variación infinitesimal en el estado inicial, sería imposible predecir el estado final del sistema.

Karl Weierstraß, que integraba el Jurado, afirmó “Si bien el trabajo presentado no puede ser considerado como la solución completa del desafío presentado, es de una importancia tan grande, que su publicación marcará el inicio de una nueva era en la historia de la Mecánica Celeste.”

Cuando *Acta Mathematica* hizo la revisión previa a su publicación, Mittag–Leffler observó algunas imprecisiones. No obstante, el trabajo fue publicado y se le pidió a Poincaré que redactase algunas aclaraciones. Pero en la revisión, Poincaré se dio cuenta que había cometido un error grave. Al corregir el error, Poincaré encontró nuevas características que actualmente se consideran como el inicio de la Teoría del caos. El trabajo corregido fue publicado en 1890 y a Poincaré no le alcanzó el dinero del premio para pagar el costo de la retirada del número con la versión errónea de 1889.

En 1893, Poincaré ingresó al Bureau des Longitudes. Una de las tareas que se le encomendaron fue la sincronización de los horarios del mundo. En 1897, se mostró a favor de decimalizar la medida circular y con ello, las magnitudes tiempo y longitud. El movimiento de nuestro planeta hace que, si bien un reloj indica la hora, estando en reposo respecto de la superficie de la Tierra se estaría moviendo con distintas velocidades, no sólo con respecto a otro punto de la superficie terrestre sino también respecto de un cierto origen de coordenadas ubicado en algún lugar del Universo. Sus concepciones matemáticas lo llevaron a pensar que esos relojes, en movimiento a diferentes velocidades relativas al espacio absoluto, podrían ser sincronizados.

En 1904, Poincaré dio una conferencia, en el International Congress of Arts and Science en St. Louis, Congreso que versaba sobre “El estado actual y el devenir de la Física – matemática. El tema de la conferencia fue “¿Qué es el éter?, ¿Cómo están dispuestas sus moléculas?, ¿Se atraen o repelen entre sí? En esa conferencia, expresó su inquietud respecto de la idea de una *velocidad absoluta*. Si logramos medir algo, siempre tendremos la libertad de decir que ese cambio no ocurre a una velocidad absoluta, sino que sucede a la velocidad relativa al éter. Siempre puede ser la velocidad relativa a un nuevo fluido desconocido con el que se llenaría el espacio.” En esa conferencia, él reprendió, suavemente, a Lorentz por sus hipótesis de acumulación y luego, fue más allá de lo que pensaba Lorentz sobre el tratamiento de la *hora local* como concepto físico. Consideró a dos observadores en movimiento relativo y uniforme que desean sincronizar sus relojes mediante señales de luz. Los relojes regulados de esta manera, no marcarán el tiempo verdadero, sino que marcarán lo que uno podría llamar *hora local*”- Todos los fenómenos vistos por un observador, son retardados respecto al otro observador, pero ambas apreciaciones están retrasadas por igual... “y como exige el principio de la relatividad [el observador] no puede saber si está en reposo o en movimiento absoluto.”

“Poincaré concluyó esta conferencia con otra de sus visiones: “Tal vez debamos construir una nueva Mecánica, de la que solo podemos echar un vistazo,... en la que la velocidad de la luz se convertiría en un límite intransitable.” Pero, agregó, ‘Me apresuro a decir que todavía no estamos allí y que nada prueba aún que [los viejos principios] no emergerán victoriosamente e intactos de esta lucha’<sup>§</sup>. Esto es, en su visión, Poincaré señaló, por primera vez, que la velocidad de la luz podría tener un rol sumamente importante en la Física, no solo en Óptica y Electrodinámica sino también en la Mecánica.

---

§



Si bien en lo que expresó Poincaré aparece por primera vez el nombre y el concepto de la relatividad (la idea de que los valores de entes como el tiempo son relativos, dependiendo del sistema en el que se encuentre el observador, en la misma conferencia minimizo su importancia al expresar: “los relojes sincronizados de esta manera no muestran por lo tanto el tiempo real, sino lo que podríamos llamar ‘tiempo local’ de tal forma que uno está retrasado con respecto al otro. *Esto no importa mucho, ya que no tenemos forma de determinarlo*”

Mientras Poincaré expresaba sus ideas sobre la relatividad, Einstein discutía sus ideas sobre la relatividad con sus amigos Michele Besso y los otros dos integrantes de la Academia Olímpica, Conrad Habicht y Maurice Solovine. Así, la Academia Olímpica se dedicó a revisar el libro de Poincaré “*La science et l’hypothèse*”. El libro de Poincaré reducía el éter a una hipótesis que era simplemente “conveniente para la explicación de los fenómenos” e incluso predecía que “un día el éter sería indudablemente descartado como innecesario,

La teoría de la relatividad de Einstein se divulgó rápidamente en toda la comunidad científica, y la mayoría de los científicos la aceptaron sin dilación. Pero Poincaré se mantuvo especialmente callado. No rechazó las ideas de Einstein activamente; simplemente las ignoró.

Los dos hombres solo se encontraron una vez, en la Primera Conferencia Solvay, en 1911. Después Einstein escribiría, “Poincaré fue simplemente negativo [hacia la teoría de la relatividad] y a pesar de toda su perspicacia mostró poca comprensión de la situación”.

Después de la muerte de Poincaré, Einstein habló sobre él en una conferencia en la Academia Prusiana de Ciencias. Pero no hizo ninguna referencia a la relatividad. En vez de ello enfatizó al “agudo y profundo Poincaré, que supo unir la Física con la Geometría”.

Luego que se popularizasen las ideas de Einstein sobre la relatividad, Poincaré se dedicó a desarrollar lo que él llamó “Teoría de la gravedad” \*En sus trabajos derivó ecuaciones covariantes de gravitación que predecían correctamente la dirección de la precesión del perihelio de Mercurio. Poincaré consideró que la gravedad se propaga a la velocidad de la luz y, en sus trabajos, llegó a mencionar la existencia de *ondas gravitacionales*. David Hilbert publicó un desarrollo de la ecuación covariante giratoria, que se conoce como *ecuación de campo* que es la base matemática de la Teoría General de la Relatividad.

En el campo de las Matemáticas publicó trabajos sobre ecuaciones diferenciales, funciones automórficas, Álgebra, Topología y Topología algebraica. En el campo de las matemáticas aplicadas, estudió numerosos problemas de óptica, electricidad, telegrafía, capilaridad, elasticidad, termodinámica, mecánica cuántica, teoría de la relatividad y cosmología.

La correspondencia de Henri Poincaré fue editada por Archives Henri-Poincaré (Laboratoire d’Histoire des Sciences et de Philosophie, UMR 7117, Université Lorraine/CNRS) en 6 volúmenes.

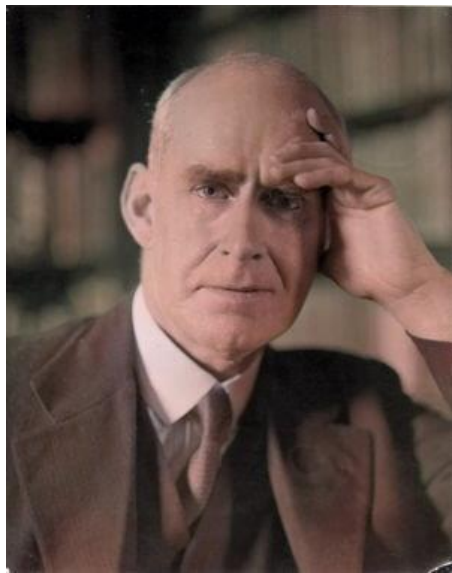
Entre 1904 y 1911 fue propuesto 51 veces para el Premio Nobel de Física. Nunca se le otorgó. Si bien muchos de sus trabajos son aplicaciones a la Física, ninguno de ellos fue un resultado experimental de esta disciplina. Lo mismo ocurrió con Einstein. Su Teoría especial de la Relatividad, marcó una etapa fundamental en el desarrollo de la Física cuya culminación fue el trabajo de 1915 sobre la Relatividad General que también fue un desarrollo matemático que lidera los cambios conceptuales de la Física hasta la actualidad. Pero luego de la comprobación experimental durante el eclipse de mayo de 1919, el Comité Nobel le adjudicó el Premio Nobel de Física 1921... por la interpretación del efecto fotoeléctrico en 1905 que también es una explicación matemática de ese efecto.

Jules-Henri Poincaré, falleció el 17 de julio de 1912, a raíz de una complicación de su próstata.

### **17 – 9.- Eddington y la corroboración de la Teoría de la relatividad.**

Arthur Stanley Eddington, nació el 28 de diciembre de 1882 en Kendal, Westmorland, Inglaterra. Los padres de Arthur Stanley Eddington fueron Arthur Henry Eddington y Sarah Ann Shout. Arthur Henry Eddington era Director de la escuela secundaria Stramongate en Kendal, Westmorland, pero falleció en 1884 durante una epidemia de fiebre tifoidea, dejando a su familia en un estado de estrechez económica. Por eso, Sarah Ann Shout y sus hijos se fueron a vivir a Weston-super-Mare, donde ella tenía parientes que se ofrecieron a ayudarla.

Arthur recibió instrucción primaria de su madre y luego concurre a una escuela primaria de la zona en que vivía. En 1893, ingresó a la Brymelyn School, una escuela pública de Weston-super-Mare, donde se destacó por sus aprendizajes de Matemáticas y Literatura inglesa



Arthur S. Eddington (1882 – 1944)

En 1898, ganó una beca del condado de Somerset de 60£ anuales por tres años. Como no había cumplido los 16 años, no podía ingresar a la universidad, pero gracias a la gestión de las autoridades de Somerset, pudo ingresar al Owens College de Manchester. Allí estudió desde 1898 hasta 1902. Durante el primer año, cursó asignaturas generales, pero en los tres años siguientes, se dedicó casi exclusivamente al estudio de las Matemáticas y la Física. Su familia no estaba en condiciones de ayudarlo económicamente pero, por su capacidad, fue ganando becas que le permitieron obtener, en 1902, el Bachelor of Science, con First Class Honours. Esa distinción le permitió obtener una beca para estudiar en el Trinity College de Cambridge. Allí, en 1902, en el primer año de estudios, su tutor fue Robert Alfred Herman. En 1903 recibió una beca de Matemáticas del Trinity College de 100£ anuales. Por los resultados que obtuvo en los Mathematical Tripos\* de 1904, lo ameritaron como Senior Wrangler\*\*.

En 1905, alcanzó la graduación como Master of Arts.

Después de la graduación, comenzó a trabajar en el Laboratorio Cavendish en un proyecto sobre emisión termoiónica, pero sus resultados no fueron satisfactorios. A fines de 1905, comenzó a estudiar Astronomía para postularse a un puesto en el Royal Observatory de Greenwich. Logró el puesto y comenzó a analizar las fotografías tomadas, en 1900, del asteroide Eros, que había acaparado enormemente el interés del mundo astronómico porque resultaba ser un candidato ideal para las mediciones del paralaje solar.

En 1907, obtuvo el premio Smith Por su ensayo sobre un método estadístico para calcular el paralaje estelar, basado en el desplazamiento aparente de dos estrellas lejanas. El premio obtenido hizo que lo nombraran Fellow del Trinity College.

En diciembre de 1912, George Darwin, uno de los hijos de Charles Darwin, titular de la Cátedra Plumiana de Astronomía y Filosofía Experimental del Trinity College, falleció repentinamente. La cátedra le fue ofrecida a Eddington, quien se hizo cargo de la misma, en 1913.

En 1914, Eddington sucedió a Robert Stawell Ball (1840 – 1913) en la dirección del Cambridge Observatory. Ese mismo año, fue electo Fellow de la Royal Society.

---

\* Exámenes académicos que se tomaba a estudiantes que se preparaban para la graduación.

\*\* La más alta calificación en Matemáticas para no graduados.

Durante la Primera Guerra Mundial, Eddington, cuyos padres eran cuáqueros, se manifestó pacifista y logró que el Trinity College, gestionase para él una actividad pasiva en Cambridge.

Una de las actividades científicas más importantes de Eddington es su contribución a la Teoría General de la relatividad. Su interés en este tema comenzó en 1915, cuando recibió de la Royal Astronomic Society los trabajos de Einstein y de Willem de Sitter. Como astrónomo se interesó en esta teoría porque brindaba una explicación plausible al fenómeno del perihelio de Mercurio. En 1916 dio una conferencia sobre la relatividad en la reunión de la British Association y en 1918, produjo un informe muy completo sobre la relatividad para la Physical Society.

En 1919, Eddington dirigió una expedición hacia dos lugares del planeta, Sobral en el norte de Brasil y la isla Príncipe en el Océano Atlántico frente a Costa de Marfil. Se conocía que en mayo de ese año se produciría un eclipse de Sol y esos dos lugares del planeta se consideraban óptimos para verificar la curvatura de la luz proveniente de una estrella que pasa cerca de la superficie del Sol, ya que la Teoría de la Relatividad afirmaba que la luz se curva al pasar cerca de cuerpos másicos. lo que fue predicho por la teoría de la relatividad. Obviamente, las observaciones de la luz proveniente de una estrella, que pasa por las proximidades de la superficie solar, sólo se puede observar durante un eclipse total. Zarpó de Inglaterra en marzo de 1919 y a mediados de mayo tenía sus instrumentos instalados en la isla Príncipe. La mayor intensidad del eclipse debía ocurrir a las dos de la tarde del 29 de mayo. El clima no acompañó ese día pero igual tomaron fotografías cuyos revelados permitieron calcular las desviaciones de los rayos luminosos, resultados que eran del orden de magnitud de los predichos por Einstein. Esa corroboración de la Teoría de la relatividad fue ampliamente difundida no solo en los ambientes académicos, sino a través de la prensa, logrando que muchos investigadores se dedicaran a investigar otros problemas físico-matemáticos con ayuda de la Relatividad, a la vez que le dio una popularidad notoria a Einstein. Dada la importancia de esta corroboración publicamos el texto del trabajo llevado a cabo por Eddington y sus colaboradores.

La tarea empírica de Eddington y sus conocimientos y conclusiones sobre la relatividad, hicieron que, en 1923, publicase su libro *Mathematical Theory of Relativity*, del cual Einstein opinó: “Es la presentación más fina sobre ese tema, publicada en cualquier idioma.

Eddington no sólo trascendió en la ciencia por sus trabajos sobre la Teoría de la relatividad, sino también por sus estudios sobre la estructura interna de las estrellas. Descubrió la relación entre la masa y la luminosidad de las estrellas y otros trabajos que compendió, en 1926, en el libro *The Internal Constitution of Stars*. Sostuvo que la continua emisión de energía se debería a la aniquilación de materia.

Entre la vasta obra de Eddington se encuentran escritos filosóficos como *The Nature of the Physical World* (1928), *New Pathways of Science* (1935) y *The Philosophy of Physical Science* (1939).

Eddington tenía una fascinación por las constantes fundamentales de la naturaleza y produjo algunas coincidencias numéricas sorprendentes, la mayoría de las cuales se publicaron después de su muerte en el libro *Fundamental Theory* (1946), preparado para su publicación por Edmund Taylor Whittaker.

Eddington fue nombrado caballero en 1930 y recibió la Orden del Mérito en 1938. Recibió muchos honores, incluyendo medallas de oro de la *Astronomical Society of the Pacific* (1923), la *Royal Astronomical Society* (1924), *The National Academy of Washington* (1924), la *Société Astronomique de France* (1928) y la *Royal Society* (1928), *The National Academy of Washington* (1924) Fue miembro de la *Royal Society of Edinburgh*, la *Royal Irish Academy*, la *National Academy of Sciences*, y las *Academias de ciencias de Prusia de Rusia*.

Falleció en 22 de noviembre de 1944.

## 17 – 10.- La contribución de Karl Schwarzschild

Karl Schwarzschild fue un físico y astrónomo alemán que desarrolló algunos aspectos de la Matemática requerida por la teoría de la relatividad y que, eventualmente, lo llevaron a predecir la posibilidad de la existencia de “agujeros negros”.

Nació en Frankfurt am Main, el 9 de octubre de 1873 en el seno de una familia judía acomodada. Su padre, Moses Martin Schwarzschild, (1837 – 1916) fue un financista exitoso, su madre, Henrietta Ottilie Sabel (1852 – 1922) fue una excelente pianista. Karl fue el mayor de los siete hermanos.

Karl asistió a una escuela primaria judía en Frankfurt a los once años, luego ingresó al Gymnasium de esa escuela. Fue en esta etapa cuando se interesó por la astronomía y ahorra su dinero para comprarse materiales con lo que podría construir un telescopio. El padre de Karl era amigo del profesor Theobald Epstein, que era profesor en la Academia Philanthropin y tenía su propio observatorio privado. Su amistad surgió a través de un interés común por la música. El profesor Epstein tenía un hijo, Paul Epstein, — que en la década de 1920 sería Profesor en esa institución, — que era dos años mayor que Karl y ambos entablaron una amistad y compartían interés por la astronomía. Paul le enseñó a Karl a utilizar el telescopio, así como a resolver determinadas ecuaciones matemáticas.



A través de la amistad con Paul Epstein, Karl aprendió a entender y resolver problemas de la mecánica celeste, al punto que, a los dieciséis años, siendo todavía estudiante del Gymnasium escribió sus dos primeros artículos sobre la teoría de las órbitas de las estrellas dobles. Esos artículos fueron publicados en *Astronomische Nachrichten* en 1890.

En 1891, Schwarzschild ingresó a la universidad Kaiser Wilhelm de Estrasburgo donde, hasta 1893, estudió Astronomía práctica. Luego continuó sus estudios en la Universidad Ludwig Maximilian de Munich, bajo la tutela de Hugo von Seeliger. En 1896, obtuvo el doctorado, cuya disertación mereció un “suma cum laude”. El título de la tesis fue “La teoría de Poincaré sobre el equilibrio de un cuerpo fluido homogéneo en rotación”. La tesis fue supervisada por von Seeliger.

Después de obtener su doctorado, Schwarzschild fue nombrado asistente en el Observatorio Von Kuffner en Ottakring, un suburbio de Viena. Asumió su cargo en octubre de 1896 y lo mantuvo hasta junio de 1899. Mientras estuvo en el Observatorio, se ocupó de estudiar las posibles formas de determinar el brillo aparente de las estrellas mediante el uso de placas fotográficas.

En junio de 1899, abandonó el Observatorio Von Kuffner para trabajar como Privatdozent en la Universidad de Munich. Para acceder a ese cargo presentó como *Tesis de habilitación* un trabajo sobre la medición de magnitudes estelares *Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne* \*. Este trabajo le permitió obtener varios descubrimientos importantes. Primero comprobó que las magnitudes fotográficas que él obtenía, diferían de las magnitudes visuales que habían sido tabuladas. Se dio cuenta de que la diferencia se debía a los diferentes colores de las estrellas. Al elegir 367 estrellas para medir desde el Observatorio Von Kuffner, incluyó dos estrellas variables. El rango de cambio de magnitud medido por sus métodos fotográficos era mucho mayor que el rango de cambio de magnitud obtenida visualmente. Dedujo, correctamente, que esto se debía a cambios en la temperatura de la superficie de la estrella que es variable a lo largo de su ciclo.

En una reunión de la Sociedad Astronómica Alemana en Heidelberg en 1900, Schwarzschild analizó la posibilidad de que el espacio fuera no euclidiano. Ese mismo año publicó un artículo en el que establecía un límite inferior para el radio de curvatura del espacio de 2.500 años luz. También estudió la presión de la radiación solar y, partiendo del supuesto de que las colas de los cometas estaban formadas por partículas esféricas que reflejaban bien la luz, calculó el tamaño de las partículas de esas colas. Sabía que la presión de la radiación tenía que superar la gravitación y también sabía que las partículas no dispersaban la luz. Esto le permitió deducir que los diámetros de las partículas debían estar entre 0,07 y 1,5  $\mu\text{m}$ .

---

\* Contribuciones a la fotometría fotográfica de los cuerpos celestes.

Entre 1901 y 1909 fue profesor extraordinario en Göttingen y también director del Observatorio de esa ciudad. En Göttingen colaboró con Felix Klein , David Hilbert y Hermann Minkowski. En 1907 fue ascendido a Profesor Ordinario de Astronomía Teórica.

Durante su estancia en Göttingen, Schwarzschild publicó varios trabajos sobre electrodinámica y óptica geométrica y en el Observatorio de Göttingen llevó a cabo un estudio importante sobre magnitudes estelares, publicando su *Aktinometrie* §, (la primera parte en 1910, la segunda en 1912)

A finales de 1909, Schwarzschild dejó Göttingen para asumir el cargo de director del Observatorio Astrofísico de Potsdam. Este era el puesto de mayor prestigio para un astrónomo en Alemania. Allí tuvo la oportunidad de estudiar fotografías del regreso del cometa Halley en 1910 que fueron tomadas en Tenerife por una expedición de astrónomos de Potsdam.

En 1913, Schwarzschild fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín

Al estallar la guerra el 1º de agosto de 1914, Schwarzschild se ofreció como voluntario para el servicio militar. Sirvió en Bélgica, donde lo pusieron a cargo de una estación meteorológica, en Francia, donde lo asignaron a una unidad de artillería y le dieron la tarea de calcular las trayectorias de los misiles, y luego en Rusia.

Estando en Rusia, escribió dos artículos sobre la teoría de la relatividad y uno sobre la teoría cuántica. El artículo sobre teoría cuántica explicaba que el efecto Stark, la división de las líneas espectrales del hidrógeno por un campo eléctrico (siendo la cantidad proporcional a la intensidad del campo), podía demostrarse a partir de los postulados de la teoría cuántica. Esto lo demostró de forma independiente y casi al mismo tiempo, su amigo Paul Epstein. Los artículos de Schwarzschild sobre la relatividad dan la primera solución exacta de las ecuaciones gravitacionales generales de Einstein, — quien las había resuelto en forma aproximada — lo que permite comprender la geometría del espacio cerca de una masa puntual. El primer artículo se lo envió a Einstein, quien respondió: “*No esperaba que se pudiera formular la solución exacta del problema de una manera tan sencilla.*” Estos artículos derivaban en la posibilidad de que la luz al pasar a cierta distancia‡ de un cuerpo de masa apropiada en vez de desviarse fuese absorbida por ese cuerpo por lo que no podría ser vista. Tal zona del espacio donde la luz es absorbida por un campo gravitatorio sería bautizada como “cuerpo negro”. Sin embargo, el propio Schwarzschild dejó en claro que creía que la solución teórica no tiene sentido físicamente.

Mientras estaba en Rusia, contrajo una enfermedad llamada *pénfigo*, que es una rara anomalía autoinmune que forma ampollas en la piel que afectan al sistema inmunológico. En las personas con

---

§ Aktinometrie der Sterne der B. D. bis zur Grösse 7,5 in der Zone 0° bis + 20° Deklination.

‡ Lo que se conoce como “horizonte de eventos”.

esta enfermedad, el sistema inmunológico confunde las células de la piel como extrañas y las ataca provocando ampollas dolorosas. En la época de Schwarzschild no se conocía ningún tratamiento y, en marzo de 1916, fue enviado a su domicilio, donde falleció el 11 de mayo de ese año.

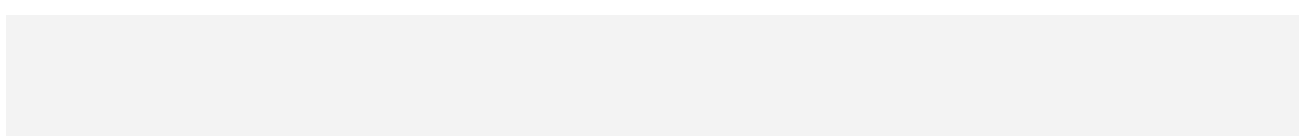
En cuanto a su vida familiar, Schwarzschild se casó con Else Posenbach, hija de un profesor de cirugía en Göttingen, el 22 de octubre de 1909. Tuvieron tres hijos, Agathe, Martin y Alfred. Martín, que nació el 31 de mayo de 1912, llegó a ser profesor de astronomía en Princeton.

---

Schwarzschild fue elegido miembro de la Sociedad Científica de Göttingen en 1905, de la Real Sociedad Astronómica de Londres el 11 de junio de 1909 y de la Academia Alemana de Ciencias en 1913. También recibió honores póstumos, en particular, un observatorio fundado en 1960 en Tautenburg como instituto afiliado a la Academia Alemana de Ciencias y que lleva su nombre. La dedicatoria lo describió como: *“el mayor astrónomo alemán de los últimos cien años.”*

Después de la reunificación de Alemania, el Instituto fue refundado en 1992 y pasó a llamarse "Thüringer Landessternwarte 'Karl Schwarzschild' Tautenburg". La Sociedad Astronómica Alemana creó en 1959 una cátedra especial en su honor y una medalla Karl Schwarzschild. El primer destinatario fue Martin Schwarzschild, su hijo.

---







## ANEXO A

### **Ondas electromagnéticas, propagación del potencial y los efectos electromagnéticos de una carga en movimiento.**

**Por Oliver Heaviside**

#### **PARTE 1**

En relación con las cartas de los Profesores Poynting y Lodge, publicadas en *The Electrician*, del 2 de noviembre de 1888, creo que el siguiente extracto de una carta de Sir William Thomson (la que tengo permiso para publicar) será de interés [ver *Postscript*, p. 483, vol. II., para dilucidar]:

"No estoy de acuerdo con que la velocidad de propagación del potencial eléctrico sea una cuestión meramente metafísica. Para fijar las ideas, por favor, considere un globo electrificado,  $A$ , que se mueve de un lado a otro, con movimiento armónico simple. Considere la posibilidad de acción muy rápida de dos electros copios  $B, B'$ , que se encuentran a diferentes distancias de  $A$ . Si las indicaciones de  $B, B'$  estuvieran exactamente en la misma fase, aunque se cambiaran sus lugares, la velocidad de propagación del potencial eléctrico sería infinita, pero si mostraran diferencias de fase, demostrarían que hay una velocidad finita de propagación del potencial eléctrico.

"Tampoco podemos considerar metafísica a la velocidad de propagación del "potencial vectorial". De hecho, es simplemente la velocidad de propagación de la fuerza electromagnética, la velocidad de las ondas electromagnéticas".

Tomando en primer lugar el segundo punto, creo que está claro que, si por propagación de vector de potencial ha de entenderse la de perturbaciones eléctricas y magnéticas, lo que está en cuestión es simplemente el modo de expresión. Yo mismo estoy acostumbrado a representar mentalmente las fuerzas o flujos eléctricos y magnéticos, y su propagación, que ocurren, más o menos, a la velocidad de la luz, porque dan la representación más directa del estado del medio, que, creo, debe ser acordado es el sujeto físico real de la propagación. Pero si consideramos directamente el potencial vectorial, entonces solo podemos llegar al estado del medio mediante operaciones complejas, y realmente necesitamos conocer el potencial vectorial tanto en función de la posición como del tiempo; para su variación espacial, tiene que proporcionar la fuerza magnética, y para su variación en el tiempo, la fuerza eléctrica; además de lo cual, a veces hay que considerar también la variación espacial de un potencial escalar, antes de que podamos decir qué es la fuerza eléctrica. Además de este rodeo, debemos tener un conocimiento de la solución completa, y si no la poseemos, es mucho más simple pensar en que se propagan perturbaciones eléctricas y magnéticas, y encuentro que este método funciona mucho mejor en la solución de problemas.

Creo que encontrará que la otra pregunta es, en última instancia, precisamente de la misma naturaleza. Comience con la esfera  $A$  en reposo y el campo constante y considere dos puntos externos,  $P$  y  $P'$ , a diferentes distancias. La fuerza eléctrica en ellos tiene diferentes valores, y todo el campo tiene un potencial. Pero ahora dele a la esfera un desplazamiento y llévela a descansar nuevamente en una nueva posición. ¿El reajuste de potencial es instantáneo? Debería estimar que, ciertamente, no y describir así lo que sucede: cuando la esfera se mueve, la fuerza magnética se genera en su límite (líneas circulares de latitud, si el eje es la línea de movimiento), y con ella hay necesariamente una perturbación de la fuerza eléctrica. Las dos juntas forman una onda electromagnética, que sale de la esfera a la velocidad de la luz, y en el frente de la onda tenemos  $E = \mu v H$ , donde  $E$  es la intensidad de la fuerza eléctrica y  $H$  la magnética. Antes de que el frente alcance  $P$  o  $P'$ , tenemos el campo eléctrico representado por la función potencial, pero después de eso no puede representarse así hasta que la fuerza magnética haya desaparecido por completo, cuando nuevamente tenemos un campo estable representable por una función potencial. Es difícil establecer cómo diferenciar claramente cualquier propagación de potencial *per se*.

Si el movimiento es armónico simple, hay un tren de ondas hacia afuera y no hay potencial. Me imagino que un electroscopio, si fuera infinitamente sensible y sin reacciones, registraría el estado real del campo eléctrico, independientemente de su estabilidad. Como esto es una cuestión puramente teórica, considero el electroscopio más simple, una carga muy pequeña en un punto; o, digamos, la unidad de carga, la fuerza sobre la cual actúa es la fuerza eléctrica del campo.

Cuando estas cosas se examinan de cerca, si los hechos en cuanto a la propagación de las perturbaciones (eléctricas y magnéticas) están de acuerdo, el único tema en cuestión es cual es el mejor modo de expresarlas, que creo debe expresarse en términos de las fuerzas y no de los potenciales.

Pero, a veces, parece que hay una velocidad infinita de propagación del potencial; sin embargo, al examinarlo, se descubre que no es más que una ficción matemática, y que nada más se propaga a velocidad infinita.

Se entenderá que predico la doctrina de acuerdo con mi interpretación de la teoría de Maxwell, y que cualquier modificación que pueda recibir su teoría del dieléctrico puede implicar un nuevo tipo de propagación que actualmente no está en cuestión.

5 de noviembre de 1888.

## Parte II.

La pregunta planteada por el Prof. S. P. Thompson (en *The Electrician*, del 16 de noviembre de 1888, p. 54) en cuanto a si el movimiento de un dieléctrico sin carga a través de un campo de fuerzas

eléctricas produce efectos magnéticos, creo que debe ser respondida indudablemente con la afirmativa. A medida que varía la distribución del desplazamiento, su variación en el tiempo es la corriente eléctrica, con una fuerza magnética determinable para igualar. Cuando la velocidad del movimiento es una pequeña fracción de la de la luz, podemos considerar que el desplazamiento tiene en todo momento su distribución constante adecuada, de modo que no hay dificultad en estimar los efectos magnéticos, excepto las que podrían deberse a un mero carácter matemático. Por ejemplo, el caso de una esfera que se mueve en un campo que sería uniforme si la esfera estuviera ausente, puede resolverse fácilmente y sirve perfectamente para ilustrar la naturaleza general de la acción.

Pero si el dieléctrico en movimiento tiene la misma permitividad eléctrica que el medio que lo rodea, de modo que no haya diferencias en la distribución constante, la cuestión que puede plantearse ahora en cuanto a la posible producción de perturbaciones transitorias es una que la teoría anterior no responde ni presenta ninguna respuesta inmediata. Creo que el cuerpo se magnetizará transversalmente al desplazamiento eléctrico y a la velocidad.

Otra cuestión, un tanto relacionada, está contenida en la sugerencia del Prof. Poynting (en carta al Prof. Lodge, *The Electrician*, p. 829, vol. XXI.) de que el desplazamiento eléctrico posiblemente podría producirse sin fuerza magnética por la acción de la piroelectricidad. Pero, cualquiera que sea la agencia, creo que sería un hecho nuevo, completamente fuera de la teoría de Maxwell formalmente desarrollada. Podríamos tener una disminución del desplazamiento eléctrico sin la intervención de una fuerza magnética; pero no veo ninguna manera de producirla.

Pero el tema principal de esta comunicación es el efecto electromagnético de una carga en movimiento. Que una carga en movimiento es equivalente a un elemento de corriente eléctrica es indudable, y llamarlo corriente de convección, como lo hace el Prof. S. P. Thompson, parece razonable. La corriente verdadera tiene tres componentes, por lo tanto,

$$\text{curl} \mathbf{H} = 4\pi(\mathbf{C} + \dot{\mathbf{D}} + \rho \mathbf{u})$$

donde H es la fuerza magnética, C la corriente de conducción, D el desplazamiento y  $\rho$  la densidad de volumen de la electrificación que se mueve con velocidad u. La adición del término  $\rho \mathbf{u}$  es, supongo, la extensión hecha por el Prof. Fitzgerald a la que se refiere el Prof. S. P. Thompson. En cualquier caso, en este momento no veo otro.

Hay varias formas de llegar a la conclusión de que una carga en movimiento debe considerarse como una corriente eléctrica; pero, cuando eso se admite, estamos muy lejos de saber cuál es su efecto magnético. No se puede hacer una afirmación corta y seca de ella, porque varía según las circunstancias. El campo magnético, cualquiera que sea en un caso dado, no es el de un elemento de corriente (suponiendo que la carga sea puntual), porque eso es anti-maxwelliano, sino el del sistema de corriente eléctrica real, que es variable

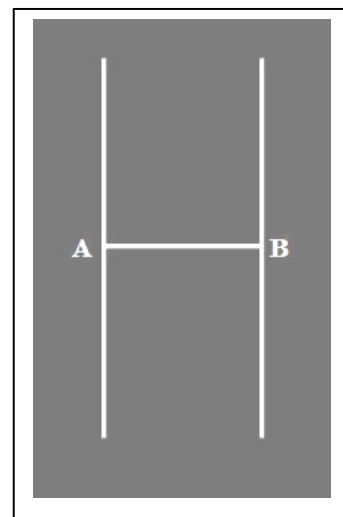
Así, en el caso de movimiento a una velocidad que sea una pequeña fracción de la de la luz, el campo magnético (tal como lo encontró el Prof. J. J. Thomson) es el mismo que el del elemento de corriente de Ampère representado por  $\rho \mathbf{u}$ ; es decir, un elemento de corriente cuya dirección es la de  $\mathbf{u}$  y cuyo momento es  $\rho \mathbf{u}$ , si  $\mathbf{u}$  es el tensor de  $\mathbf{u}$  (entendido por "momento", densidad de corriente  $\times$  volumen); pero la verdadera corriente a corresponder guarda la misma relación con el elemento de corriente que la inducción de un imán elemental guarda con su momento magnético. La energía magnética debida al movimiento de una carga  $q$  sobre una esfera de radio  $a$  en un medio de inductividad  $\mu$ , a una velocidad  $u$  que es sólo una fracción muy pequeña de la de la luz, es  $\frac{1}{3}mq^2u^2/a$ . Pero si la velocidad no es una pequeña fracción de la de la luz, el resultado es muy diferente. El aumento de la velocidad de la carga provoca no sólo una mayor fuerza magnética, sino que cambia por completo su distribución y, con ella, la del campo eléctrico. No sirve de nada discutir el potencial. No hay un único potencial. El campo magnético tiende a concentrarse hacia el plano ecuatorial, o plano a través de la carga perpendicular a la línea del movimiento. Cuando la velocidad es igual a la de la luz, este proceso se completa y es simplemente una onda plana (electromagnética).

Como una carga en un punto da infinitos valores, es más conveniente distribuirla. Sea, primero, de densidad lineal  $q$  a lo largo de una línea recta AB, moviéndose en su propia línea a la velocidad de la luz. Entonces el campo está contenido entre los planos paralelos a través de A y B perpendiculares a AB, y está completamente dado por

$$E/\mu v = H = 2qu/r$$

donde  $E$  y  $H$  son las intensidades de las fuerzas eléctricas y magnéticas a la distancia  $r$  de AB. Las líneas de  $E$  irradian uniformemente desde AB en todas las direcciones paralelas a los planos; las de  $H$  son en todas partes perpendiculares a las de  $E$ , o son círculos centrados en AB. Fuera de esta onda electromagnética no hay perturbación. Debo señalar que lo anterior es una descripción de la solución exacta. Por supuesto, no se parece en nada al supuesto campo de un elemento de corriente AB.

Para una mejor comprensión, podemos sustituir una distribución cilíndrica por una lineal y luego, nuevamente, terminar las líneas de  $E$  en otra superficie cilíndrica entre los planos delimitadores. Para encontrar las distribuciones resultantes de  $E$  y  $H$  (siempre perpendiculares) se puede hacer por superposición de las soluciones elementales, o resolviendo un problema bidimensional de forma conocida.



Quienes estén familiarizados con mis artículos en esta revista reconocerán que a lo que hemos llegado es simplemente a la onda del plano elemental que viaja a lo largo de un circuito sin distorsión. ¡Todos los caminos conducen a Roma!

Volviendo al caso de una carga  $q$  en un punto que se mueve a través de un dieléctrico, si la velocidad del movimiento excede la de la luz, las perturbaciones quedan completamente atrás de la carga y quedan confinadas dentro de un cono,  $AqB$ . La carga está en el ápice, moviéndose de izquierda a derecha a lo largo de  $Cq$ . El semiángulo,  $\theta$ , del cono, o el ángulo  $AqC$ , viene dado por,

$$\sin \theta = v/u$$



donde  $v$  es la velocidad de la luz y  $u$  la de la carga. Las líneas magnéticas son círculos alrededor del eje o línea de movimiento. El desplazamiento se aleja de  $q$ , pero no se distribuye uniformemente dentro del cono. La corriente eléctrica se dirige hacia  $q$  en la parte interior del cono y se aleja de  $q$  en la parte exterior.

Se verá que la tensión eléctrica tiende a hacer retroceder la carga. Por lo tanto, se requiere una fuerza aplicada sobre  $q$  en la dirección  $Cq$  para mantener el movimiento. Su actividad se explica por la adición continua, a un ritmo uniforme, que se realiza a las energías eléctricas y magnéticas en  $q$ . El movimiento en el frente de onda, en cualquier punto de  $Aq$  o  $Bq$ , es perpendicularmente hacia afuera, no hacia  $q$ . Mientras el cono se expande por todas partes, el movimiento hacia adelante de  $q$  renueva continuamente el vértice y mantiene su forma sin cambios.

Se supone que el movimiento es solamente estacionario.

Para evitar malentendidos, debo señalar que esto no es, de ninguna manera, una descripción de lo que sucedería si una carga fuera impulsada a moverse a través del éter a una velocidad varias veces superior a la de la luz, de lo cual no sé nada; sino una descripción de lo que sucedería si la teoría del dieléctrico de Maxwell se mantuviera verdadera bajo las circunstancias mencionadas, y si no la he malinterpretado. [Ver nota al pie en la p. 516, más adelante.]

18 de noviembre de 1888.

### PARTE III

Todas las perturbaciones se propagan a través del éter dieléctrico a la velocidad de la luz. Por lo tanto, cuando una carga está en movimiento a través del medio, la discusión de los efectos producidos naturalmente implica la consideración de tres casos, aquellos en los que la velocidad  $u$  de la carga es menor, igual o mayor que  $v$ , la de la luz.

En una comunicación anterior [Parte II, más arriba], di la solución completa y muy simple del caso intermedio de igualdad de velocidades. No es necesaria una demostración formal, ya que el cumplimiento de las condiciones necesarias puede probarse inmediatamente.

Entonces, yo no sabía que el caso  $u < v$  admitía ser presentado de una forma casi igualmente simple. Que ese sea el hecho es bastante sorprendente, porque es muy excepcional llegar a resultados simples, y los que ahora se discuten están lo suficientemente libres de complejidad para ocupar un lugar en los libros de texto de electricidad.

Sea el eje  $z$  la línea de movimiento de la carga  $q$  a la velocidad  $u$ . Todo es simétrico con respecto a este eje. Las líneas de fuerza eléctrica son radiales hacia fuera de la carga.

Las líneas de fuerza magnética son círculos alrededor del eje. Las dos fuerzas son perpendiculares entre sí. Fijadas así las direcciones, sólo queda precisar sus intensidades en cualquier punto  $P$  distante  $r$  de la carga, cuando la recta  $r$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje. Sea  $E$  la intensidad de la fuerza eléctrica y  $H$  la magnética. Entonces, si  $c$  es la permitividad y  $\mu$  la inductividad, tal que  $\mu c v^2 = 1$ , tenemos

$$(u < v) \left\{ \begin{array}{l} cE = \frac{q}{r^2} \left( 1 - \frac{u^2}{v^2} \right) \\ H = cEu \sin \theta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A)} \\ \text{(B)} \end{array}$$

Se puede probar que (A), (B) representan la solución completa sometidos a las pruebas apropiadas. Suponiendo que todo el sistema está en movimiento constante a una velocidad  $u$ , se deben satisfacer las dos leyes fundamentales del electromagnetismo:

(1). (Ley de Faraday). La fuerza electromotriz del campo [o voltaje] en cualquier circuito es igual a la tasa de disminución de la inducción a través del circuito (o la corriente magnética  $\times -4\pi$ ).

(2). (Ley de Maxwell). La fuerza magnetomotriz del campo [o gaussage] en cualquier circuito es igual a la corriente eléctrica  $\times 4\pi$  a través del circuito.

Además de estos, hay continuidad del desplazamiento a ser atendido. De este modo:

(3). (Maxwell). El desplazamiento hacia afuera a través de cualquier superficie es igual a la carga encerrada.

Dado que (A) y (B) satisfacen estas pruebas, son correctas. Y dado que no hay irrealidades involucradas, no hay lugar para malas interpretaciones.

Cuando  $u/v$  es muy pequeño, tenemos, aproximadamente,

$$cE = \frac{q}{r^2}, \quad H = \frac{qu}{r^2} \sin\theta$$

que representan la solución del Prof. J. J. Thomson, o sea, las líneas de desplazamiento irradian uniformemente desde la carga, y la fuerza magnética es la de las correspondientes corrientes de desplazamiento junto con la carga en movimiento considerada como un elemento de corriente de momento  $qu$ . Se trata de una acción instantánea a través del medio y hace que la solución sea completamente correcta.

Que las líneas de fuerza eléctrica permanezcan rectas a medida que aumenta la velocidad de la carga es, en sí mismo, un resultado bastante notable. Examinando (A), vemos que el efecto de aumentar  $u$  es concentrar el desplazamiento sobre el plano ecuatorial. La autoinducción lo hace. En el límite, cuando  $u = v$ , el numerador se anula, haciendo que  $E = 0$ ,  $H = 0$  en todas partes excepto en el plano mencionado, donde, debido a que el denominador se hace infinitamente pequeño en comparación con el numerador, el desplazamiento se concentra todo en una lámina, y con él la inducción, formando una onda electromagnética plana, como describí (y se comprueba) en mi comunicación anterior.

Si el campo descrito en (A) y (B) en vez de continuar hasta la carga  $q$ , termina en una superficie esférica de radio  $a$ , tenemos el caso de una esfera perfectamente conductora de radio  $a$  que posee una carga total  $q$ , moviéndose constantemente a una velocidad  $u$  a través del éter dieléctrico. A medida que la velocidad aumenta a  $v$ , la carga se acumula en el ecuador de la esfera. [Ver nota al pie en la p. 514, más adelante.]

Esto nos lleva al tercer caso de  $u > v$ , y, hasta ahora, no he podido encontrar ninguna solución que satisfaga todas las condiciones necesarias. La descripción al final de la Parte II. por lo tanto, debe recibirse como una sugerencia, actualmente sin confirmar. Espero considerar el asunto en una futura comunicación.

P.D.: en un número reciente, el Sr. W. P. Granville planteó la cuestión de que la acción a través de un medio es solo una acción a corta distancia en lugar de una larga, y pidió instrucción. Su consulta no ha obtenido respuesta. Esto no es, sin embargo, porque no hay nada que decir al respecto. El asunto no escapó a la atención de la "era en contra de las acciones la distancia". Mi propia opinión es que la cuestión en discusión es, si no metafísica, peligrosamente cercana a serlo; en consecuencia, se le podrían dedicar libros enteros. En la actualidad, sin embargo, creo que es más útil tratar de averiguar qué sucede y construir un medio para que suceda  $u > v$ . Después de eso, tal vez, el asunto a que se refiere pueda ser discutido más ventajosamente. El pozo de la verdad no tiene fondo.



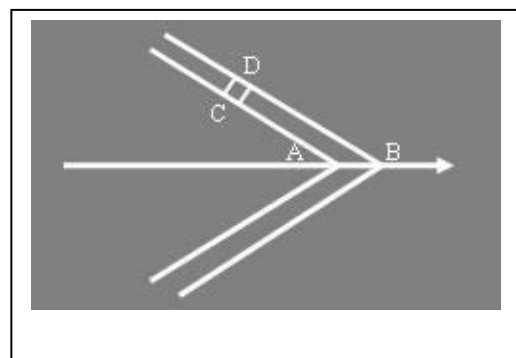
#### PARTE IV.

En comunicaciones anteriores he discutido este asunto. Refiriéndome al caso del movimiento rectilíneo uniforme, describí un posible resultado cuando la velocidad de la carga excede a la de la luz, obtenido principalmente por razonamiento general, y expliqué mi incapacidad para encontrar una solución para representarlo. El desplazamiento no puede ser fuera de cierto cono de ángulo semi-vertical cuyo seno es igual a la relación  $v/u$  de la velocidad de la luz a la de la carga, que está uniforme en el vértice.

En el *Phil. Mag.* de julio de 1889, el Prof. J. J. Thomson ha examinado esta cuestión. Al igual que yo, no logró encontrar una solución dentro del cono; pero concluyó que el desplazamiento se limita a su superficie. Si es así, debería formar, junto con la inducción magnética, una onda electromagnética. Pero se puede ver fácilmente que tal onda es imposible de producir, ya que carecería de estabilidad.

Porque a medida que la carga se mueve de A hacia B, un elemento de superficie C, se moverá hacia D. Al hacerlo, su área variará directamente con su distancia desde el vértice, y la energía en el elemento variará, por lo tanto, inversamente con su distancia desde el vértice, y las fuerzas, eléctricas y magnéticas, variarían por lo tanto inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde el vértice, en lugar de inversamente proporcional a la distancia, lo que obviamente es necesario para que el desplazamiento se limite a la superficie. Este conflicto de condiciones es lo que le confiere inestabilidad. En el *Phil. Mag.* de abril de 1889, sugerí que, si bien debe haber una solución de algún tipo, una que represente un estado estacionario, era imposible. Esta conclusión se ve confirmada por el fracaso de la onda de superficie propuesta por el Prof. Thomson.

El profesor Thomson, que por lo demás confirmó mis resultados, también ha ampliado el asunto suponiendo que el medio mismo se pone en movimiento, así como la electrificación. Esto está un poco más allá de mis posibilidades de opinar. Todavía no sé con certeza si el éter puede moverse, o cuáles son sus leyes de movimiento, si es que puede hacerlo. Fresnel pensó que la tierra podía moverse a través del éter sin perturbarlo; Stokes, que llevó consigo el éter, dándole un movimiento irrotacional. Quizá la verdad esté entre los dos. Luego está la posibilidad de agujeros en el éter, como sugirió un filósofo alemán. Cuando nos metemos en uno de estos agujeros, salimos de la existencia. Es una idea espléndida, pero falta mucha evidencia experimental.



Pero si consideramos que el medio que soporta los flujos eléctrico y magnético se pone realmente en movimiento cuando un cuerpo se mueve, y suponemos un tipo particular de movimiento, sería,

ciertamente, una pregunta científica interesante preguntar qué influencia ejerce el movimiento sobre los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, no creo que la respuesta involucre nuevos principios.

Las relaciones generales de  $E$  y  $H$ , referidas a espacio fijo sin conductividad, son

$$\text{rot} (\mathbf{e} - \mathbf{E}) = \mu p \mathbf{H} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{rot} (\mathbf{H} - \mathbf{h}) = c p \mathbf{E} \dots\dots\dots (2)$$

donde  $p$  representa  $d/dt$  y  $e$  y  $h$  son las partes involucradas de  $E$  y  $H$ . Si también hay movimiento de electrificación, debemos considerar que constituye una corriente de convección, una parte de la corriente verdadera, y así convertir (2) en

$$\text{rot} (\mathbf{H} - \mathbf{h}) = c p \mathbf{E} + 4\pi \rho \mathbf{u} \dots\dots\dots (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad de electrificación, cuya velocidad es  $\mathbf{u}$ . [Ver Parte II.] Ahora resta especificar  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ . Son cero cuando el medio que soporta los flujos está en reposo. Pero si se mueve, y su velocidad es  $\mathbf{w}$ , existe, primero, la fuerza eléctrica debida al movimiento en un campo magnético,

$$\mathbf{e} = \mu \mathbf{V} \mathbf{w} \mathbf{H}, \dots\dots\dots (4)$$

que es bien conocido; y luego la fuerza magnética debida al movimiento en un campo eléctrico,

$$\mathbf{h} = c \mathbf{V} \mathbf{E} \mathbf{w} \dots\dots\dots (5)$$

que no es tan conocido. (Dado por mí en la tercera sección de "Inducción electromagnética y su propagación", *The Electrician*, 24 de enero de 1885 [vol. I., p.446]; nuevamente, obtenido de una manera diferente en la Sección XXII, 15 de enero de 1886 [vol. I., p. 546], ver también *Phil. Mag.*, agosto de 1886 [vol. II., Art. L.], y un ejemplo del uso de (4) y (5) en *The Electrician*, 12 de abril de 1889, página 683 [vol. II., Art. LI].)

La fuerza mecánica llamada por Maxwell "fuerza electromagnética" es  $\mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{C}$  es la corriente verdadera y  $\mathbf{B}$  la inducción. Es la fuerza sobre la materia que soporta la corriente eléctrica. Si  $\mathbf{w}$  es su velocidad, la actividad de la fuerza es

$$\mathbf{w} \mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{B} = \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{B} \mathbf{w} = - \mathbf{e} \mathbf{C} \dots\dots\dots (6)$$

Del mismo modo, tal como obtuve en la Sección XXII, existe una fuerza mecánica (la magneto-eléctrica) sobre la materia que soporta la corriente magnética  $\mathbf{G} = \mu p \mathbf{H} / 4\pi$ , expresada por  $4\pi \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{G}$ , y su actividad es

$$4\pi \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{G} = 4\pi \mathbf{G} \mathbf{V} \mathbf{w} \mathbf{D} = - \mathbf{h} \mathbf{G} \dots\dots\dots (7)$$

Por supuesto,  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  se cuentan como fuerzas involucradas, lo cual es la razón del cambio de signo. Sus actividades son  $\mathbf{eC}$  y  $\mathbf{hG}$ .

Debe señalarse, además, que las expresiones anteriores para  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  no son seguras. Porque he demostrado que las fuentes de todas las perturbaciones son las líneas rotacionales de las fuerzas involucradas (*Phil. Mag.*, dic., 1887) [vol. II., pág. 362], y que los flujos producidos dependen únicamente de los rotores de  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ , tanto en lo que respecta a los flujos constantes como a los variables que conducen a ellos. Por lo tanto, podemos usar cualquier otra expresión para  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  que tenga los mismos rotores que la anterior. Y, de hecho, vemos que las ecuaciones (1) y (2) solo contienen sus rotaciones. Las ecuaciones (1) y (3), con  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  definidas por (4) y (5), nos permiten determinar el efecto del medio en movimiento. El Prof. Thomson también llega a (4) y (5), y a la "fuerza magnetoeléctrica", en su artículo al que me he referido, por un método completamente diferente. Y para mostrar lo bien que encajan las cosas, concluye, a partir de la consideración del medio en movimiento, que una superficie electrificada en movimiento es una lámina de corriente, que es otra forma de decir que una corriente de convección es parte de la corriente verdadera, como expresado en (3). Sin embargo, debo estar en desacuerdo con la suposición del Prof. Thomson de que el movimiento debe ser irrotacional. Parecería, por lo anterior, que esta limitación es innecesaria.

Como ejemplo, y para introducir un nuevo punto, tomemos el caso de una carga  $q$  que se mueve con velocidad  $u$  a lo largo del eje de las  $z$ . Ocurrirá lo mismo si mantenemos la carga en reposo y movemos el medio en sentido contrario al de la velocidad de la carga. Luego usamos las ecuaciones (1) y (2), y en ellas usamos (4) y (5) con  $\mathbf{w} = -\mathbf{u}$ . Ahora, cuando se llega al estado estacionario, tenemos  $p = 0$ , por lo que (1) y (2) se convierten en

$$\text{rot}(\mathbf{mVHu} - \mathbf{E}) = \mathbf{0} \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H} - c\mathbf{VuE}) = \mathbf{0} \dots\dots\dots (9)$$

Además, la divergencia de  $\mathbf{D}$  debe ser  $q$  en el origen y la divergencia de  $\mathbf{B}$  debe ser cero. Este último da, aplicado a la (9),

$$\mathbf{H} - c\mathbf{VuE}, \dots\dots\dots(10)$$

lo que da el valor de  $\mathbf{H}$  completamente en términos de  $\mathbf{E}$ . Eliminando  $\mathbf{H}$  de la (8) mediante la (10), se obtiene

$$\text{rot}(\mathbf{mcVuVEu} - \mathbf{E}) = \mathbf{0} \dots\dots\dots(11)$$

$$\text{curl} \left[ \frac{u^2}{v^2} (\mathbf{E} - E_3 \mathbf{k}) \mathbf{E} \right] = \mathbf{0} \dots\dots\dots(12)$$

$$E_1 = -\frac{dP}{dx} \quad E_2 = -\frac{dP}{dy}, \quad E_3 = -\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) \frac{dP}{dz} \quad \dots \quad (13)$$

donde  $P$  es un potencial escalar. Aquí se observa un nuevo punto. Hay un potencial, de un tipo peculiar. El desplazamiento debido a la carga en movimiento se distribuye precisamente de la misma manera que si estuviera en reposo en un medio eolotrópico, cuya permitividad es  $c$  en todas las direcciones transversales a la línea de movimiento, pero es menor, a saber,  $c(1 - u^2/v^2)$ , a lo largo de esa línea y paralelas a ella. El potencial  $P$  está dado por

$$P = \frac{q}{c \left[ (x^2 + y^2) \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots \quad (14)$$

$$P = \frac{q}{(c_1 c_2 c_3) \left[ \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots \quad (15)$$

Obsérvese que si bien la fuerza eléctrica en el problema sustituido de una carga en reposo en un medio eolotrópico es la pendiente de un potencial; ello no es así cuando el medio es isotrópico y se mueve más allá de la carga fija, o viceversa, aunque las distribuciones de desplazamiento sean las mismas.

Cuando  $u = v$ , eliminamos la permitividad a lo largo del eje  $z$  en el caso sustituido, de modo que el desplazamiento debe ser totalmente transversal. Entonces tenemos una onda electromagnética plana. Pero cuando  $u$  es mayor que  $v$ , la permitividad se vuelve negativa a lo largo de  $z$ ; éste es un problema eléctrico imposible, y proporciona una razón más para suponer que no puede existir un estado estacionario en el problema electromagnético correspondiente.

Ahora queda por encontrar qué sucedería si la electrificación se transmitiera a través de un medio más rápido que la velocidad natural de propagación de las perturbaciones. El cono va a estar, pero ¿qué sucede dentro de él?

25 de agosto de 1889.



## ANEXO B.

### LOS TRABAJOS DE HERTZ QUE LE DIERON RESPALDO EMPÍRICO A LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE MAXWELL

(Traducido, en 1894, al inglés de: Hertz, H. R., *Untersuchungen über die Ausbreitung der Elektrischen Kraft*, 1893)

## II

### ON VERY RAPID ELECTRIC OSCILLATIONS

(*Wiedemann's Annalen*, 81, p. 421, 1887.)

THE electric oscillations of open induction-coils have a period of vibration which is measured by ten-thousandths of a second. The vibrations in the oscillatory discharges of Leyden jars, such as were observed by Feddersen,<sup>13</sup> follow each other about a hundred times as rapidly. Theory admits the possibility of oscillations even more rapid than these in open wire circuits of good conductivity, provided that the ends are not loaded with large capacities; but at the same time theory does not enable us to decide whether such oscillations can be actually excited on such a scale as to admit of their being observed. Certain phenomena led me to expect that oscillations of the latter kind do really occur under certain conditions, and that they are of such strength as to allow of their effects being observed. Further experiments confirmed my expectation, and I propose to give here, an account of the experiments made and the phenomena observed.

The oscillations which are here dealt with are about a hundred times as rapid as those observed by Feddersen. Their period of oscillation —estimated, it is true, only by the aid of theory—is of the order of a hundred-millionth of a second. Hence, according to their period, these oscillations range themselves in a position intermediate between the acoustic oscillations of ponderable bodies and the light-oscillations of the ether. In this, and in the possibility that a closer observation (p. 30) of them may be of service in the theory of electrodynamics, lies the interest which they present.

#### *Preliminary Experiments*

If, in addition to the ordinary spark-gap of an induction coil, there be introduced in its discharging circuit a Riess's spark-micrometer, the poles of which are joined by a long metallic shunt, the

---

<sup>13</sup> For the literature see Colley, *Wieil, Ann.* 96, p. 482, 1885. (See also Note 1 at the end of this book.)

discharge follows the path across the air-gap of the micrometer in preference to the path along the metallic conductor, so long as the length of the air-gap does not exceed a certain limit. This is already known, and the construction of lightning-protectors for telegraph-lines is based on this experimental fact. It might be expected that, if the metallic shunt were only made short and of low resistance, the sparks in the micrometer would then disappear. As a matter of fact, the length of the sparks obtained does diminish with the length of the shunt, but the sparks can scarcely be made to disappear entirely under any circumstances. Even when the two knobs of the micrometer are connected by a few centimetres of thick copper wire sparks can still be observed, although they are exceedingly short.

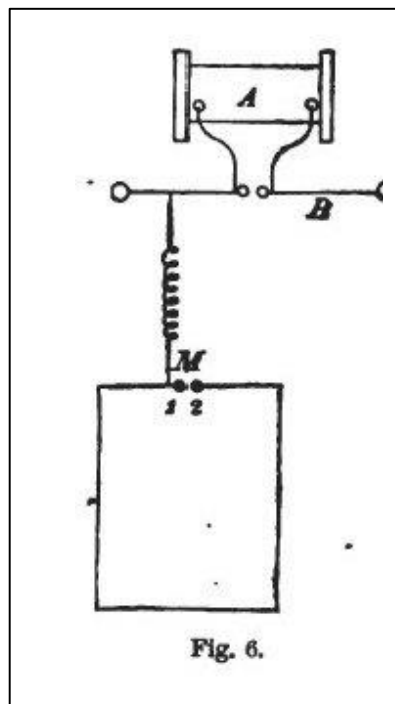
This experiment shows directly that at the instant when the discharge occurs the potential along the circuit must vary in value by hundreds of volts even in a few centimetres; indirectly it proves with what extraordinary rapidity the discharge takes place: For the difference of potential between the knobs of the micrometer can only be regarded as an effect of self-induction in the metallic shunt. The time in which the potential of one of the knobs is appreciably changed is of the same order as the time in which such a change is transmitted to the other knob through a short length of a good conductor. The potential difference between the micrometer-knobs might indeed be supposed to be determined by the resistance of the shunt, the current-density during the discharge being possibly large. But a closer examination of the quantitative relations shows that this supposition is inadmissible; and the following experiment shows independently that this conjecture cannot be put forward.

We again connect the knobs of the micrometer by a good metallic conductor, say by a copper wire 2 mm. in (p. 31) diameter and 0.5 metre long, bent into rectangular form; we do not, however, introduce this into the discharging-circuit of the induction-coil, but we simply place one pole of it in communication with any point of the discharging circuit by means of a connecting wire. (Fig. 6 shows the arrangement of the apparatus; *A* represents diagrammatically the induction-coil, *B* the discharger, and *M* the micrometer.) Thereupon we again observe, while the induction-coil is working, a stream of sparks in the micrometer which may, under suitable conditions, attain a length of several millimetres. Now this experiment shows, in the first place, that at the instant when the discharge takes place violent electrical disturbances occur, not only in the actual discharging-circuit, but also in all conductors connected with it. But, in the second place, it shows more clearly than the preceding experiment that these disturbances run on so rapidly that even the time taken by electrical waves in rushing through short metallic conductors becomes of appreciably importance. For the experiment can only be interpreted in the sense that the change of potential proceeding from the induction-coil reaches the knob 1 in an appreciably shorter time than the knob 2. The phenomenon may well cause surprise when we consider that, as far as we know, electric waves in copper wires are propagated with a velocity which is approximately the same as that of light. So, it appeared to me to be worthwhile to endeavour to determine what conditions were most favourable for the production of brilliant sparks in the micrometer. For the sake of brevity, we shall speak of these sparks as the side-sparks (in order to distinguish them from the discharge proper), and of the circuit as the side-circuit (*Nebenkreis*).

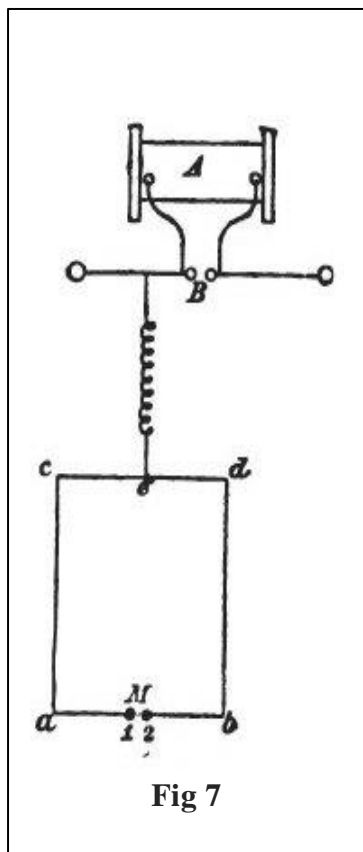
First of all, it became evident that powerful discharges are necessary if side-sparks of several millimetres in length are desired. I therefore used in all the following experiments a large Ruhmkorff coil, 52 cm. long and 20 cm in diameter, which was provided with a mercury interrupter and was excited by six large Bunsen cells. Smaller induction-coils (p. 32) gave the same qualitative results, but the side-sparks were shorter, and it was therefore more difficult to observe differences between them. The same held good when discharges from Leyden jars or from batteries were used instead of the induction-coil. It further appeared that even when the same apparatus was used a good deal depended upon the nature of the exciting spark in the discharger (B). If this takes place between two points, or between a point and a plate, it only gives rise to very weak side-sparks; discharges in rarefied gases or through Geissler tubes were found to be equally ineffective. The only kind of spark that proved satisfactory was that between two knobs (spheres), and this must neither be too long nor too short. If it is shorter than half a centimeter the side-sparks are weak, and if it is longer than  $1\frac{1}{2}$ cm they disappear entirely.

In the following experiments I used, as being the most suitable, sparks three-quarters of a centimetre long between two brass knobs of 3 cm. diameter. Even these sparks were not always equally efficient; the most insignificant details, often without any apparent connection, resulted in useless sparks appearing instead of active ones. After some practice one can judge from the appearance and noise of the sparks whether they are such as are able to excite side-sparks. The active sparks are brilliant white, slightly jagged, and are accompanied by a sharp crackling. That the spark in the discharger is an essential condition of the production of shunt-sparks is easily shown by drawing the discharger-knobs so far apart that the distance between them exceeds the sparking distance of the induction-coil; every trace of the side-sparks then disappears, although the differences of potential now present are greater than before.

The length of the micrometer-circuit naturally has great influence upon the length of the sparks in it. For the greater this distance, the greater is the retardation which the electric wave suffers between the time of its arrival at the one knob and at the other. If the side-circuit is made very small, the side-sparks become extremely short; but it is scarcely possible to prepare a circuit in which sparks will not show themselves under favourable circumstances. Thus, if you file the ends of a stout copper wire, 4-6 cm long, to sharp points, (p. 33) bend it into an almost closed circuit, insulate it and now touch the discharger with this small wire circuit, a stream of very small sparks between the pointed ends generally accompanies the discharges of the induction-coil. The thickness and material (and therefore the resistance) of the side-circuit have very little effect on the length of the side-sparks. We were therefore justified in declining to attribute







to the resistance the differences of potential which arise.) And according to our conception of the phenomenon, the fact that the resistance is of scarcely any importance can cause us no surprise; for, to a first approximation, the rate of propagation of an electric wave along a wire depends solely upon its capacity and self-induction, and not upon its resistance. The length of the wire which connects the side-circuit to the principal circuit has also little effect, provided it does not exceed a few metres. We must assume that the electric disturbance which proceeds from the principal circuit travels along it without suffering any real change of intensity.

On the other hand, the position of the point at which contact with the side-circuit is made has a very noteworthy effect upon the length of the sparks in it. We should expect this to be so if our interpretation of the phenomenon is correct. For if the point of contact is so placed that the paths from it to the two knobs of the micrometer are of equal length, then, every variation which passes through the connecting wire will arrive at the two knobs in the same phase, so that no difference of potential between them can arise. Experiment confirms this **supposition. Thus, if we shift the point of contact on the side-circuit,** which we have hitherto supposed near one of the

micrometer-knobs, farther and farther away from this, the spark-length diminishes, and in a certain position the sparks disappear completely or very nearly so; they become stronger again in proportion as the contact approaches the second micrometer-knob, and in this position attain the same length as in the first. The point at which the spark-length is a minimum may be called the null-point. It can generally be determined to within a few centimetres. It always divides the length of the wire between the two micrometer-knobs into very nearly equal parts. If the conductor is symmetrical on the right and left of the line joining the micrometer and the (p. 34) null-point, the sparks always disappear completely, the phenomenon can be observed even with quite short side-circuits. Fig. 7 shows a convenient arrangement of the experiment; *abcd* is a rectangle of bare copper wire 2 mm. in diameter, insulated upon sealing-wax supports;<sup>1</sup> in my experiments it was 80 cm broad and 125 long. When the connecting wire is attached to either of the knobs 1 and 2, or either of the points *a* and *b*, sparks 3 - 4 mm. long pass between 1 and 2; no sparks can be obtained when the connection is at the point *e*, as in the figure; shifting the contact a few centimeters to right or left causes the sparks to reappear. It should be remarked that we consider sparks as being perceptible when they are only a few hundredths of a millimetre in length. The following experiment shows that the above is not a complete representation of the way in which things go on. For if, after the contact has been adjusted so as to make the

<sup>111</sup>[See Note 2 at end of book.]

sparks disappear, we attach to one of the micrometer-knobs another conductor projecting beyond it, active sparking again occurs. This conductor, being beyond the knob, cannot affect the simultaneous arrival of the waves travelling from  $e$  to 1 and 2. ~But it is easy to see what the explanation of this experiment is. The waves do not come to an end after rushing once towards  $a$  and  $b$ ; they are reflected and traverse the side-circuit several, perhaps many, times and so give rise to stationary oscillations in it. If the paths  $e c a 1$  and  $e d b 2$  are equal, the reflected waves will again arrive at 1 and 2 simultaneously. If, however, the wave reflected from one of the knobs is missing, as in the last experiment, then, although the first disturbance proceeding from  $e$  will not give rise to sparks, the reflected waves will. We must therefore imagine the abrupt variation which arrives at  $e$  as creating in the side-circuit the oscillations which are natural to it, much as the blow of a hammer produces in an elastic rod its natural vibrations. If this idea is correct, then (p. 35) the condition for disappearance of sparks in  $M$  must substantially be equality of the vibration-periods of the two portions  $e1$  and  $e2$ . These vibration-periods are determined by the product of the coefficient of self-induction of those parts of the conductor into the capacity of their ends; they are practically independent of the resistance of the branches. The following experiments may be applied to test these considerations and are found to agree with them: —

If the connection is placed at the null-point and one of the micrometer-knobs is touched with an insulated conductor, sparking begins again because the capacity of the branch is increased. An insulated sphere of 2-4 cm diameter is quite sufficient. The larger the capacity which is thus added, the more energetic becomes the sparking. Touching at the null point has no influence since it affects both branches equally. The effect of adding a capacity to one branch is annulled by adding an equal capacity to the other. It can also be compensated by shifting the connecting wire in the direction of the loaded branch, *i.e.* by diminishing the self-induction of the latter. The addition of a capacity produces the same effect as increasing the coefficient of self-induction. If one of the branches be cut and a few centimetres or decimetres of coiled copper wire introduced into it, sparking begins again. The change thus produced can be compensated by inserting an equal length of copper wire in the other branch, or by shifting the copper wire towards the branch which was altered, or by adding a suitable capacity to the other branch. Nevertheless, it must be remarked that when the two branches are not of like kind, a complete disappearance of the sparks cannot generally be secured, but only a minimum of the sparking distance.

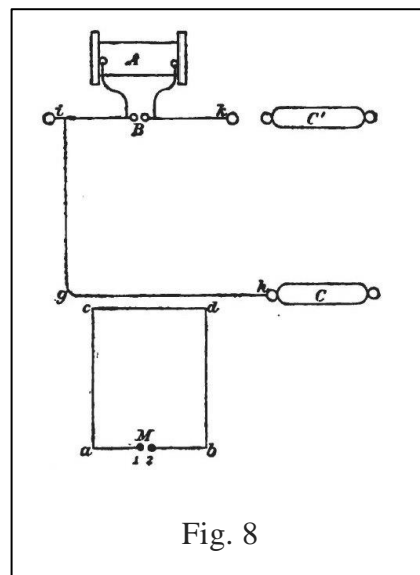
The results are but little affected by the resistance of the branch. If the thick copper wire in one of the branches was replaced by a much thinner copper wire or by a wire of German silver, the equilibrium was not disturbed, although the resistance of the one branch was a hundred times that of the other. Very large fluid resistances certainly made it impossible to secure a disappearance of the sparks, and short airspaces introduced into one of the branches had a like effect.

The self-induction of iron wires for slowly alternating currents is about eight to ten times as great as that of copper (p. 36) wires of equal length and thickness. I therefore expected that short iron wires would produce equilibrium with longer copper wires. This expectation was not confirmed; the

branches remained in equilibrium when a copper wire was replaced by an iron wire of equal length. If the theory of the observations here given is correct, this can only mean that the magnetism of iron is quite unable to follow oscillations as rapid as those with which we are here concerned, and that it, therefore, is without effect. A further experiment which will be described below appears to point in the same direction.

### *Induction-Effects of unclosed Currents*

The sparks which occur in the preceding experiments owe their origin, according to our supposition, to self-induction. But if we consider that the induction-effects in question are derived from exceedingly weak currents in short, straight conductors, there appears to be good reason to doubt whether these do really account satisfactorily for the sparks. In order to settle this doubt, I tried whether the observed electrical disturbances did not manifest effects of corresponding magnitude in neighbouring conductors. I therefore bent some copper wire into the form of rectangular circuits, about 10-20 cm in the side, and containing only very short spark-gaps. These were insulated and brought near to the conductors in which the disturbances took place, and in such a position that a side of the rectangle was parallel to the conductor. When the rectangle was brought sufficiently near, a stream of sparks in it always accompanied the discharges of the induction-coil. These sparks were most brilliant in the neighbourhood of the discharger, but they could also be observed along the wire leading to the side-circuit as well as in the branches of the latter. The absence of any direct discharge between the inducing and induced circuits was carefully verified, and was also prevented by the introduction of a solid insulator. Thus, it is scarcely possible that our conception of the phenomenon is erroneous. That the induction between two simple straight lengths of wire, traversed by only small quantities of electricity, can yet become strong enough to produce sparks, shows again the extraordinary shortness of (p. 37) the time in which these small quantities of electricity must pass backwards and forwards along the conductors.



In order to study the phenomena more closely, the rectangle which at first was employed as the side-circuit was again brought into use, but this time as the induced circuit. Along the short side of this (as indicated in Fig. 8) and at a distance of 3 cm from it was stretched a second copper wire  $g h$ , which was placed in connection with any part of the discharger. As long as the end  $h$  of the wire  $g h$  was free, only weak sparks appeared in the micrometer  $M$ , and these were due to the discharge-current of the wire  $g h$ . But if an insulated conductor  $C$ —one taken from an electrical machine — was then attached to  $h$ , so that larger quantities of electricity had to pass through the wire, sparks up to two millimetres long appeared in the micrometer. This was not caused by an electrostatic effect of the conductor, for if it was attached to  $g$  instead of to  $h$ , it was without effect; and the action was not due

to the charging-current of the conductor, but to the sudden discharge brought about by the sparks. For when the knobs of the discharger were drawn so far apart that sparks could no longer spring across it, then the sparks disappeared completely from the induced circuit as well. Not every kind of spark produced a sufficiently energetic discharge; here, again, only such sparks as were before found to occasion powerful side-sparks were found to be effective in exciting the inductive action. The sparks excited in the secondary circuit passed not only between the knobs of the micrometer but also from these to other insulated conductors held nearby. The length of the sparks was notably diminished by attaching to the knobs, conductors of somewhat large capacity or touching (p. 38) one of them with the hand; clearly the quantities of electricity set in motion were too small to charge conductors of rather large capacity to the full potential. On the other hand, the sparking was not much affected by connecting the two micrometer-knobs by a short-wet thread. No physiological effects of the induced current could be detected; the secondary circuit could be touched or completed through the body without experiencing any shock.

Certain accessory phenomena induced me to suspect that the reason why the electric disturbance in the wire  $g k$  produced such a powerful inductive action lay in the fact that it did not consist of a simple charging-current, but was rather of an oscillatory nature. I therefore endeavoured to strengthen the induction by modifying the conditions so as to make them more favourable for the production of powerful oscillations. The following arrangement of the experiment suited my purpose particularly well. I attached the conductor  $C$  as before to the wire  $g$  hand then separated the micrometer-knobs so far from each other that sparks only passed singly. I then attached to the free pole of the discharger  $k$  (Fig. 8) a second conductor  $C'$  of about the same size as the first. The sparking then again became very active, and on drawing the micrometer knobs still farther apart decidedly longer sparks than at first could be obtained. This cannot be due to any direct action of the portion of the circuit  $ik$ , for this would diminish the effect of the portion  $g h$ ; it must, therefore, be due to the action of the conductor  $C'$  upon the discharge-current of  $C$ . Such an action would be incomprehensible if we assumed that the discharge of the conductor  $C$  was aperiodic. It becomes, however, intelligible if we assume that the inducing current in  $g h$  consists of an electric oscillation which, in the one case, takes place in the circuit  $C$ —wire  $g h$ —discharger, and in the other in the system  $C$ —wire  $g h$ , wire  $ik$ — $C'$ . It is clear in the first place that the natural oscillations of the latter system would be the more powerful, and in the second place that the position of the spark in it is more suitable for exciting the vibration.

Further confirmation of these views may be deferred for the present. But here we may bring forward in support of them the fact that they enable us to give a more correct explanation (p. 39) of the part which the discharge of the Ruhmkorff coil plays in the experiment. For if oscillatory disturbances in the circuit  $C$ — $C'$  are necessary for the production of powerful induction-effects, it is not sufficient that the spark in this circuit should be established in an exceedingly short time, but it must also reduce the resistance of the circuit below a certain value, and in order that this may be the case the current-density from the very start must not fall below a certain limit. Hence it is that the inductive effect is

exceedingly feeble when the conductors  $C$  and  $C'$  are charged by means of an electrical machine<sup>1</sup> (instead of a Ruhmkorff coil) and then allowed to discharge themselves; and that it is also very feeble when a small coil is used, or when too large a spark-gap is introduced; in all these cases the motion is aperiodic. On the other hand, a powerful discharge from a Ruhmkorff coil gives rise to oscillations, and therefore to powerful disturbances all round, by performing the following functions: —In the first place, it charges the ends  $C$  and  $C'$  of the system to a high potential; secondly, it gives rise to a disruptive discharge; and thirdly, after starting the discharge, it keeps the resistance of the air-gap so low that oscillations can take place. It is known that if the capacity of the ends of the system is large —if, for example, they consist of the armatures of a battery of Leyden jars — the discharge-current from these capacities is able of itself to reduce the resistance of the spark-gap considerably; but when the capacities are small this function must be performed by some extraneous discharge, and for this reason the discharge of the induction-coil is, under the conditions of our experiment, absolutely necessary for exciting oscillations.

As the induced sparks in the last experiment were several millimetres long, I had no doubt that it would be possible to obtain sparks even when the wires used were much farther apart; I therefore tried to arrange a modification of the experiment which appeared interesting. I gave the inducing circuit the form of a straight line (Fig. 9). Its ends were formed by the conductors  $C$  and  $C'$ . These were 3 metres apart, and were connected by a copper wire 2 mm. thick, at the centre of which was the discharger of the induction-coil. The induced circuit was the same as in the preceding experiment (p. 40) 120 cm. long and 80 cm broad. If the shortest distance between the two systems was now made equal to 50 cm, induced sparks 2 mm in length could still be obtained; at greater distances the spark-length decreased rapidly, but even when the shortest distance was 1.5 metres, a continuous stream of sparks was perceptible. The experiment was in no way interfered with if the observer moved between the inducing and induced systems. A few control-experiments again established the fact that the phenomena observed were really caused by the current in the rectilinear portion. If one or both halves of this were removed, the sparks in the micrometer ceased, even when the coil was still in action. They also ceased when the knobs of the discharger were drawn so far apart as to prevent any sparking in it. Inasmuch as the difference of electrostatic potential at the ends of the conductors  $C$  and  $C'$  are now greater than before, this shows that these differences of potential are not the cause of the sparks in the micrometer.

---

<sup>111</sup>[See Note 8 at end of book.]

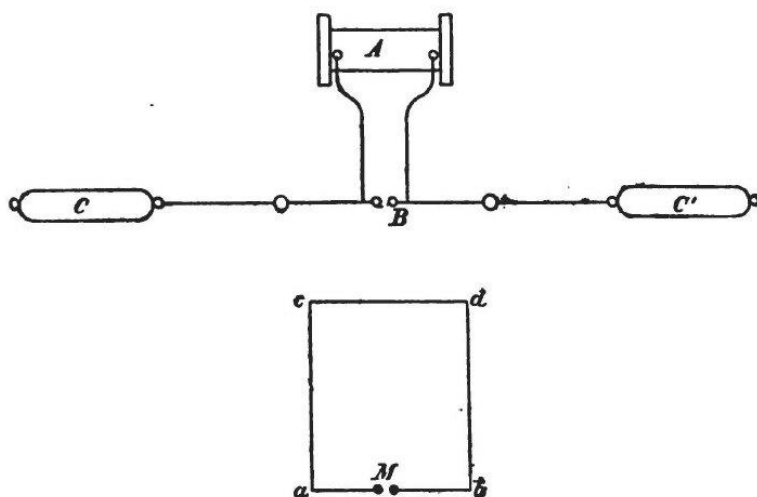


Fig. 9.

Hitherto the induced circuit was closed; it was, however, to be supposed that the induction would take place equally in an open circuit. A second insulated copper wire was therefore stretched parallel to the straight wire in the preceding arrangement, and at a distance of 60 cm from it. This second wire was shorter than the first; two insulated spheres 10 cm in diameter were attached to its ends and the spark-micrometer was introduced in the middle of it. When the coil was now (p. 41) started, the stream of sparks from it was accompanied by a similar stream in the secondary conductor. But this experiment should be interpreted with caution, for the sparks observed are not solely due to electromagnetic induction. The alternating motion in the system  $C C'$  is indeed superposed upon the Ruhmkorff discharge itself. But during its whole course the latter determines an electrification of the conductor  $C$ , and an opposite electrification of the conductor  $C'$ . These electrifications had no effect upon the closed circuit in the preceding experiment, but in the present discontinuous conductor they induce by purely electrostatic action opposite electrifications in the two parts of the conductor, and thus produces sparks in the micrometer. In fact, if we draw the knobs of the discharger so far apart that the sparks in it disappear, the sparks in the micrometer, although weakened, still remain. These sparks represent the effect of electrostatic induction, and conceal the effect which alone we desired to exhibit.

There is, however, an easy way of getting rid of these disturbing sparks. They die away when we interpose a bad conductor between the knobs of the micrometer, which is most simply done by means of a wet thread. The conductivity of this is obviously good enough to allow the current to follow the relatively slow alternations of the discharge from the coil; but in the case of the exceedingly rapid oscillations of the rectilinear circuit it is, as we have already seen, not good enough to bring about an equalisation of the electrifications. If after placing the thread in position we again start the sparking in the primary circuit, vigorous sparking begins again in the secondary circuit, and is now solely due to the rapid oscillations in the primary circuit. I have tested to what distance this action extended. Up to a distance of 1.2 metres between the parallel wires the sparks were easily perceptible; the greatest

perpendicular distance at which regular sparking could be observed was 3 metres. Since the electrostatic effect diminishes more rapidly with increasing distance than the electromagnetic induction, it was not necessary to complicate the experiment by using the wet thread at greater distances, for, even without this, only those discharges which excited oscillations in the primary wire were attended by sparks in the secondary circuit.

(p. 42) I believe that the mutual action of rectilinear open circuits which plays such an important part in theory is, as a matter of fact, illustrated here for the first time.

### *Resonance Phenomena*

We may now regard it as having been experimentally proved that currents of rapidly varying intensity, capable of producing powerful induction-effects, are present in conductors which are connected with the discharge circuit. The existence of regular oscillations, however, was only assumed for the purpose of explaining a comparatively small number of phenomena, which might perhaps be accounted for otherwise. But it seemed to me that the existence of such oscillations might be proved by showing, if possible, symphonic relations between the mutually reacting circuits. According to the principle of resonance, a regularly alternating current must (other things being similar) act with much stronger inductive effect upon a circuit having the same period of oscillation than upon one of only slightly different period.<sup>1</sup> If, therefore, we allow two circuits, which may be assumed to have approximately the same period of vibration, to react on one another, and if we vary continuously the capacity or coefficient of self-induction of one of them, the resonance should show that for certain values of these quantities the induction is perceptibly stronger than for neighbouring values on either side.

The following experiments were devised in accordance with this principle, and, after a few trials, they quite answered my intention. The experimental arrangement was very nearly the same as that of Fig. 9, excepting that the circuits were made somewhat different in size. The primary conductor was a perfectly straight copper wire 2.6 metres long and 5 mm thick. This was divided in the middle so as to include the spark-gap. The two small knobs between which the discharge took place were mounted directly on the wire and connected with the poles of the induction-coil. To the ends of the wire were attached two spheres, 30 cm in diameter, made of strong zinc-plate. These could be shifted along the wire. As they formed (electrically) the ends of the conductor, the circuit (p. 43) could easily be shortened or lengthened. The secondary circuit was proportioned so that it was expected to have a somewhat smaller period of oscillation than the primary; it was in the form of a square 7.5 cm in the side, and was made of copper wire 2 mm in diameter. The shortest distance between the two systems was made equal to 30cm, and at first the primary current was allowed to remain of full length. Under

---

<sup>111</sup>Cf. Oberbeck, *Wied. Ann.* **26**, p. 245, 1885.

these circumstances the length of the biggest spark in the induced circuit was 0.9 mm. When two insulated metal spheres of 8 cm diameter were placed in contact with the two poles of the circuit, the spark-length increased, and could be made as large as 2.5 mm by suitably diminishing the distance between the two spheres. On the other hand, if two conductors of very large surface were placed in contact with the two poles, the spark-length was reduced to a small fraction of a millimetre. Exactly similar results followed when the poles of the secondary circuit were connected with the plates of a Kohlrausch condenser. When the plates were far apart the spark-length was increased by increasing the capacity, but when they were brought closer together the spark-length again fell to a very small value. The easiest way of adjusting the capacity of the secondary circuit was by hanging over its two ends two parallel bits of wire and altering the length of these and their distance apart. By careful adjustment the sparking distance was increased to 3 mm, after which it diminished, not only when the wires were lengthened, but also when they were shortened. That an increase of the capacity should diminish the spark-length appeared only natural; but that it should have the effect of increasing it can scarcely be explained excepting by the principle of resonance.

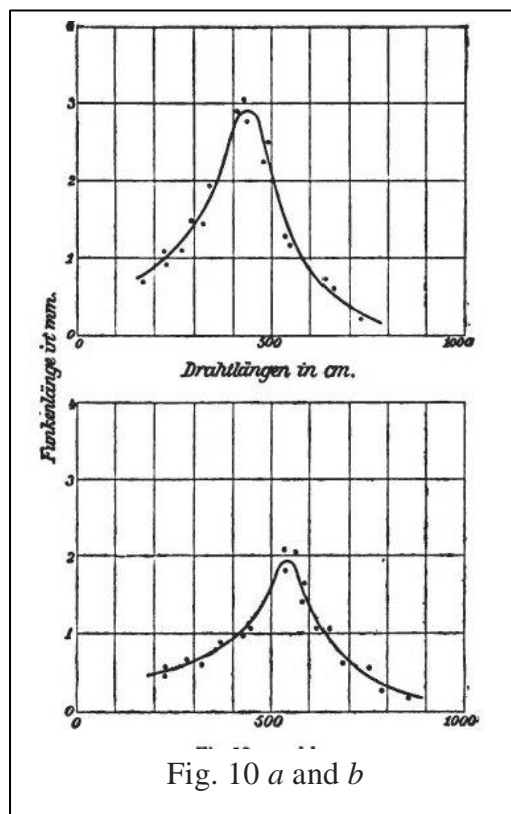
If our interpretation of the above experiment is correct, the secondary circuit, before its capacity was increased, had a somewhat shorter period than the primary. Resonance should therefore have occurred when the rapidity of the primary oscillations was increased. And, in fact, when I reduced the length of the primary circuit in the manner above indicated, the sparking distance increased, again reached a maximum of 3 mm. when the centres of the terminal spheres were 1.5 metres apart, and again diminished when the spheres were brought still closer together. It might be supposed that the (p. 44) spark-length would now increase still further if the capacity of the secondary circuit were again, as before, increased. But this is not the case; on attaching the same wires, which before had the effect of increasing the spark-length, this latter falls to about 1 mm. This is in accordance with our conception of the phenomenon; that which at first brought about equality between the periods of oscillation now upsets an equality which has been attained in another way. The experiment was most convincing when carried out as follows: —The spark-micrometer was adjusted for a fixed sparking distance of 2 mm. If the secondary circuit was in its original condition, and the primary circuit 1.5 metres long, sparks passed regularly. If a small capacity is added to the secondary circuit in the way already described, the sparks are completely extinguished; if the circuit is now lengthened to 2.6 metres they reappear; they are extinguished a second time if the capacity added to the secondary circuit is doubled; and by continuously increasing the capacity of the already lengthened primary circuit they can be made to appear and disappear again and again. The experiment shows us quite plainly that effective action is determined, not by the condition of either of the circuits, but by a proper relation (or harmony) between the two.

The length of the induced sparks increased considerably beyond the values given above when the two circuits were brought closer together. When the two circuits were at a distance of 7 cm from one another and were adjusted to exact resonance, it was possible to obtain induced sparks 7 mm long; in



this case the electromotive forces induced in the secondary circuit were almost as great as those in the primary.

In the above experiments resonance was secured by altering the coefficient of self-induction and the capacity of the primary circuit, as well as the capacity of the secondary circuit. The following experiments show that an alteration of the coefficient of self-induction of the secondary circuit can also be used for this purpose. A series of rectangles  $a b c d$ , (Fig. 9), were prepared in which the sides  $a b$  and  $c d$  were kept of the same length, but the sides  $a c$  and  $b d$  were made of wires varying in length from 10 cm to 250 cm. A marked maximum of the sparking distance was apparent when the length of the rectangle was 1.8 metres. In order to get an idea of (p. 45) the quantitative relations I measured the longest sparks which appeared with various lengths of the secondary circuit. Fig. 10a shows the results.<sup>1</sup> Abscissæ represent the total length of the induced circuit and ordinates the maximum spark-length. The points indicate the observed values. Measurements of sparking distances are always very uncertain, but this uncertainty cannot be such as to vitiate the general nature of the result. In another set of experiments not only the lengths of the sides  $a b$  and  $c d$ , but also their distance apart (30 cm), and their position were kept constant; but the sides  $a c$  and  $b d$  were formed of wires of gradually increasing length coiled into loose spirals. Fig. 10b shows the results obtained. The maximum here corresponds with a somewhat greater length of wire than before. Probably this is because the lengthening of the wire in this case increases only the coefficient of self-induction, whereas in the former case it increased the capacity as well.



Some further experiments were made in order to determine whether any different result would be obtained by altering the resistance of the secondary circuit. With this intention the wire  $c d$  of the rectangle was replaced by various thin copper and German silver wires, so that the resistance of the secondary circuit was made about a hundred times as large. This change had very little effect on the sparking distance, and none at (p. 46) all on the resonance; or, in other words, on the period of oscillation.

The effect of the presence of iron was also examined. The wire  $c d$  was in some experiments surrounded by an iron tube, in others replaced by an iron wire. Neither of these changes produced a perceptible effect in any sense. This again confirms the supposition that the magnetism of iron cannot

<sup>111</sup>[See Note 4 at end of book.]

follow such exceedingly rapid oscillations, and that its behaviour towards them is neutral. Unfortunately, we possess no experimental knowledge as to how the oscillatory discharge of Leyden jars is affected by the presence of iron.

### Nodes

The oscillations which we excited in the secondary circuit, and which were measured by the sparks in the micrometer, are not the only ones, but are the simplest possible in that circuit. While the potential at the ends oscillates backwards and forwards continually between two limits, it always retains the same mean value in the middle of the circuit. This middle point is therefore a node of the electric oscillation, and the oscillation has only this one node. Its existence can also be shown experimentally, and that in two ways. In the first place, it can be done by bringing a small insulated sphere near the wire.

The mean value of the potential of the small sphere cannot differ appreciably from that of the neighbouring bit of wire. Sparking between the knob and the wire can therefore only arise through the potential of the neighbouring point of the system experiencing sufficiently large oscillations about the mean value. Hence there should be vigorous sparking at the ends of the system and none at all near the node. And this in fact is so, excepting, indeed, that when the nodal point is touched the sparks do not entirely disappear, but are only reduced to a minimum. A second way of showing the nodal point is clearer. Adjust the secondary circuit for resonance and draw the knobs of the micrometer so far apart that sparks can only pass by the assistance of the action of resonance. If any point of the system is now

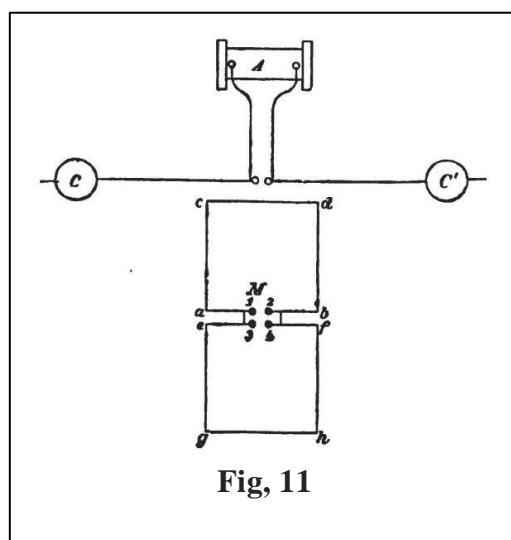


Fig. 11

touching with a conductor of some capacity, we should in general expect that the resonance would be (p. 47) disturbed, and that the sparks would disappear; only at the node would there be no interference with the period of oscillation. Experiment confirms this. The middle of the wire can be touched with an insulated sphere, or with the hand, or can even be placed in metallic connection with the gas-pipes without affecting the sparks; similar interference at the side-branches or the poles causes the sparks to disappear.

After the possibility of fixing a nodal point was thus proved, it appeared to me be worthwhile experimenting on the production of a vibration with two nodes. I proceeded as follows: —The straight primary conductor  $C C'$  and the rectilinear secondary  $a b c d$  were set up as in the earlier experiments and brought to resonance. An exactly similar rectangle  $e f g h$  was then placed opposite to  $a b c d$  as shown in Fig. 11, and the neighbouring poles of both were joined (1 with 3 and 2 with 4). The whole system forms a closed metallic circuit, and the lowest or fundamental vibration possible in it has two nodes. Since the period of this vibration must very nearly agree with the period of either half, and therefore with the period of the primary conductor, it was supposed that vibrations would develop

having two antinodes at the junctions 1-3 and 2-4, and two nodes at the middle points of  $c d$  and  $g h$ . These vibrations were always measured by the sparking distance between the knobs of the micrometer which formed the poles 1 and 2. The results of the experiment were as follows: —Contrary to what was expected, it was found that the sparking distance between 1 and 2 was considerably diminished by the addition of the rectangle  $e f g h$ . From about 3 mm it fell to 1 mm. Nevertheless (p. 48) there was still resonance between the primary circuit and the secondary. For every alteration of  $e f g h$  reduced the sparking distance still further, and this whether the alteration was in the direction of lengthening or shortening the rectangle. Further, it was found that the two nodes which were expected were actually present. By holding a sphere near  $e d$  and  $g h$  only very weak sparks could be obtained as compared with those from  $a e$  and  $b f$ . And it could also be shown that these nodes belonged to the same vibration which, when strengthened by resonance, produced the sparks 1-2. For the sparking distance between 1 and 2 was not diminished by touching along  $e d$  or  $g h$ , but it was by touching at every other place. The experiment may be modified by breaking one of the connections 1-3 or 2-4, say the latter. As the current-strength of the induced oscillation is always zero at these points, this cannot interfere much with the oscillation. And, in fact, after the connection has been broken, it can be shown as before that resonance takes place, and that the vibrations corresponding to this resonance have two nodes at the same places. Of course, there was this difference, that the vibration with two nodes was no longer the deepest possible vibration; the vibration of longest period would be one with a single node between  $a$  and  $e$ , and having the highest potentials at the poles 2 and 4. And if we bring the knobs at these poles nearer together, we find that there is feeble sparking between them. We may attribute these sparks to an excitation, even if only feeble, of the fundamental vibration; and this supposition is made almost a certainty by the following extension of the experiment: —We stop the sparks between 1 and 2 and direct our attention to the length of the sparks between 2 and 4, which measures the intensity of the fundamental vibration. We now increase the period of oscillation of the primary circuit by extending it to the full length and adding to its capacity. We observe that the sparks thus increase to a maximum length of several millimetres and then again become shorter. Clearly, they are longest when the oscillation of the primary current agrees with the fundamental oscillation. And while the sparks between 2 and 4 are longest it can be easily shown that at this time only a single nodal point corresponds to these sparks. For only between  $a$  and  $e$  can the conductor (p. 49) be touched without interfering with the sparks, whereas touching the previous nodal points interrupts the stream of sparks. Hence, it is in this way possible, in any given conductor, to make either the fundamental vibration or the first overtone preponderates.

Meanwhile, there are several further problems which I have not solved; amongst others, whether it is possible to establish the existence of oscillations with several nodes. The results already described were only obtained by careful attention to insignificant details; and so, it appeared probable that the answers to further questions would turn out to be more or less ambiguous. The difficulties which present themselves arise partly from the nature of the methods of observation, and partly from the nature of the electric disturbances observed. Although, these latter, manifest themselves as undoubted oscillations, they do not exhibit the characteristics of perfectly regular oscillations. Their intensity

varies considerably from one discharge to another, and from the comparative unimportance of the resonance-effects we conclude that the damping must be rapid; many secondary phenomena point to the superposition of irregular disturbances upon the regular oscillations, as, indeed, was to be expected from the complex nature of the system of conductors. If we wish to compare, in respect of their mathematical relations, our oscillations with any particular kind of acoustic oscillations, we must not choose the long-continued harmonic oscillations of uniform strength which are characteristic of tuning-forks and strings, but rather such as are produced by striking a wooden rod with a hammer, — oscillations which rapidly die away, and with which are mingled irregular disturbances.<sup>1</sup> And when we are dealing with oscillations of the latter class we are obliged, even in acoustics, to content ourselves with mere indications of resonance, formation of nodes, and similar phenomena.

For the sake of those who may wish to repeat the experiments and obtain the same results I must add one remark, the exact significance of which may not be clear at first. In all the experiments described the apparatus was set up in such a way that the spark of the induction-coil was visible from the place where the spark in the micrometer took place. When (p. 50) this is not the case the phenomena are qualitatively the same, but the spark-lengths appear to be diminished. I have undertaken a special investigation of this phenomenon, and intend to publish the results in a separata paper.<sup>1</sup>

### *Theoretical*

It is highly desirable that quantitative data respecting the oscillations should be obtained by experiment. But as there is at present no obvious way of doing this, we are obliged to have recourse to theory, in order to obtain at any rate some indication of the data. The theory of electric oscillations which has been developed by Sir W. Thomson, v. Helmholtz, and Kirchhoff has been verified as far as the oscillations of open induction-coils and oscillatory Leyden jar discharges are concerned;<sup>2</sup> we may therefore feel certain that the application of this theory to the present phenomena will give results which are correct, at least as far as the order of magnitude is concerned.

To begin with, the period of oscillation is the most important element. As an example, to which calculation can be applied, let us determine the (simple or half) period of oscillation  $T$  of the primary conductor which we used in the resonance-experiments. Let  $P$  denote the coefficient of self-induction of this conductor in magnetic measure, expressed in centimetres;  $C$  the capacity of either of its ends in electrostatic measure (and therefore expressed also in centimetres); and finally,  $A$  the velocity of light in centimetre/seconds. Then, assuming that the resistance is small,  $T = \pi\sqrt{PC}/A$ . In our experiments the capacity of the ends of the conductor consisted mainly of the spheres attached to them. We shall therefore not be far wrong if we take  $C$  as being the radius of either of these spheres, or put  $C =$

---

<sup>111</sup> [See Note 5 at end of book.]

<sup>111</sup> [See IV., p. 63.] .

<sup>222</sup> Lorenz, *Wied. Ann.* 7,p. 161, 1879.

15 cm. <sup>3</sup> As regards the coefficient of self-induction P, it was that of a straight wire, of diameter  $d = 0.5$  cm, and of which the length L was 150 cm when resonance occurred.

Calculated by Neumann's formula  $P = \iint \cos \epsilon r ds ds'$ , the value of P for such a wire is (p. 51)  $2L\{\log \text{nat} (4L/d) - 0.75\}$  and therefore in our experiments  $P = 1902$  cm.

At the same time, we know that it is not certain whether Neumann's formula is applicable to open circuits. The most general formula, as given by v. Helmholtz, contains an undetermined constant  $k$ , and this formula is in accordance with the known experimental data. Calculated according to the general formula, we get for a straight cylindrical wire of length L and diameter  $d$  the value  $P = 2L\{\log \text{nat} (4L/d) - 0.75 + \frac{1}{2}(1 - k)\}$ . If in this we put  $k = 1$ , we arrive at Neumann's value. If we put  $k = 0$ , or  $k = -1$ , we obtain values which correspond to Maxwell's theory or Weber's theory. If, we assume that one at any rate of these values is the correct one, and therefore exclude the assumption that it may have a very large negative or positive value, then the true value of  $k$  is not of much moment. For the coefficients calculated with these various values of  $k$  differ from each other by less than one-sixth of their value; and so, if the coefficient 1902 does not exactly correspond to a length of wire of 150 cm, it does correspond to a length of our primary conductor not differing greatly therefrom. From the values of P and C it follows that the length  $\pi\sqrt{PC}$  is 531 cm. This is the distance through which light travels in the time of an oscillation, and is at the same time the wave-length of the electromagnetic waves which, according to Maxwell's view, are supposed to be the external effect of the oscillations. From this length it follows that the period of oscillation itself (T) is 1.77 hundred-millionths of a second; thus, the statement which we made in the beginning as to the order of magnitude of the period is justified.

Let us now turn our attention to what the theory can tell us as to the ratio of damping of the oscillations. In order that oscillations may be possible in the open circuit, its resistance must be less than  $2A\sqrt{PC}$ . For our primary conductor  $\sqrt{PC} = 11.25$ : now since the velocity A is equal to 30 earth-quadrant/seconds, or to 30 ohms, it follows that the limit for  $r$  admissible in our experiment is 676 ohms. It is very probable that the true resistance of a powerful discharge lies below this limit, and thus from the theoretical point of view there is no contradiction of our assumption of oscillatory (p. 52) motion. If the actual value of the resistance lies somewhat below this limit, the amplitude of any one oscillation would bear to the amplitude of that immediately following the ratio of 1 to  $e^{-(rT/2P)}$ . The number of oscillations required to reduce the amplitude in the ratio of 2.71 to 1 is therefore equal to  $2P/rT$  or  $2A\sqrt{P/C}\pi r$ . It therefore bears to 1 the same ratio that  $1/p$  of the calculated limiting value bears to the actual value of the resistance, or the same ratio as 215 ohms to  $r$ . Unfortunately, we have no means of even approximately estimating the resistance of a spark-gap. Perhaps, we may

---

<sup>3</sup> [See Note 6 at end of book.]

regard it as certain that this resistance amounts to at least a few ohms, for even the resistance of strong electric arcs does not fall below this. It would follow from this that the number of oscillations we have to consider should be counted by tens and not by hundreds or thousands.<sup>1</sup> This is in complete accordance with the character of the phenomena, as has already been pointed out at the end of the preceding section. It is also in accordance with the behaviour of the very similar oscillatory discharges of Leyden jars, in which case the oscillations of perceptible strength are similarly limited to a very small number.

In the case of purely metallic secondary circuits the conditions are quite different from those of the primary currents to which we have confined our attention. In the former a disturbance would, according to theory, only come to rest after thousands of oscillations. There is no good reason for doubting the correctness of this result; but a more complete theory would certainly have to take into consideration the reaction upon the primary conductor, and would thus probably arrive at higher values for the damping of the secondary conductor as well.

Finally, we may raise the question whether the induction-effects of the oscillations which we have observed were of the same order as those which theory would lead us to expect, or whether there is here any appearance of contradiction between the phenomena themselves and our interpretation of them. We may answer the question by the following considerations: —We observe, in the first place, that the maximum value of the electromotive force which the oscillation induces in its own (p. 53) circuit must be very nearly equal to the maximum difference of potential at the ends, for if the oscillations were not damped, there would exist complete equality between the two magnitudes; inasmuch as the potential difference of the ends and the electromotive force of induction would in that case be in equilibrium at every instant. Now in our experiments the potential difference between the ends was of a magnitude corresponding to a sparking distance of 7 - 8 mm, and any such sparking distance fixes the value of the greatest inductive effect of the oscillation in its own path. We observe, in the second place, that at every instant the induced electromotive force in the secondary circuit bears to that induced in the primary circuit the same ratio as the coefficient of mutual induction  $p$  between the primary and secondary circuits bears to the coefficient of self-induction  $P$  of the primary circuit. There is no difficulty in calculating according to known formulæ the approximate value of  $p$  for our resonance-experiments. It was found to vary in the different experiments between one-ninth and one-twelfth of  $P$ . From this we may conclude that the maximum electromotive force which our oscillation excites in the secondary circuit should be of such strength as to give rise to sparks of  $y$  to  $y'$  mm in length. And accordingly, the theory allows us, on the one hand, to expect visible sparks in the secondary circuit under all circumstances, and, on the other hand, we see that we can only explain sparks of several millimetres in length by assuming that several successive inductive effects strengthen each

---

<sup>1</sup> [See Note 7 at end of book.]

other. Thus, from the theoretical side as well we are compelled to regard the phenomena which we have observed as being the results of resonance.

Further application of theory to these phenomena can only be of service when we shall have succeeded by some means in determining the period of oscillation directly. Such measurement would not only confirm the theory but would lead to an extension of it. The purpose of the present research is simply to show that even in short metallic conductors, oscillations can be induced, and to indicate in what manner the oscillations which are natural to them can be excited.

(p. 54)

### III

#### FROM HERR W. VON BEZOLD'S PAPER: "RESEARCHES ON THE ELECTRIC DISCHARGE- PRELIMINARY COMMUNICATION"

*(Poggendorff's Annalen, 140, p. 541. Berichte der Bayrischen Akad. d. Wissensch., 1870)*

As we must extract that part of v. Bezold's work which alone concerns us here, and remove it from its context, it may be advisable to preface it by some explanation.

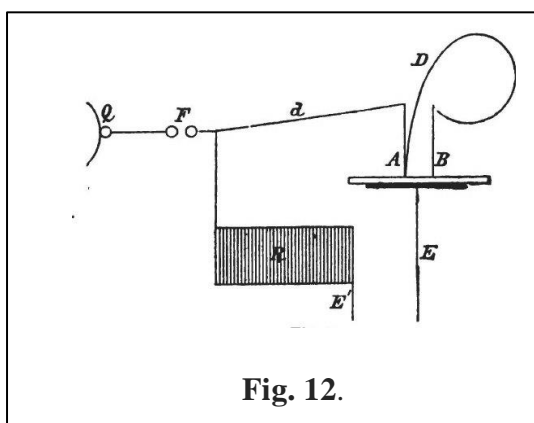
Von Bezold's researches start; with observations on Lichtenberg dust-figures. Herr von Bezold had noticed that under certain conditions the characters of the positive and negative figures appeared to undergo some modification and to resemble each other more nearly; so much so that the negative figure, for example, might be taken for positive. The first deviation from the normal character always presents itself in the form of a small positive figure appearing in the centre of the negative figure, or a small negative figure in the centre of the positive figure. It appeared that the more complicated figures always owed their origin to a spark associated with an alternating discharge, while the simple figures were produced by simple discharges. In every complicated figure an alternating discharge to a certain extent registered itself; and from the appearance of the figure the alternating character of the discharge and the direction of its first outburst could be directly recognised. We can, therefore, make use of the Lichtenberg figures in investigating the discharge.

Von Bezold produced the Lichtenberg figures in the following way:—A horizontal plate of well-insulating glass was (p. 55) covered underneath with tinfoil, and this was connected to earth. On the upper side of the plate was placed the point of a vertical knitting-needle, to which the discharge was led. The needle was then removed, the plate dusted, and the figure produced was examined. If this arrangement (which will be called the test-plate) is inserted directly in the discharge-circuit of a Leyden jar or of the conductor of an electrical machine, it naturally makes it impossible for an alternating discharge, and in general for any complete discharge, to occur. Hence the test-plate can only be inserted in a shunt to the actual discharge which is being investigated.



While Herr von Bezold was carrying out this method —using the discharge to earth of the conductor of his electrical machine as the principal discharge —he at once came upon certain very remarkable phenomena. Positive figures made their appearance where negative ones were to be expected; large figures appeared where one might have supposed there would be small ones, and *vice versa*. Ohm's law did not explain the facts; it appeared as if the electricity in motion had the power of carrying with it neighbouring electrifications, as if "phenomena occurred in electrical disturbances similar to those which are observed in the motion of fluids under the name of aspiration-phenomena." Of course, many of the details were bound to remain unexplained at first. We now quote Herr von Bezold's own words:

"These peculiar observations led to further researches on the division of electrical discharge-currents.



"Here, again, alternating discharges gave more constant results than simple ones; care was therefore taken to provide always a suitable return-conductor. The above experiments show that a simple wire cannot be employed for this purpose; hence the induction-coil of the Ruhmkorff *R* was used as a return-conductor.

"If now the electrical machine *Q* was slowly turned until a spark passed at *F*, complex positive figures appeared with great regularity on the plate at *A*.

"If a portion of the current was diverted along a short wire *D*, and this branch-current led on to the plate in the same way (p. 56) by a conductor *B*, there appeared, as might be expected, two precisely similar figures. If, on the other hand, the branch-wire was of considerable length (somewhat more than 1 metre), there was a decided difference in size between the figures. As soon as the length of the wire exceeded this limit, the figure at *B* was always larger than at *A*, even when the branch had its origin quite near the end of the conductor (1cm. above the plate). The difference in size between the two figures became more striking as the length of the branch-wire *D* was increased, until finally, when *D* was equal to 6.4 metres, and *F* (the length of the spark-gap) was equal to 4.0 mm, the figure at *A* was reduced to a small star, and often was altogether absent.

"This experiment obviously shows that Ohm's law only holds good for stationary currents, and not for electrical discharges, as indeed all theoretical investigations have shown. For whereas no electricity reaches the plate through the short branch *A*, it rushes, at any rate apparently, along the path through the wire *D* which is several hundred times longer.

"If the wire *D* is still further lengthened there is (wide limits) no change at first to be observed; only when the length has been about doubled within fairly does the figure at *A* again become larger,

until with still greater lengths the difference in size between the two figures again completely disappears. It made no difference whether the wire used was thick or thin, whether it was a good or bad conductor, nor yet whether it was tightly stretched or curved. I have not yet experimented with wire spirals.

"On account of the complete novelty of the phenomena it appeared to me of interest to investigate the behaviour of the (p. 57) wire *D* at different places. For this purpose, a modification shown in Fig. 13 was made. On the plate were placed the conductors *A*, *B*, *C*, which were connected together by two wires *D* and *D'*. If the length of these wires is chosen so as to produce as large as possible a figure at *C*, and, on the other hand, as small as possible a figure at *A*, then the figure at *B* is larger than that at *A* and smaller than that at *C*. If the wires are longer the sizes of the figures *A* and *C* are more nearly equal, whereas, when the ratio *D*:*D'* is suitably chosen, *B* becomes quite small and even disappears altogether. When the sparking distance was 4.3 mm and the length *A F* was equal to 50 cm, *D* = 6.2 m and *D'* = 8.1 m, the figures at *A* and *C* were large, whereas only a small star appeared at *B*.

"If any one of the conductors is lifted away from the plate, the figures at the remaining conductors are not in the least altered thereby.

"This experiment teaches us a new fact, viz. that by simply connecting a conductor with a wire which has a blind end, we can produce important modifications in the figure which is formed by that conductor, and may even cause it to disappear. The most instructive way of performing the experiment is to bring near the conductor *A* a second spark-micrometer *f* (Fig. 14), one knob of which is connected with *A* while the other leads to the wire *D*. If now the distance between the knobs of the micrometer *f* is at first made large and then gradually diminished, it is seen that at the instant when the spark passes at *f* the figure at *A* becomes altered or disappears. But if we consider that in the case of an alternating discharge the wire forthwith becomes completely discharged, it follows that in such a case electricity is first driven to the outer end of the (p. 58) wire *D*, and then immediately back again; that, in fact, we have here disturbances which are entirely comparable with reflection.

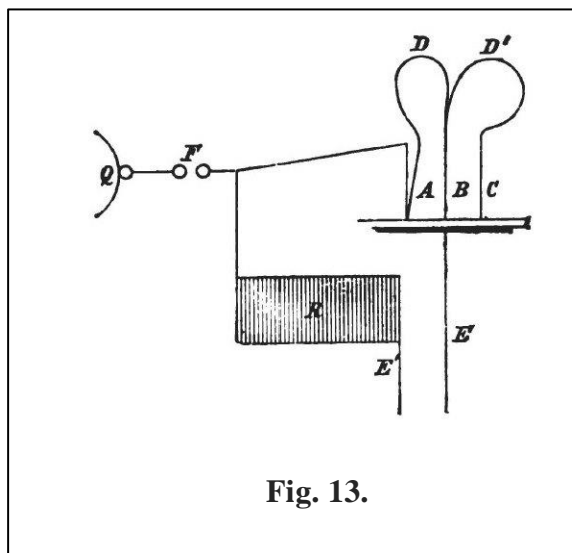


Fig. 13.

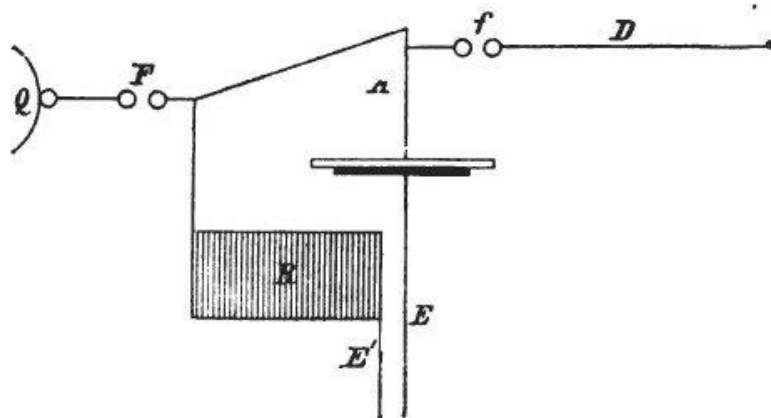


Fig. 14.

"This consideration leads to a hypothesis respecting the peculiar changes of size which the dust-figures undergo when the discharge branches as above described.

"If electric waves are impelled along a wire and forced to return along the same path after reflection at the end, the advancing and reflected waves would interfere and so give rise to phenomena analogous to those observed in organ-pipes. The observations already described point distinctly to such an analogy, and we may venture to compare the positions of the wire in which maximum and minimum figures appear with the antinodes and nodes.

"The hypothesis that the phenomena under discussion are due to interference gains additional support from the fact that it is only with alternating currents that the experiment is a decided success; differences in size between the various figures are indeed observed with simple discharges too, but not nearly to the same extent.

"In connection with the above experiments, a small modification was tried, which in turn became the starting-point for fresh researches: —

" If the end of the wire *D* (Fig 12) is brought back to and connected with the first conductor *A*, as shown in the accompanying diagram, the figure can again be made to disappear by suitably choosing the length of the wire. Strictly speaking, this experiment was the starting-point of all the others already described; but I have deferred the description of it until now (p. 59) because it does not help us much to understand the above experiments. For my own part, I at first believed that I had found in it an analogue to Savart's interference-experiment for sound-waves, and pictured the

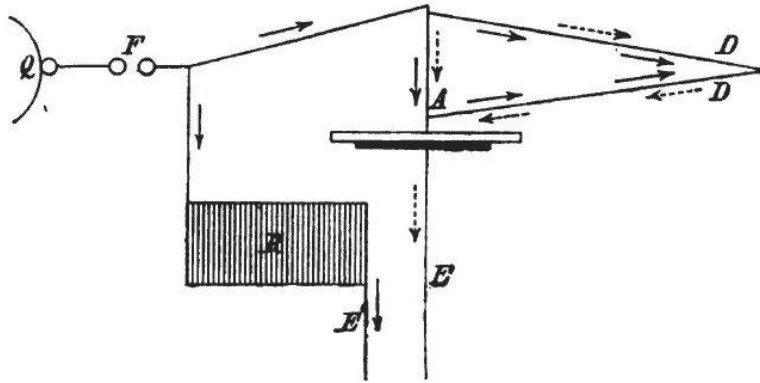


Fig. 15.

currents to myself as moving in the direction of the dotted arrows. This view was upset by the experiments in which the wire with a blind end was used, as well as by the fact that the distance between the two points of divergence on *A* exercised no decided effect on the result. In order to remove all doubt on this score I introduced a spark-gap into the branch *D* at various places in turn. The knobs of this second micrometer were only 0.01 to 0.03 mm apart. I reasoned thus: If the current enters the wire from both ends there must be some point on the wire at which the two trains of waves meet. When the spark-gap is exactly at this point, the potential on the two balls must reach the same value simultaneously, and there can be no cause for the production of sparks at this point; whereas, at all other points, sparking was to be expected.

"And, as a matter of fact, the sparking ceased when the micrometer was introduced in the middle of a branch, and began again as soon as it was removed from this point a few decimetres on either side. It is thus proved that the direction of the current is as indicated by the continuous arrows; and, on the other hand, the small retardation which the electric discharge-current suffers while traversing a few decimetres of wire is here made evident.

"I now endeavoured chiefly to find out under what experimental conditions this retardation was most effectively shown. I found it best to use the direct discharge of a Ruhmkorff coil, (p. 60) as shown in the diagram (Fig. 16). The inducing current was provided by a Grove cell, and the sparking distance *F* in the spark-micrometer was made about 2 mm, inasmuch as neither larger nor smaller spark-gaps gave such good results.

" Under these circumstances it sufficed for the production of the spark if one of the wires *D* was only one decimetre longer than the other. On the contrary, no spark ever appeared if they were of the same length. It can, however, be made to appear at once if the symmetry of the two branches is upset by placing the knob of a Leyden jar in contact with one of the wires.

"In this experiment, again, the material and thickness of the wires had not the slightest effect. Whether I used a silvered copper wire of 0.06 mm diameter, or an iron wire of 0.23 mm, or a copper wire of 0.80 mm diameter, there was never any spark as long as the two wires were of equal length.

"Thus, the velocity of electricity for all (stretched)<sup>1</sup> wires is the same.

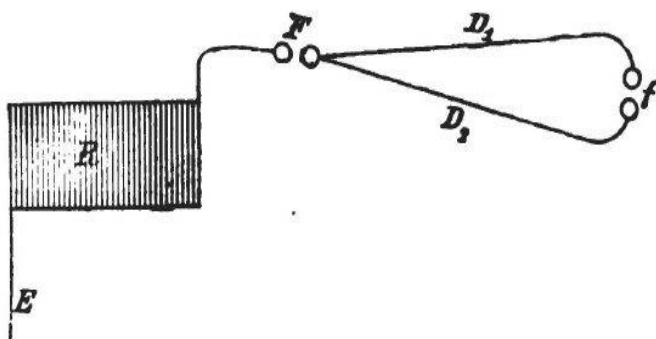


Fig. 16.

"The experiment is still not easily visible in the form above described, for one can only work with a small spark-gap in the auxiliary micrometer *f*. I therefore endeavoured to modify it in such a way as would admit of its being exhibited in a lecture-room.

"Trials with small Geissler tubes gave no definite result. On the other hand, the retardation can be very well shown in the following way, provided the difference of path amounts to a few meters (Fig. 17): —

"Let a (negative) discharge, preferably from a Ruhmkorff coil, be divided as above directly beyond the spark-micrometer into two branches. Let one of them be connected with the coating of a completely insulated test-plate, while the other is (p. 61) led by the conductor *A* on to the upper uncovered surface. Under these conditions a positive figure, or a negative one, or no figure at all, may appear on the upper surface according as the upper branch is larger, smaller, or of the same length as the lower. Indeed, we can predict what results the experiments must give if the supposition is correct that they are caused by time-differences. For if we recollect that the effect of leading positive electricity on to the plate is the same as the effect of removing negative electricity, we can understand how a positive discharge gives rise to a positive figure if the electricity reaches the point of the conductor before it reaches the coating, *i.e.* if  $D_1$  is shorter than  $D_2$ . If, on the other hand, the discharge arrives first at the coating, the induced electricity traverses the conductor in the opposite sense, and hence a negative figure must make its appearance upon the pane as soon as  $D_2$  is shorter than  $D_1$ . In

<sup>111</sup>Wires wound spirally would probably have given a different result.

the course of the disturbance the induced charge in the wire  $D_1$  must meet the electricity arriving directly from  $F$ , and hence a complex character will be impressed upon the figure.

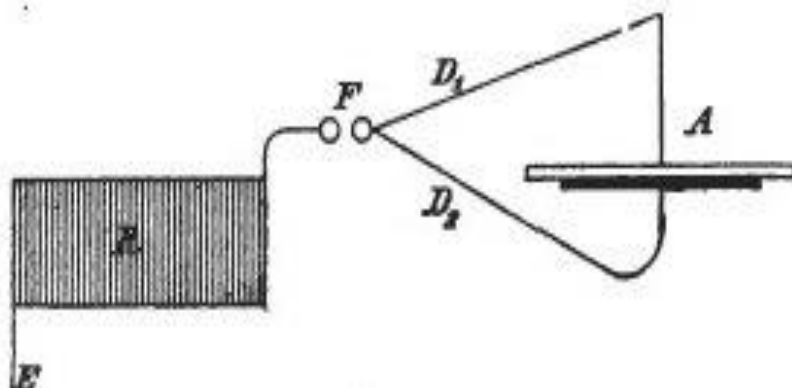


Fig. 17.

"Between these two dispositions, which give opposite results, there obviously must be another in which no figure can be produced, because there is no reason why the one kind or the other should appear. This must be the case when the electricity arrives simultaneously from both sides, *i.e.* when  $D_1$  and  $D_2$  are of the same length.<sup>1</sup>

"The experiments entirely coincided with these theoretical predictions. With either kind of electricity figures of both kinds can be obtained if the lengths of the wires are rightly chosen.

(p. 62) "It is true that this assertion may appear incorrect to many who may try the experiment under conditions which are not quite favourable; excepting the one case in which, on account of the exact equality of the two paths, no figure appears. For it may happen that at first sight all the figures appear to be positive under whatever conditions one works and with either kind of electricity.

"The reason is simply that the complex negative figures in this case belong to the class which already bear a strong positive character, and can scarcely be recognised as negative even after thorough experience of them.

"But the considerable difference in size which results from a change of pole amply suffices to remove at once any doubt respecting the real nature of the figures, and to show the accordance between the experiments and the theoretical predictions.

---

<sup>11</sup>A. small difference of length in favour of the upper wire may occur here, inasmuch as the electricity arriving from below has to spread itself out over the whole coating.

" To sum up, the following results were obtained: —

"1. If, after springing across a spark-gap, an electric discharge has before it two paths to earth, one short and the other long, and separated by a test-plate, the discharge-current splits up, so long as the sparking distance is small. But, when it is larger the electricity rushes solely along the shorter path, carrying with it out of the other branch electricity of the same sign.

"2. If a series of electric waves is sent along a wire which is insulated at the end, the waves are reflected at the end, and the phenomena which accompany this process in the case of alternating discharges appear to be caused by interference between the advancing and reflected waves.

"3. An electric discharge traverse wires of equal lengths in equal times, whatever may be the material of which these wires consist."

## ON AN EFFECT OF ULTRA-VIOLET LIGHT UPON THE ELECTRIC DISCHARGE

(*Sitzungsberichte d. Berl. Akad. d. Wiss.*, June 9, 1887. *Wiedemann's Ann.* **81**, p. 983.)

In a series of experiments on the effects of resonance between very rapid electric oscillations which I have carried out and recently published,<sup>1</sup> two electric sparks were produced by the same discharge of an induction-coil, and therefore simultaneously. One of these, the spark *A*, was the discharge-spark of the induction-coil, and served to excite the primary oscillation. The second, the spark *B*, belonged to the induced or secondary oscillation. The latter was not very luminous; in the experiments its maximum length had to be accurately measured. I occasionally enclosed the spark *B* in a dark case so as more easily to make the observations; and in so doing I observed that the maximum spark-length became decidedly smaller inside the case than it was before. On removing in succession, the various parts of the case, it was seen that the only portion of it which exercised this prejudicial effect was that which screened the spark *B* from the spark *A*. The partition on that side exhibited this effect, not only when it was in the immediate neighbourhood of the spark *B*, but also when it was interposed at greater distances from *B* between *A* and *B*. A phenomenon so remarkable called for closer investigation. The following communication contains the results which I have been able to establish in the course of the investigation: —

(p. 64) 1. The phenomenon could not be traced to any screening effect of an electrostatic or electromagnetic nature. For the effect was not only exhibited by good conductors interposed between *A* and *B*, but also by perfect non-conductors, in particular by glass, paraffin, ebonite, which cannot possibly exert any screening effect. Further, metal gratings of coarse texture showed no effect, although they act as efficient screens.

2. The fact that both sparks *A* and *B* corresponded with synchronous and very rapid oscillations was immaterial. For the same effect could be exhibited by exciting two simultaneous sparks in any other way. It also appeared when, instead of the induced spark, I used a side-spark (this term having the same significance as in my earlier paper). It also appeared when I used as the spark *B* a side-discharge (according to Riess's terminology), such as is obtained by connecting one pole of an induction-coil with an insulated conductor and introducing a spark-gap. But it can best and most conveniently be exhibited by inserting in the same circuit two induction-coils with a common interrupter,

---

<sup>1</sup>See 11, p. 29.



the one coil giving the spark *A* and the other the spark *B*. This arrangement was almost exclusively used in the subsequent experiments. As I found the experiment succeed with a number of different induction-coils, it could be carried out with any pair of sets of apparatus at pleasure. At the same time, it will be convenient to describe the particular experimental arrangement which gave the best results and was most frequently used. The spark *A* was produced by a large Ruhmkorff coil (*a*, Fig. 18), 52 cm. long and 20 cm. in diameter, fed by six large Bunsen cells (*b*) and provided with a separate mercury-break (*c*). With the current used it could give sparks up to 10 cm. long between point and plate, and up to about 3 cm between two spheres. The spark generally used was one of 1 cm length between the points of a common discharger (*d*). The spark *B* was produced by a smaller coil (originally intended for medical use) of relatively greater current-strength, but having a maximum spark-length of only  $\frac{1}{2}$  – 1 cm. As it was here introduced into the circuit of the larger coil, its condenser did not come into play, and thus it only gave sparks of 1 – 2 mm length. The (p. 65) sparks used were ones about 1 mm. long between the nickel-plated knobs of a Riess spark-micrometer (*f*), or between brass knobs of 5 to 10 cm diameter. When the apparatus thus arranged was set up with both spark-gaps parallel and not too far apart, the interrupter set going, and the spark-micrometer drawn out just so far as to still permit sparks to pass regularly, then on placing a plate (*p*) of metal, glass, etc., between the two sparks-gaps *d* and *f*, the sparks are extinguished immediately and completely. On removing the plate, they immediately reappear.

3. The effect becomes more marked as the spark *A* is brought nearer to the spark *B*. The distance between the two sparks when I first observed the phenomenon was  $1\frac{1}{2}$  metres, and the effect is, therefore, easily observed at this distance. I have been able to detect indications of it up to a distance of 3 metres between the sparks. But at such distances the phenomenon manifests itself only in the greater or less regularity of the stream of sparks at *B*; at distances less than a metre its strength can be measured by the difference between the maximum spark-length before and after the interposition of the plate. In order to indicate the magnitude of the effect I give the following, naturally rough, observations which were obtained with the experimental arrangement shown in Fig. 18: —

Distance between the Sparks in cm	Length of Spark <i>B</i> in mm.		Difference.
	before and after inserting the plate		
$\infty$	0·8	0·8	0
50	0·9	0·8	0·1
40	1·0	0·8	0·2
30	1·1	0·8	0·3
20	1·3	0·8	0·5
10	1·5	0·8	0·7
5	1·6	0·8	0·8
2	1·8	0·8	1·0

(p. 66) It will be seen that, under certain conditions, the sparking distance is doubled by removing the plate.

4. The observations given in the table may also be adduced as proofs of the following statement which the reader will probably have assumed from the first. The phenomenon does not depend upon any prejudicial effect of the plate on the spark *B*, but upon its annulling a certain action of the spark *A*, which tends to increase the sparking distance. When the distance between the sparks *A* and *B* is great, if we so adjust the spark-micrometer that sparks no longer pass at *B*, and then bring the spark-micrometer nearer to *A*, the stream of sparks in *B* reappears; this is the action. If we now introduce the plate, the sparks are extinguished; this is the cessation of the action. Thus, the plate only forms a means of exhibiting conveniently and plainly the action of the spark *A*. I shall in future call *A* the active spark and *B* the passive spark.

5. The efficiency of the active spark is not confined to any special form of it. Sparks between knobs, as well as sparks between points, proved to be efficient. Short straight sparks, as well as long jagged ones, exhibited the effect. There was no difference of any importance between faintly luminous bluish sparks and brilliant white ones. Even sparks 2 mm long made their influence felt to considerable distances. Nor does the action proceed from any special part of the spark; every part is effective. This statement can be verified by drawing a glass tube over the spark-gap. The glass does not allow the effect to pass through, and so the spark under these conditions is inactive. But the effect reappears as soon as a short bit of the spark is exposed at one pole or the other, or in the middle. I have not observed any influence due to the metal of the pole. And in arranging the experiment it is not of importance that the active spark should be parallel to the passive one.

6. On the other hand, the susceptibility of the passive spark to the action is to a certain extent dependent upon its form. I could detect no susceptibility with long jagged sparks between points, and but little with short sparks (p. 67) between points. The effect was best displayed by sparks between knobs, and of these most strikingly by short sparks. It is advisable to use for the experiments sparks 1 mm long between knobs of 5 – 10 mm diameter. Still, I have distinctly recognised the effect with sparks 2 cm long. Perhaps the absolute lengthening which such sparks experience is really as great as in the case of shorter sparks, but at all events the relative increase in length is much smaller; and hence the effect disappears in the differences which occur between the single discharges of the coil. I have not discovered any perceptible influence due to the material of the pole. I examined sparks between poles of copper, brass, iron, aluminum, tin, zinc, and lead. If there was any difference between the metals with respect to the susceptibility of the spark, it appeared to be slightly in favour of the iron. The poles must be clean and smooth; if they are dirty, or corroded by long use, the effect is not produced.

7. The relation between the two sparks is reciprocal. That is to say, not only does the larger and stronger spark increase the spark-length of the smaller one, but conversely the smaller spark has the same effect upon the spark-length of the larger one. For example, using the same apparatus as before,

let us adjust the spark-micrometer so that the discharge in it passes over regularly; but let the discharger be so adjusted that the discharges of the large coil just miss fire. On bringing the spark-micrometer nearer we find that these discharges are again produced; but that on introducing a plate the action ceases. For this purpose, the spark of the large coil must naturally be fairly sensitive; and, inasmuch as long sparks are less sensitive, the effect is not so striking. If both coils are just at the limit of their sparking distance complications arise which have probably no connection with the matter at present under discussion.<sup>1</sup> One frequently has occasion to notice a long spark being started by other ones which are much smaller, and in part this may certainly be ascribed to the action which we are investigating. When the discharge of a coil is made to take place between knobs, and the knobs are drawn apart until the sparks cease, then it (p. 68) is found that the sparking begins again when an insulated conductor is brought near one of the knobs so as to draw small side-sparks from it. I have proved to my entire satisfaction that the side-discharges here perform the function of an active spark in the sense of the present investigation. It is even sufficient to touch one of the knobs with a non-conductor, or to bring a point somewhat near it, in order to give rise to the same action. It appears at least possible that the function of an active spark is here performed by the scarcely visible side-discharges over the surface of the non-conductor and of the point.

8. The effect of the active spark spreads out on all sides in straight lines and forms rays exactly in accordance with the laws of the propagation of light. Suppose the axes of both of the sparks used to be placed vertically, and let a plate with a vertical edge be pushed gradually from the side in between the sparks. It is then found that the effect of the active spark is stopped, not gradually, but suddenly, and in a definite position of the plate. If we now look along the edge of the plate from the position of the passive spark, we find that the active spark is just hid by the plate. If we adjust the plate with its edge vertical between the two sparks and slowly remove it sideways, the action begins again in a definite position, and we now find that, from the position of the passive spark, the active spark has just become visible beyond the edge of the plate. If we place between the sparks a plate with a small vertical slit and move it backwards and forwards, we find that the action is only transmitted in one perfectly definite position, namely, when the active spark is visible through the slit from the position of the passive spark. If several plates with such slits are interposed behind each other, we find that in one particular position the action passes through the whole lot. If we seek these positions by trial, we end by finding (most easily, of course, by looking through) that all the slits lie in the vertical plane which passes through the two sparks. If at any distance from the active spark we place a plate with an aperture of any shape, and by moving the active spark about fix the limits of the space within which the action is exerted, we (p. 69) obtain as this limit a conical surface determined by the active spark as apex and by the limits of the aperture. If we place a small plate in any position in front of the active spark we find, by moving the passive spark about, that the plate stops the action of the active spark within exactly the space which it shelters from its light. It scarcely requires to be explained that

---

<sup>111</sup>[See Note 8 at end of book.]

the action is not only annulled in the shadows cast by external bodies, but also in the shadows of the knobs of the passive spark. In fact, if we turn the latter so that its axis remains in the plane of the active spark, but is perpendicular to it instead of being parallel, the action immediately ceases.

9. Most solid bodies hinder the action of the active spark, but not all; a few solid bodies are transparent to it. All the metals which I tried proved to be opaque, even in thin sheets, as did also paraffin, shellac, resin, ebonite, and india-rubber; all kinds of coloured and uncoloured, polished and unpolished, thick and thin glass, porcelain, and earthenware; wood, pasteboard, and paper; ivory, horn, animal hides, and feathers; lastly, agate, and, in a very remarkable manner, mica, even in the thinnest possible flakes. Further investigation of crystals showed variations from this behaviour. Some indeed were equally opaque, *e.g.*, copper sulphate, topaz, and amethyst; but others, such as crystallised sugar, alum, calc-spar, and rock-salt, transmitted the action, although with diminished intensity; finally, some proved to be completely transparent, such as gypsum (selenite), and above all rock-crystal, which scarcely interfered with the action even when in layers several centimetres thick. The following is a convenient method of testing: —The passive spark is placed a few centimetres away from the active spark, and is brought to its maximum length. The body to be examined is now interposed. If this does not stop the sparking the body is very transparent. But if the sparking is stopped, the spark-gap must be shortened until it comes again into action. An opaque substance is now interposed in addition to the body under investigation. If this stops the sparking once more, or weakens it, then the body must have been at any rate partially transparent; but if the plate produces no further effect, it must have been quite opaque. The influence of the interposed bodies increases with their thickness, (p. 70) and it may properly be described as an absorption of the action of the active spark; in general, however, even those bodies which only act as partial absorbers, exert this influence even in very thin layers.

10. Liquids also proved to be partly transparent and partly opaque to the action. In order to experiment upon them the active spark was brought about 10 cm vertically above the passive one, and between both was placed a glass vessel, of which the bottom consisted of a circular plate of rock-crystal 4 mm thick. Into this vessel a layer, more or less deep, of the liquid was poured, and its influence was then estimated in the manner above described for solid bodies. Water proved to be remarkably transparent; even a depth of 5 cm scarcely hindered the action. In thinner layers pure concentrated sulphuric acid, alcohol, and ether were also transparent. Pure hydrochloric acid, pure nitric acid, and solution of ammonia proved to be partially transparent. Molten paraffin, benzole, petroleum, carbon bisulphide, solution of ammonium sulphide, and strongly coloured liquids, *e.g.* solutions of fuchsine, potassium permanganate, were nearly or completely opaque. The experiments with salt solutions proved to be interesting. A layer of water 1 cm deep was introduced into the rock-crystal vessel; the concentrated salt solution was added to this drop by drop, stirred, and the effect observed. With many salts the addition of a few drops, or even a single drop, was sufficient to extinguish the passive spark; this was the case with nitrate of mercury, sodium hyposulphite, potassium bromide, and potassium iodide. When iron and copper salts were added, the extinction of the passive spark

occurred before any distinct colouring of the water could be perceived. Solutions of salt-ammoniac, zinc sulphate, and common salt<sup>1</sup> exercised an absorption when added in larger quantities. On the other hand, the sulphates of potassium, sodium, and magnesium were very transparent even in concentrated solution.

11. It is clear from the experiments made in air that some gases permit the transmission of the action even to considerable (p. 71) distances. Some gases, however, are very opaque to it. In experimenting on gases, a tube 20 cm long and 2.5 cm in diameter was interposed between the active and passive sparks; the ends of this tube were closed by thin quartz plates, and by means of two side-tubes any gas could at will be led through it. A diaphragm prevented the transmission of any action excepting through the glass tube. Between hydrogen and air there was no noticeable difference. Nor could any falling off in the action be perceived when the tube was filled with carbonic acid. But when coal-gas was introduced, the sparking at the passive spark-gap immediately ceased. When the coal-gas was driven out by air the sparking began again; and this experiment could be repeated with perfect regularity. Even the introduction of air with which some coal-gas had been mixed hindered the transmission of the action. Hence a much shorter stratum of coal-gas was sufficient to stop the action. If a current of coal-gas 1 cm in diameter is allowed to flow freely into the air between the two sparks, a shadow of it can be plainly perceived on the side remote from the active spark, *i.e.* the action of this is more or less completely annulled. A powerful absorption like that of coal-gas is exhibited by the brown vapours of nitrous oxide. With these, again, it is not necessary to use the tube with quartz-plates in order to show the action. On the other hand, although chlorine and the vapours of bromine and iodine do exercise absorption, it is not at all in proportion to their opacity. No absorptive action could be recognised when bromine vapour had been introduced into the tube in sufficient quantity to produce a distinct coloration; and there was a partial transmission of the action even when the bromine vapour was so dense that the active spark (coloured a deep red) was only just visible through the tube.

12. The intensity of the action increases when the air around the passive spark is rarefied, at any rate up to a certain point. The increase is here supposed to be measured by the difference between the lengths of the protected and the unprotected sparks. In these experiments the passive spark was produced under the bell-jar of an air-pump between adjustable poles which passed through the sides of the bell-jar. A window (p. 72) of rock-crystal was inserted in the bell-jar, and through this the action of the other spark had to pass. The maximum spark-length was now observed, first with the window open, and then with the window closed; varying air-pressures being used, but a constant current. The following table may be regarded as typical of the results: —

Air-pressure in mm of Mercury.	Length in mm of Spark with Window	Difference
--------------------------------	-----------------------------------	------------

---

<sup>111</sup> According to my experiments a concentrated solution of common salt is a more powerful absorbent than crystallised rock-salt. This result is so remarkable as to require confirmation.

	Closed.	Open.	
760	0·8	1·5	0·7
500	0·9	2·3	1·4
300	1·0	3·7	2·7
100	2·0	6·2	4·2
80	Very great	Very great	Undetermined

It will be seen that as the pressure diminishes, the length of the spark which is not influenced only increases slowly; the length of the spark which is influenced increases more rapidly, and so the difference between the two becomes greater. But at a certain pressure the blue glow-light (*Glimmlicht*) spread over a considerable portion of the cathode, the sparking distance became very great, the discharge altered its character, and it was no longer possible to perceive any influence due to the active spark.

13. The phenomenon is also exhibited when the sparking takes place in other gases than air; and also, when the two sparks are produced in two different gases. In these experiments the two sparks were produced in two small tubulated glass vessels which were closed by plates of rock-crystal and could be filled with different gases. The experiments were tried mainly because certain circumstances led to the supposition that a spark in any given gas would only act upon another spark in the same gas, and on this account the four gases — hydrogen, air, carbonic acid, and coal-gas — were tried in the sixteen possible combinations. The main conclusion arrived at was that the above supposition was erroneous. It should, however, be added that although there is no great difference in the efficiency of sparks when employed as active sparks in different gases, there is, on the other hand, a notable difference in their susceptibility when employed as passive sparks. Other things being equal, sparks in hydrogen experienced a perceptibly greater (p. 73) increase in length than sparks in air, and these again about double the increase of sparks in carbonic acid and coal-gas. It is true that no allowance was made for absorption in these experiments, for its effect was not known when they were carried out; but it could only have been perceptible in the case of coal-gas.

14. All parts of the passive spark do not share equally in the action; it takes place near the poles, more especially near the negative pole.<sup>1</sup> In order to show this, the passive spark is made from 1 to 2 cm long, so that the various parts of it can be shaded separately. Shading the anode has but a slight effect; shading the cathode stops the greater part of the action.

But the verification of this fact is somewhat difficult, because with long sparks there is a want of distinctness about the phenomenon. In the case of short sparks (the parts of which cannot be separately shaded) the statement can be illustrated as follows: — The passive spark is placed parallel to the

---

<sup>1</sup>[See Note 9 at end of book.]

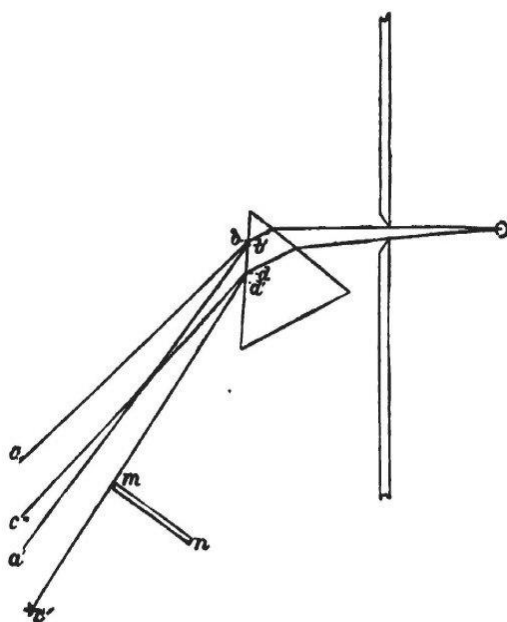
active one and is turned to right and left from the parallel into the perpendicular position until the action stops. It is found that there is more play in one direction than in the other; the advantage being in favour of that direction in which the cathode is turned towards the active spark. Whether the effect is produced entirely at the cathode, or only chiefly at the cathode, I have not been able to decide with certainty.

15. The action of the active spark is reflected from most surfaces. From polished surfaces the reflection takes place according to the laws of regular reflection of light. In the preliminary experiments on reflection a glass tube, 50 cm long and 1 cm in diameter, was used; this tube was open at both ends, and was pushed through a large sheet of cardboard. The active spark was placed at one end so that its action could only pass the sheet by way of the tube. If the passive spark was now moved about beyond the other end of the tube it was affected when in the continuation of the tubular space and then only; but in this case a far more powerful action was exhibited than when the tube was removed and only the diaphragm retained. It was this latter phenomenon that suggested the use of the tube; of itself it indicates a reflection from (p. 74) the walls of the tube. The spark-micrometer was now placed to one side of the beam proceeding out of the tube, and was so disposed that the axis of the spark was parallel to the direction of the beam. The micrometer was now adjusted so that the sparking just ceased; it was found to begin again if a plane surface inclined at an angle of  $45^\circ$  to the beam was held in it so as to direct the beam, according to the usual law of reflection, upon the passive spark. Reflection took place more or less from glass, crystals, and metals, even when these were not particularly smooth; also, from such substances as porcelain, polished wood, and white paper. I obtained no reflection from a well-smoked glass plate.

In the more accurate experiments, the active spark was placed in a vertical straight line; at a little distance from it was a largeish plate with a vertical slit, behind which could be placed polished plane mirrors of glass, rock-crystal, and various metals. The limits of the space within which the action was exerted behind the slit were then determined by moving the passive spark about. These limits were quite sharp and always coincided with the limits of the space within which the image of the active spark in the mirror was visible. On account of the feebleness of the action these experiments could not be carried out with unpolished bodies; such bodies may be supposed to give rise to diffused reflection.

16. In passing from air into a solid transparent medium the action of the active spark exhibits a refraction like that of light; but it is more strongly refracted than visible light. The glass tube used in the reflection experiments served here again for the rougher experiments. The passive spark was placed in the beam proceeding out of the tube and at a distance of about 30 cm from the end farthest from the active spark; immediately behind the opening a quartz-prism was pushed sideways into the beam with its refracting edge foremost. In spite of the transparency of quartz, the effect upon the passive spark ceased as soon as the prism covered the end of the tube. If the spark was then moved in a circle about the prism in the direction in which light would be refracted by the prism, it was soon found that there were places at which the effect was again produced. Now let the passive spark be

fixed in the (p. 75) position in which the effect is most powerfully exhibited; on looking from this point towards the tube through the prism the inside of the tube and the active spark at the end of it cannot be perceived; in order to see the active spark through the tube the eye must be shifted backwards through a considerable distance towards the original position of the spark. The same result is obtained when a rock-salt prism is used. In the more accurate experiments, the active spark was again fixed vertically; at some distance from it was placed a vertical slit, and behind this a prism. By inserting a Leyden jar the active spark could be made luminous, and the space thus



**Fig. 19**

illuminated behind the prism could easily be determined. With the aid of the passive spark, it was possible to mark out the limits of the space within which was exerted the action here under investigation. Fig. 19 gives (to a scale of  $\frac{1}{2}$ ) the result thus obtained by direct experiment. The space  $a b c d$  is filled with light; the space  $a' b' c' d'$  is permeated by the action which we are considering. Since the limits of this latter space were not sharp, the rays  $a' b'$  and  $c' d'$  were fixed in the following way:—The passive spark was placed in a somewhat distant position, about  $c'$ , at the edge of the tract within which the action was exerted. A screen  $m n$  (Fig. 19) with vertical edge was then pushed in sideways until it stopped the action. The (p. 76) position  $m$  of its edge then gave one point of the ray  $c' d'$ . In another experiment a prism of small refracting angles was used, and the width of the slit was made as small, and the spark placed as far from it as would still allow of the action being perceived. The visible light was then spread out into a short spectrum, and the influence of the active spark was found to be exerted within a comparatively limited region which corresponded to a deviation decidedly greater than that of the visible violet. Fig. 20 shows the positions of the rays as they were directly



drawn where the prism was placed,  $r$  being the direction of the red,  $v$ , of the violet, and  $w$  the direction in which the influence of the active spark was most powerfully exerted.

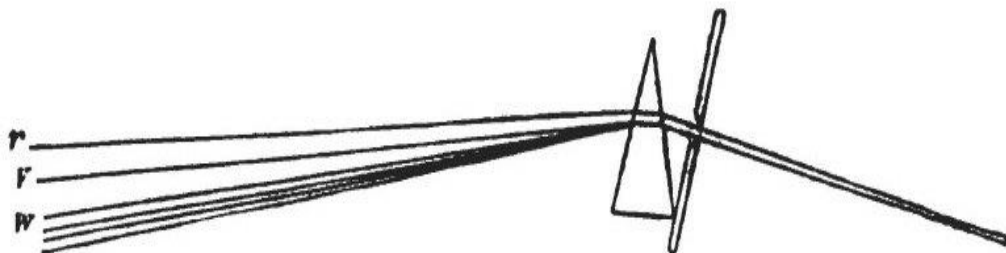


Fig. 20.

I have not been able to decide whether any double refraction of the action takes place. My quartz-prisms would not permit of a sufficient separation of the beams, and the pieces of calc-spar which I possessed proved to be too opaque.<sup>1</sup>

17. After what has now been stated, it will be agreed (at any rate until the contrary is proved) that the light of the active spark must be regarded as the prime cause of the action which proceeds from it. Every other conjecture which is based on known facts is contradicted by one or other of the experiments. And, if the observed phenomenon is an effect of light at all it must, according to the results of the refraction-experiments, be solely an effect of the ultra-violet light. That it is not an effect of the visible parts of the light is shown by the fact that glass and mica are opaque to it, while they are transparent to these. On the other hand, the absorption-experiments of themselves make it probable that the effect is due to ultra-violet light. Water, rock-crystal, and the sulphates of the alkalis are remarkably transparent to ultra-violet light and to the action here investigated; benzole and allied substances (p. 77) are strikingly opaque to both. Again, the active rays in our experiments appear to lie at the outermost limits of the known spectrum. The spectrum of the spark when received on a sensitive dry-plate scarcely extended to the place at which the most powerful effect upon the passive spark was produced. And, photographically, there was scarcely any difference between light which had, and light which had not, passed through coal-gas, whereas the difference in

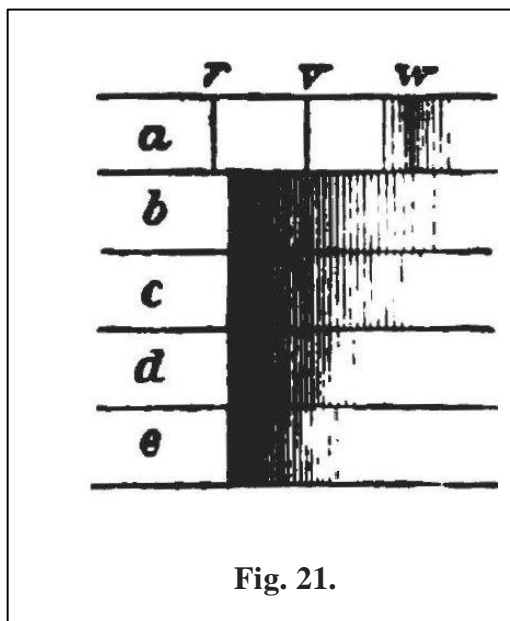


Fig. 21.

<sup>1</sup> [See Note 10 at end of book.]

the effect upon the spark was very marked. Fig. 21 shows the extent of some of the spectra taken. In *a*, the position of the visible red is indicated by *r*, that of the visible violet by *v*, and that of the strongest effect upon the passive spark by *w*. The rest of the series give the photographic impressions produced — *b* after simply passing through air and quartz, *c* after passing through coal-gas, *d* after passing through a thin plate of mica, and *e* after passing through glass.

18. Our supposition that this effect is to be attributed to light is confirmed by the fact that the same effect can be produced by a number of common sources of light. It is true that the power of the light, in the ordinary sense of the word, forms no measure of its activity as here considered; and for the purpose of our experiments the faintly visible light of the spark of the induction-coil remains the most powerful source of light. Let sparks from any induction-coil pass between knobs, and let the knobs be drawn so far apart that the sparks fail to pass; if now the flame of a candle be brought near (about 8 cm off) the sparking begins again. The effect might at first be attributed to the hot air from the flame; but when it is observed that the insertion of a thin small plate of mica stops the action, whereas a much larger plate of quartz does not stop it, we are compelled to recognise here again the same effect. The flames of gas, wood, benzene, etc., all act in the same way. The non-luminous flames of alcohol and of the Bunsen burner exhibit the same effect, and in the case of the candle-flame the action seems to proceed more from the lower, non-luminous part than from the upper and luminous part. From a small hydrogen flame scarcely, any effect could be obtained. The light from (p. 78) platinum glowing at a white-heat in a flame, or through the action of an electric current, a powerful phosphorus flame burning quite near the spark, and burning sodium and potassium, all proved to be inactive. So also, was burning sulphur; but this can only have been on account of the feebleness of the flame, for the flame of burning carbon bisulphide produced some effect. Magnesium light produced a far more powerful effect than any of the above sources; its action extended to a distance of about a metre. The limelight, produced by means of coal-gas and oxygen, was somewhat weaker, and acted up to a distance of half a metre; the action was mainly due to the jet itself: it made no great difference whether the lime-cylinder was brought into the flame or not. On no occasion did I obtain a decisive effect from sunlight at any time of the day or year at which I was able to test it. When the sunlight was concentrated by means of a quartz lens upon the spark there was a slight action; but this was obtained equally when a glass lens was used, and must therefore be attributed to the heating. But of all sources of light the electric is by far the most effective; it is the only one that can compete with the spark. If the knobs of an induction-coil are drawn so far apart that sparks no longer pass, and if an arc light is started at a distance of 1, 2, 3, or even 4 metres, the sparking begins again simultaneously, and stops again when the arc light goes out. By means of a narrow opening held in front of the arc light we can separate the violet light of the feebly luminous arc proper from that of the glowing carbons; and we then find that the action proceeds chiefly from the former. With the light of the electric arc, I have repeated most of the experiments already described, *e.g.* the experiments on the rectilinear propagation, reflection, and refraction of the action, as well as its absorption by glass, mica, coal-gas, and other substances.

According to the results of our experiments, ultra-violet light has the property of increasing the sparking distance of the discharge of an induction-coil, and of other discharges. The conditions under which it exerts its effect upon such discharges are certainly very complicated, and it is desirable that the action should be studied under simpler conditions, and especially without using an induction-coil. In endeavouring (p. 79) to make progress in this direction I have met with difficulties<sup>1</sup>. Hence, I confine myself at present to communicating the results obtained, without attempting any theory respecting the manner in which the observed phenomena are brought about.

---

<sup>1</sup> [See Note 11 at end of book.]

ON THE ACTION OF A RECTILINEAR ELECTRIC OSCILLATION UPON A  
NEIGHBOURING CIRCUIT

(*Wiedemann's Annalen*, 34, p. 155, 1888.)

IN an earlier paper<sup>1</sup> I have shown how we may excite in a rectilinear unclosed conductor the fundamental electric oscillation which is proper to this conductor. I have also shown that such an oscillation exerts a very powerful inductive effect upon a nearly closed circuit in its neighbourhood, provided that the period of oscillation of the latter is the same as that of the primary oscillation. As I intended to make use of these effects in further researches, I examined the phenomenon in all the various positions which the secondary circuit could occupy with reference to the inducing current. The total inductive action of a current-element upon a closed circuit can be completely calculated by the ordinary methods of electromagnetics. Now since our secondary circuit is closed, with the exception of an exceedingly short spark-gap, I supposed that this total action would suffice to explain the new phenomena; but I found that in this I was mistaken. In order to arrive at a proper understanding of the experimental results (which are not quite simple), it is necessary to regard the secondary circuit also as being in every respect unclosed. Hence it is not sufficient to pay attention to the integral force of induction; we must take into consideration the distribution of the electromagnetic force along the various parts of the circuit: nor must the electrostatic force which proceeds from the charged ends of the oscillator be neglected. The reason of this is the rapidity with which (p. 81) the forces in these experiments alter their sign. A slowly alternating electrostatic force would excite no sparks in our secondary conductor, even if its intensity were very great, since the free electricity of the conductor could distribute itself, and would distribute itself, in such a way as to neutralize the effect of the external force; but in our experiments the direction of the force alters so rapidly that the electricity has no time to distribute itself in this way.

For the sake of convenience, I will first sketch the theory and then describe the phenomena in connection with it. It would indeed be more logical to adopt the opposite course; for the facts here communicated are true independently of the theory, and the theory here developed depends for its support more upon the facts than upon the explanations which accompany it.

---

<sup>1</sup>See II., p. 29.

### *The Apparatus*

Before we proceed to develop the theory, we may briefly describe the apparatus with which the experiments were carried out, and to which the theory more especially relates. The primary conductor consisted of a straight copper wire 5 main diameter, to the ends of which were attached spheres 30cm in diameter made of sheet-zinc. The centres of these latter were 1 metre apart. The wire was interrupted in the middle by a spark-gap  $\frac{3}{4}$  cm long; in these oscillations were excited by means of the most powerful discharges which could be obtained from a large induction-coil. The direction of the wire was horizontal, and the experiments were carried out only in the neighbourhood of the horizontal plane passing through the wire. This, however, in no way restricts the general nature of the experiments, for the results must be the same in any meridional plane through the wire. The secondary circuit, made of wire 2 mm thick, had the form of a circle of 35 cm radius which was closed with the exception of a short spark-gap (adjustable by means of a micrometer-screw). The change from the form used in the earlier experiments to the circular form was made for the following reason. Even the first experiments had shown that the spark-length was different at different points of the secondary conductor, even when the position of the conductor as a whole was not (p. 82) altered. Now the choice of the circular form made it easily possible to bring the spark-gap to any desired position. This was most conveniently done by mounting the circle so that it could be rotated about an axis passing through its centre, and perpendicular to its plane. This axis was mounted upon various wooden stands in whatever way proved from time to time most convenient for the experiments.

With the dimensions thus chosen, the secondary circuit was very nearly in resonance with the primary. It was tuned more exactly by soldering on small pieces of sheet-metal to the poles so as to increase the capacity, and increasing or diminishing the size of these until a maximum spark-length was attained.

### *Analysis of the Forces acting on the Secondary Circuit*

We shall assume that the electric force at every point varies as a simple periodic function of the time, changing its sense without changing its direction; we shall further assume that this variation has the same phase at all points. This is true at any rate in the neighbourhood of the primary conductor; and for the present we shall restrict our attention to points which lie near it. Any point on the secondary circuit is determined by its distance  $s$  measured from the spark-gap along the circle. We denote by  $\Sigma$  the component of the electric force which acts at any moment at the point  $s$  in the direction of the element  $ds$  of the circle. Then  $\Sigma$  is a function of  $s$  which, after passing round the whole circumference  $S$ , returns to its original value.  $\Sigma$  can therefore be developed in circular functions, beginning thus—

$$\Sigma = A + B \cos \frac{2\pi s}{S} + \dots + B' \sin \frac{2\pi s}{S} + \dots$$

We shall neglect the higher terms. The effect of this will be that our results will only be approximately correct; in especial, weak sparks will be found to occur at places where our calculations indicate that the sparking should disappear. But for the present our experiments are not sufficiently accurate to justify us in paying any attention to these higher terms. Let us therefore consider more closely the terms which have been referred to.

(p. 83) In the first place, the force  $A$  acts in the same sense, and is of the same magnitude at all part of the circle.  $A$  is independent of the electrostatic force; for the integral of the latter, taken all round the circuit, is zero.  $A$  corresponds to the total induced electromotive force. We know that this is measured by the change, per unit of time, in the number of magnetic lines of force which pass through the circle. If we regard the magnetic field in which the circle lies as being homogeneous,  $A$  will be proportional to the component of the magnetic force perpendicular to the plane of the secondary circuit.  $A$  will therefore vanish when the direction of the magnetic force lies in the plane of the secondary circuit. The force  $A$  gives rise to an oscillation the intensity of which is independent of the position of the spark-gap in the circle; we shall denote by  $\alpha$  the spark-length which corresponds to this oscillation.

Turning now to the two other terms, we note, in the first place, that the force  $B' \sin 2\pi s/S$  is not in a position to excite the fundamental oscillation of our circle. For it is completely symmetrical on both sides of the spark-gap; it acts in the same sense upon both poles, and therefore cannot produce any difference between them. The force  $B \cos 2\pi s/S$  behaves otherwise. If we start from the spark-gap and divide the circle into four equal parts, we find that this force acts in the same direction in the two parts which lie opposite the spark-gap, and that here it powerfully excites the fundamental oscillation. It is true that  $B$  acts in an opposite direction in those parts which lie nearest the spark-gap; but the latter parts cannot here exert as powerful an effect. For since the current at the open ends of the circle must always be zero, the electricity cannot move with the same freedom near these ends as in the middle of the circle. To elucidate the meaning of this somewhat brief statement we may take as an illustration a string stretched between two fixed points. If the middle and outer parts of the string are acted upon by forces in opposite directions, the string as a whole will move as if acted upon by the former set of forces, and the fundamental note of the string will be produced if the alternations of these forces synchronize with this note. Thus, the term  $B \cos 2\pi s/S$  will excite the fundamental oscillation of our circle, and the direction of the oscillation will be (p. 84) the same as if the force in the parts opposite the spark-gap were alone effective. Further, the intensity of the oscillation will be proportional to the quantity  $B$ . To find out what this quantity means, let us assume that the electric field in which the circle lies is approximately homogeneous. Let  $E$  denote the total electric force acting in this field,  $\omega$  the angle which its direction makes with the plane of the secondary circle, and  $\theta$  the angle which the projection of the force upon this plane makes with the straight line drawn from the centre

to the spark-gap. Then  $\Sigma = E \cos \omega \sin (2\pi s/S - \theta)$  approximately,<sup>1</sup> and therefore  $B = - E \cos \omega \sin \theta$ . Hence, the value of B depends directly upon the total force; electrostatic as well as electromagnetic causes contribute towards it. B becomes zero when  $\omega = 90^\circ$ , *i.e.*, when the total force is perpendicular to the plane of the circle; and in this case it will be zero for all positions of the spark-gap in the circle.

But B also becomes zero when  $\theta = 0$ , *i.e.*, when the projection of the total force upon the plane of the circle coincides with the line drawn from the centre to the spark-gap. If in any given position of the circle we suppose the spark-gap to move round it, the angle  $\theta$  alters, and corresponding alterations are produced in the value of B, in the intensity of the oscillation, and in the spark-length. Thus, the spark-length, which corresponds to the second term of our series, can be approximately represented by the expression  $\beta \sin \theta$ .

The two terms which produce respectively the spark-lengths  $\alpha$  and  $\beta \sin \theta$  have always the same phase. Hence, the induced oscillations have also the same phase, and their amplitudes have to be added together. Now inasmuch as the spark-lengths are approximately proportional to the total amplitudes, it follows that the spark-lengths have also to be added together. If in any given position of the circle we suppose the spark-gap to move round it, the spark-length must accordingly be represented by an expression of the form  $\alpha + \beta \sin \theta$ . Equal absolute values of this expression indicate equal spark-lengths, whatever the sign may be; for there is nothing in the spark-length which corresponds to direction of (p. 85) oscillation. The absolute values of  $\alpha$  and  $\beta$  could only be determined by a much more detailed development of the theory; but we have indicated the conditions upon which they depend, and this will be enough to enable us to understand the phenomena.

### *The Plane of the Secondary Circuit is Vertical*

Let us now place our circle anywhere in the neighbourhood of the primary conductor, with its plane vertical and its centre in the horizontal plane which passes through the primary conductor. As long as the spark-gap lies in the horizontal plane, either on the one side or the other, we observe no sparks; but in other positions of the spark-gap we perceive sparks of greater or less length. The disappearance of the sparks occurs at two diametrically opposite points; it follows that the  $\alpha$  of our formula is here always zero, and that  $\theta$  becomes zero when the spark-gap lies in the horizontal plane. From this, we draw the following conclusions: —In the first place, that the lines of magnetic force in the horizontal plane are everywhere vertical, and therefore form circles around the primary oscillation, as indeed is required by theory. Secondly, that at all points of the horizontal plane the lines of electric force lie in this plane itself, and therefore, that everywhere in space they lie in planes passing

---

<sup>111</sup> If the field is really homogeneous, then  $A=0$ ; and A will therefore be small when the field is approximately homogeneous. Nevertheless, the force A may give rise to an oscillation of the same order of magnitude as that produced by the force  $B \cos 2\pi s/S$ .

through the primary oscillation which is also required by theory. If while the circle is in any one of the positions here considered, we turn it about its axis so as to remove the spark-gap out of the horizontal plane, the spark-length increases until the sparks arrive at the top or the bottom of the circle, in which positions they attain a length of 2-3 mm. It can be proved in various ways that the sparks thus produced correspond, as our theory requires, to the fundamental oscillation of our circle, and not, as might be suspected, to the first overtone. By making small alterations in the circle, for example, we can show that the oscillation which produces these sparks is in resonance with the primary oscillation; and this would not hold for the overtones. Again, the sparks disappear when the circle is cut at the points where it intersects the horizontal plane, although these points are nodes with respect to the first overtone.

(p. 86) If we now maintain the spark-gap at the highest point and turn the circle round about a vertical axis passing through its centre and the spark-gap, we find that during a complete revolution the sparks twice reach a maximum length and twice become zero or else very nearly disappear. Clearly the maximum positions are those in which the direction of the electric force lies in the plane of the circle ( $\omega = 0$ ); whereas the minimum positions are those in which the direction of the electric force is perpendicular to this plane ( $\omega = 90^\circ$ ). Hence, we now have a means of finding out the direction of the electric force at any point. I have investigated at a number of points the positions in which the sparks either become very short or completely disappear. In the lower part of Fig. 22

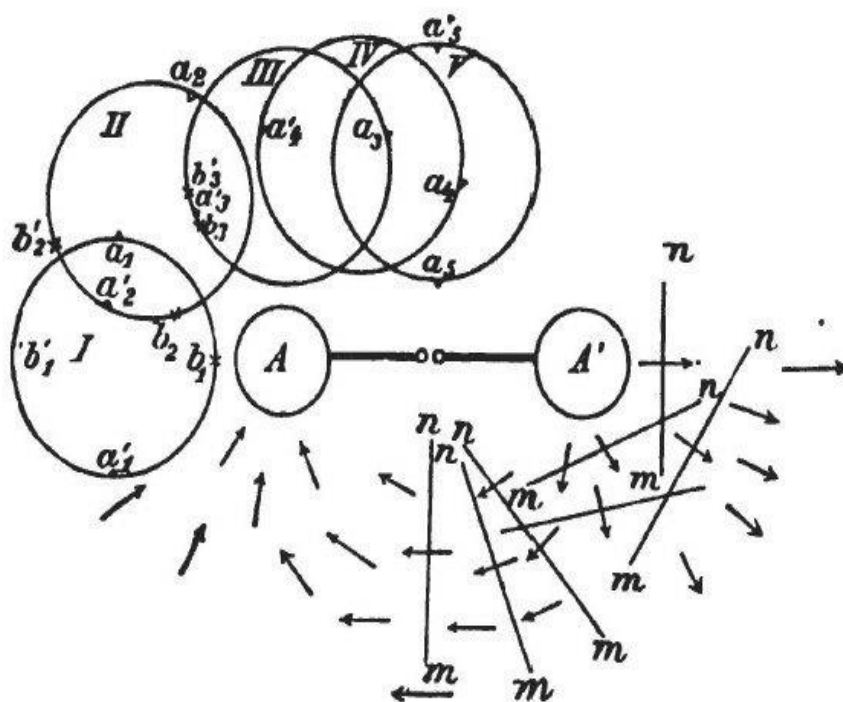


Fig. 22.



these are shown as taken directly from the experimental results.  $A A'$  is the primary conductor. The straight lines  $m n$ , are the projections of the secondary conductor on the horizontal plane; but all the observed positions are not shown in the illustration. The short lines, normal to the lines  $m n$ , indicate the direction of the force. Since this force nowhere becomes zero, as we pass from the sphere  $A$  to the sphere  $A'$ , it does not change its sign. Hence, we may furnish these normals with arrow-heads, as has been done in the figure. With regard to this figure, we remark: —

1. The distribution of the total force in the neighbourhood of the rectilinear oscillation is very similar to the distribution of the electrostatic force which proceeds from the ends of the (p. 87) oscillation. Near the centre of the oscillation in especial the direction of the total force coincides with that of the electrostatic force; the opposing electromagnetic force must therefore be overpowered. Theory also indicates that in this neighbourhood the force of electromagnetic induction should be weaker than the electrostatic force.

2. Still we can quite easily recognise the effect of the electromagnetic induction. For the lines of force appear to a certain extent to be pushed away from the axis of the oscillation; in going from  $A$  to  $A'$  they make a wider circuit than they would if the electrostatic force alone were in operation.<sup>1</sup>The explanation of this is that the force of induction weakens the components of the electrostatic force which are parallel to the primary conductor, whereas they are without influence upon the components which are perpendicular to the primary conductor.

### *The Plane of the Secondary Circle is Horizontal*

We shall explain by reference to the upper half of Fig. 22 the phenomena which are observed when the plane of the secondary circle is horizontal. First suppose the circle to be brought into position  $I$ , in which its centre lies on the prolongation of the primary oscillation. After what has been already stated, we may at once conclude from purely geometrical considerations that the sparks will disappear when the spark-gap is at the points  $b_1$  and  $b_1'$ ; and also, that maximum and equal spark-lengths should be observed at the points  $\alpha_1$  and  $\alpha_1'$ . In my experiments the lengths of these sparks were 2.5 mm.

Now let us shift the circle sideways into the position  $II$ . Here, lines of magnetic force pass through the circle. The integral of the force of induction taken round the circle does not vanish;  $\alpha$  is not zero. We may therefore expect to find that our expression  $\alpha + \beta \sin \theta$ , in which the value of  $\alpha$  at first is small, will have (since we pay no regard to sign) two maxima of unequal value, viz.  $\beta + \alpha$  and  $\beta - \alpha$ . These will occur when  $\theta = 90^\circ$ , and the line joining them will be perpendicular to the direction of the electric force. These two maxima must be separated by two points at which no sparking (p. 88) occurs, and these points should lie near the smaller maximum. This agrees with the experimental results. For in the points  $b_2$  and  $b_2'$  we again find our null-points which have been drawn closer together; between

---

<sup>111</sup>The original drawing showed this more plainly than the reduced copy does.

these at  $\alpha_2$  and  $\alpha'_2$  are maximum spark-lengths, and that at  $\alpha_2$  is found to be 3.5mm, while that at  $\alpha'_2$  is 2 mm. The line  $\alpha_2\alpha'_2$  is very nearly perpendicular to the direction of the electric force. In order to complete our explanation, we have yet to show that  $a_2$  must correspond to the sum, and  $a'_2$  to the difference of the actions. Let us consider the case in which the spark-gap lies at  $\alpha_2$ . While the sphere  $A$  is positively charged, the total electric force in those parts of the circle which lie opposite to  $\alpha_2$  urges positive electricity in a direction away from  $A$ ; it tends to move positive electricity in a circular direction, which in the case of our illustration would be the direction of the hands of a clock. Between the spheres  $A$  and  $A'$  the electrostatic force at the same time is directed from  $A$  towards  $A'$ ; the force of induction which is always opposed to it is therefore, in the neighbourhood of the conductor, directed towards  $A$ , and every wherein space is parallel to this direction. Now since this force in our circle acts more strongly in the neighbourhood of the primary oscillation than it does at a distance from the latter, it follows that this force also tends to set positive electricity in motion in a circular direction corresponding to that of the hands of a clock. Hence at  $\alpha_2$  both causes act in the same sense and so strengthen each other. Similarly, it can be shown that at  $\alpha'_2$  they act in opposite senses and weaken each other. Thus, the phenomenon is completely explained.

Now suppose our circle to be moved nearer the centre of the primary oscillation to *III*. Here the two points at which the spark is extinguished coincide into one. One maximum disappears; and opposite to a very extended tract of extinction  $a'_2$  lies the second maximum with a spark-length of 4 mm. Here evidently  $\alpha = \beta$ , and the spark-length is represented by the formula  $\alpha(1 + \sin \theta)$ . The line  $\alpha_3\alpha'_3$  is again perpendicular to the direction of the electric force. If we move the circle still nearer to the centre of the primary oscillation,  $\alpha$  becomes greater than  $\beta$ . The expression  $\alpha + \beta \sin \theta$  can no longer be zero for any value of  $\theta$ , but it oscillates between a maximum value  $\alpha + \beta$  and a minimum value  $\alpha - \beta$ . (p. 89) Experiment also shows that in the positions under consideration there are no longer any points at which the sparks are extinguished; there are only maxima and minima. In position *IV* we have at  $\alpha_4$  a spark-length of 5.5 mm, and at  $\alpha'_4$  a length of 1.5 mm. In position *V* we have at  $\alpha_6$  a spark-length of 6 mm, at  $\alpha'_6$  the spark-length is 2.5 mm,<sup>1</sup> and at intermediate points we have intermediate values. In passing over from position *III* to position *V*, the join  $\alpha \alpha'$  turns sharply from a direction parallel to the primary current into a direction perpendicular to it; it therefore always remains approximately perpendicular to the direction of the electric force.

In the last-mentioned positions the sparks are mainly due to electromagnetic induction. Hence, in my first paper, I made no error in speaking of the phenomena in these positions as being electromagnetic effects. Nevertheless, the production of sparks even in these positions is completely independent

---

<sup>1</sup> In these positions the secondary spark must, in order to avoid disturbing causes, be protected from the light of the primary spark.

of electrostatic causes only when we bring the spark-gap into the mean position between maximum and minimum, in which particular position  $\beta \sin \theta$  becomes zero.

### *The Remaining Positions of the Secondary Circle*

The positions which as yet have not been discussed, and in which the secondary circle is inclined to the horizontal plane, can be regarded as intermediate states between those which have already been described. In all such cases I have found the theory confirmed and have noticed no phenomenon which did not fit in with it. Let us consider one case only. Suppose the circle in the first place to lie in the horizontal plane and in position  $V$ , with the spark-gap turned towards the primary oscillation at  $\alpha_6$ . Now let the circle be turned about a horizontal axis passing through its centre parallel to the primary oscillation, in such a way that the spark-gap rises. While the circle turns, the electric force is always at right angles to the straight line drawn from its centre to the spark-gap; thus  $\theta$  is always equal to  $90^\circ$ . The value of  $\beta$  is approximately constant in all positions. But  $\alpha$  varies approximately as the (p. 90) cosine of the angle  $\phi$ , between the plane of the circle and the horizontal plane, since  $\alpha$  is proportional to the number of lines of magnetic force cut by the circle. Thus if  $\alpha_0$  denote the value of  $\alpha$  in the initial position, the value of  $\alpha$  in any other position is  $\alpha_0 \cos \phi$ , and it may therefore be expected that the relation between the spark-length and the angle  $\phi$ , may be given by the expression  $\alpha_0 \cos \phi + \beta$ , where  $\alpha_0 > \beta$ . Experiment confirms this. For as we raise the spark-gap the sparking distance steadily decreases from its initial value of 6 mm and acquires at the highest point in its circuit a length of 2 mm. It then sinks farther in the second quadrant almost to zero, increases again to the smaller maximum of 2.5 mm, which occurs in the horizontal plane, again decreases, and after passing through the same stages in the reverse order it returns to its original value.

Let us suppose that in the course of the movements above described we hold the circle in the position in which the spark-gap is at its highest point. If now we raise the circle vertically as a whole, the sparks become weaker and ultimately, they almost disappear; if we lower the circle vertically the sparking becomes more vigorous. But if under similar circumstances the spark-gap is at its lowest point, the effects are reversed. These results may be deduced by purely geometrical reasoning from what has been already stated.

### *The Forces at Greater Distances*

We have already mentioned a method of ascertaining experimentally the direction of the total electric force at any point. There was no difficulty in extending the application of this method to greater distances, and there was all the more reason for making the experiment because the existing theories of electromagnetics differ widely in their views as to the distribution of the force in the neighbourhood of an unclosed current. We therefore place the plane of our circle in a vertical position,

bring the spark-gap to the highest point, and by turning the circle about a vertical axis we try to ascertain in what position the sparks are longest and in what position they disappear or nearly disappear. But when we get to a distance of 1 – 1.5 metre from the primary oscillation, (p. 91) we are met by an unexpected difficulty. For the maxima and minima lose their distinctness, except in particular positions, so that it becomes difficult to adjust the position of the circle for either; indeed, at certain places the differences between the spark-lengths during a revolution of the circle are so small that it becomes impossible to specify any definite direction of the force. Now observe that this difficulty again disappears when we pass beyond a distance of about 2 metres. Certainly, the sparks are now very small and need to be observed in the dark and with the aid of a lens; but they disappear sharply in a definite position of the circle, and are strongest in a position at right angles to this. When the distance is further increased the spark-length only diminishes slowly. I have not been able to decide the farthest distance at which they could be observed. When I placed the primary conductor in one corner of a large lecture-room 14 metres long and 12 metres broad, the sparks could be perceived in the farthest part of the room; the whole room seemed filled with the oscillations of the electric force. It is true that in the neighbouring rooms the action could not be perceived even at small distances; solid walls exercise a powerful damping effect upon it. In the lecture-room referred to I ascertained the distribution of the force as follows: —Wherever the direction of the force could be definitely determined I marked it by a chalk line on the floor; but wherever it could not well be determined I drew a star upon the floor. Fig. 23, shows on a reduced scale a portion of the diagram thus made; with reference to it we note: —

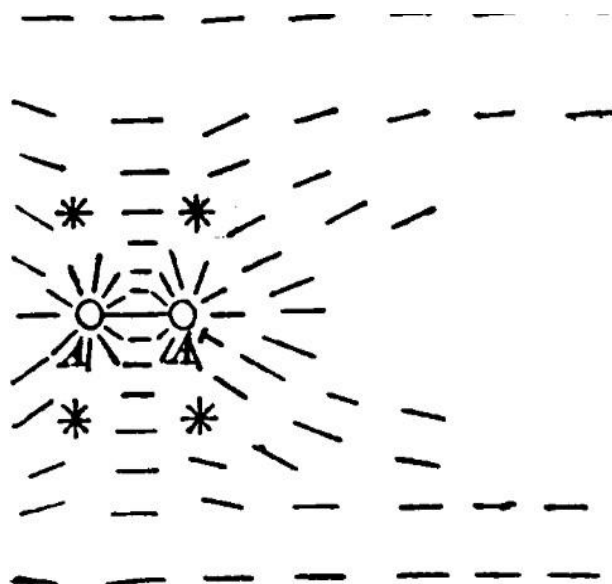


Fig. 23

1. At distances beyond 3 metres the force is everywhere parallel to the primary oscillation. This is clearly the region in which the electrostatic force has become negligible, and the electromagnetic force alone is effective. All theories agree in this—that the electromagnetic force of a current-element

is inversely proportional to the distance, whereas the electrostatic force ( as the difference between the effects of the two poles)is inversely proportional to the third power of the distance. (p. 92) It is worthy of notice that, in the direction of the oscillation, the action becomes weaker much more rapidly than in the perpendicular direction, so that in the former direction the effect can scarcely be perceived at a distance of 4 metres, whereas in the latter direction it extends at any rate farther than 12 metres. Many of the elementary laws of induction which are accepted as possible will have to be abandoned if tested by their accordance with the results of these experiments.

2. As already stated, at distances less than a metre the character of the distribution is determined by the electrostatic force.

3. Along one pair of straight lines the direction of the force can be determined at every point. The first of these straight lines is the direction of the primary oscillation itself; the second is perpendicular to the primary oscillation through its centre. Along the latter the magnitude of the force is at no point zero; the size of the sparks induced by it diminishes steadily from greater to smaller values. In this respect also the phenomena contradict certain of the possible elementary laws which require that the force should vanish at a certain distance.

4. One remarkable fact that results from the experiment is, that there exist regions in which the direction of the force cannot be determined; in our diagram each of these is indicated by a star. These regions form in space two rings around the rectilinear oscillation. The force here is of approximately the same strength in all directions, and yet it cannot act simultaneously in these different directions; hence it must assume in succession these different directions. Hence the phenomenon can scarcely be explained otherwise than as follows: — The force does not retain the same direction and alter its magnitude; its magnitude remains approximately constant, while its direction changes, passing during each oscillation round all the points of the compass. I have not succeeded in finding an explanation of this behaviour, either in the terms which have been neglected in our simplified theory, or in the harmonics which are very possibly mingled with our fundamental vibration. And it seems to me that none of the theories which are based upon the supposition of direct action- (p. 93) at-a-distance would lead us to expect anything of this kind. But the phenomenon is easily explained if we admit that the electrostatic force and the electromagnetic force are propagated with different velocities. For in the regions referred to these two forces are perpendicular to one another, and are of the same order of magnitude; hence if an appreciable difference of phase has arisen between them during the course of their journey, their resultant, —the total force— will, during each oscillation, move round all points of the compass without approaching zero in any position.

A difference between the rates of propagation of the electrostatic and electromagnetic forces implies a finite rate of propagation for at least one of them. Thus, it seems to me that we probably have before us here the first indication of a finite rate of propagation of electrical actions.



(p. 95)

## VI

### ON ELECTROMAGNETIC EFFECTS PRODUCED BY ELECTRICAL DISTURBANCES IN INSULATORS

(*Sitzungsber. d. Berl. Akad.* Nov. 10, 1887. *Wiedemann's Ann.* 34, p. 273.)

It is obviously a fundamental assumption in the most promising electrical theories that electrical disturbances in insulators are accompanied, not only by the electrostatic actions (which are known with certainty to exist), but also by the corresponding electromagnetic actions. All that we know about electrical phenomena has long tended to raise this assumption to a high degree of probability; but as yet it can scarcely be said to follow with certainty from any direct observations. In the following pages are described a series of researches which will, I hope, assist in filling this gap. They exhibit an electromagnetic effect which proceeds from insulators; they can be repeated with unfailing success and without extensive appliances. A magnetic effect arising out of processes in an insulator has already been exhibited in an experiment by Herr Röntgen,<sup>1</sup> if we assume that the final communication relating to this experiment confirms the interpretation first assigned to it.

In order to detect the electromagnetic action, I made use of the extremely rapid electric oscillations which can be excited in unclosed metallic conductors by the appropriate use of sparks.<sup>2</sup> The method is the following: —A primary conductor in which oscillations of the kind referred to are excited, acts inductively (p. 96) upon a secondary conductor. The induced disturbance is observed by inserting a spark-gap. In order to make the observation delicate both conductors are adjusted to the same period of oscillation. The secondary conductor is now brought as near to the primary as possible, but in such a position that the forces acting upon its various parts neutralize each other, so that it remains free from sparks. If the equilibrium is now upset by bringing other conductors near, sparking commences again; the system acts as a kind of induction-balance. But, it is an induction-balance which has this

---

<sup>1</sup> W. C. Röntgen, *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, 1885, p. 195 Cp. also the more recent paper, *Sitzungsber. der Berl. Akad.*, 1888, p. 23.

<sup>2</sup> See II. and V.

peculiarity, that it also indicates a change when large insulating masses are brought near it. For the oscillations are so rapid that the quantities of electricity displaced in insulators by dielectric polarization are of the same order of magnitude as those which are set in motion by conduction in metals.

### The Apparatus

Fig. 24 shows the apparatus by means of which this principle was put into practice. Only the

essential parts are shown; we have to imagine them as connected by a light wooden frame.  $A A'$  is the primary conductor, consisting of two square brass plates 40 cm in the side, which are connected by a copper wire  $\frac{1}{2}$  cm thick and 70 cm long. In the middle of the latter a spark-gap  $\frac{1}{4}$  cm is inserted; the poles consist of well-polished brass knobs. If we now conduct to the latter the most powerful discharges of a large induction-coil, the plates  $A$  and  $A'$  are first electrified in opposite senses and then, at the instant when the spark passes, discharge into one another, thereby giving rise to the oscillations which are peculiar to the conductor  $A A'$ , having a period which may be estimated as the hundred-millionth part of a second. The discharge of the induction-coil which immediately follows has no more effect upon the phenomena which we are here considering than has the presence of the induction-apparatus and the wires leading to it. The secondary conductor  $B$  form an exact circle of 35 cm radius, and is made of copper wire 2 mm thick; it contains at  $f$  a spark-gap the length of which can be varied by a fine screw from a few millimetres down to a few hundredths of a millimetre. A circle having the above dimensions (p. 97) is in resonance with the primary conductor, and when it is placed in a suitable position, secondary sparks 6 - 7 mm long can be obtained. For the purpose of our experiment the circle is mounted so that it can rotate about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane; when the circle is rotated thus its position is not altered, but the spark-gap rotates with it. The position of the axis is such that its direction lies in the plane of the plates  $A$  and  $A'$ , and in fact coincides with the line  $m n$  which is symmetrical with respect to them. If we add that the smallest distance between  $A A'$  and  $B$  is 12 cm, the description of our apparatus is complete. The phenomena which we now observe by means of it are the following: —

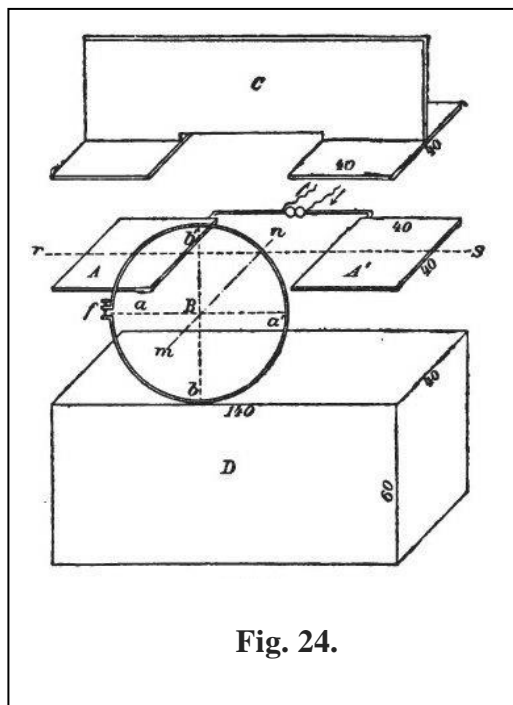


Fig. 24.

When the spark-gap/ lies in the horizontal plane of  $A A'$ , *i.e.* at  $a$  or at  $a'$ , it is entirely free from sparks. When the circle is rotated a few degrees in either direction from this position, minute sparks arise. These small sparks increase in length and strength as the spark-gap is removed farther from the position of equilibrium and reach a maximum length of about 3 mm when  $f$  is at the highest and lowest points,  $b$  and  $b'$  respectively, of the circle. The oscillations of the secondary conductor, which



are thus made manifest are always due to the forces acting upon those parts of the circle  $B$  which are opposite to the spark-gap. Although in form it is nearly closed,  $B$  must be regarded as an unclosed circuit; those parts of it which lie on either side of the spark-gap act only as capacities of the ends of the current. The effective force is the resultant of the electrostatic force and the electromagnetic force which (p. 98) is opposed to it; the former, being the greater of the two, determines the direction of the total force. If we regard the direction of this force and the amplitude of the oscillation excited by it as being positive when  $f$  is at the highest point of the circle, then we must regard the force and the amplitude as being negative, with reference to a fixed direction in the circle  $B$ , when  $f$  is at the lowest point. The amplitude changes sign as it passes through zero in the position of equilibrium. It will assist us in what follows if we also consider here the phenomena which occur when we shift the circle  $B$  a little downwards, parallel to itself and without moving it out of its plane. When this is done the sparking distance increases at the highest point and diminishes at the lowest point; the points which are free from sparks, —the null-points, as we may call them, — no longer lie on the horizontal line through the axis, but appear to be rotated downwards through a certain angle on either side. The slight displacement has changed the effect of the force of induction, although it has scarcely changed the effect of the electrostatic force, for the former, when integrated around the closed circle  $B$ , now gives an integral which is not zero; hence it gives rise to an oscillation the sign of whose amplitude is independent of the position of the spark-gap; and according to our convention this sign is positive. For the direction of the integrated force of induction is opposite to that of the electrostatic force in the upper half, but is the same as that of the electrostatic force in the lower half of the circle  $B$ , in which latter we regard the sign of the electrostatic force as being positive. Since the oscillation which is now superposed does not differ in phase from the former one, their amplitudes are simply added together. This explains the results observed.

The explanations of the phenomena which we have here given will be found more completely established in the preceding paper.<sup>1</sup>

### *Effects produced by Approach of Conductors*

Hitherto it has been assumed that the conductors  $A A'$  and  $B$  are set up in a large room as far away as possible from all objects which might disturb the action. Such an arrangement (p. 99) is necessary if we wish to secure an actual disappearance of the sparks at  $a$  and  $a'$ . For we soon observe that sparks are produced when conductors are brought near, *e.g.*, when long metal rods are placed on the floor underneath the apparatus. A little attention shows that even the body of the observer exerts a perceptible influence. If he places himself 1 – 2 metres away on the prolongation of the axis  $mn$  the apparatus is free from sparks; but if he approaches nearer in order to examine the sparks, he always finds them present. These very minute sparks have to be observed from a distance, and it follows as a necessary

---

<sup>1</sup> See V.

consequence that the observer must work in a dark room, and that his eyes must be rendered more sensitive by not exposing them to light beforehand.

We have now to choose a conductor which will produce a moderately large effect, and of which we may assume the oscillation period to be smaller than that of our primary oscillation. These conditions are fulfilled by the conductor made of sheet-metal, which is shown at  $C$  in our illustration. When it is lowered towards the primary conductor  $A A'$ , we observe the following effects: —The spark-length has decreased at the highest point  $b$ , and has increased at the lowest point  $b'$ ; the null-points have moved upwards, *i.e.*, towards the conductor  $C$ , whereas there now is noticeable sparking where the null-points originally were. From the last experiment in the preceding section, we know what effect would be produced by shifting the conductor  $A A'$  upwards. The same effect, — qualitatively, — would be produced by introducing above  $A A'$  a second current having the same direction as that in  $A A'$ . Now our conductor  $C$  exerts exactly the opposite effect; and, if we assume that there exists in  $C$  a current which is always in the opposite direction to that in  $A A'$ , this effect is naturally explained as being due to an inductive action proceeding from  $C$ . This assumption is indeed necessary, for the preponderating electrostatic force tends to produce such a current; and, since the natural period of oscillation of the conductor is less than that of the force, the current must have the same phase as the exciting force. In order to test the correctness of this explanation I proceeded to experiment further in the following way: — I left the horizontal plates of the conductor  $C$  in position, but removed the vertical sheet, and in place of it (p. 100) introduced in succession longer and thinner wires, with a view to increasing gradually the period of oscillation of the conductor  $C$ . The results of this progressive change were as follows: — At first the null-points retreated farther and farther upwards, but at the same time became more and more indistinct; they were no longer points of extinction, but simply points of minimum spark-length. Hitherto the spark-length at the highest point was much smaller than at the lowest point; but after the disappearance of the zero-points it began to increase again. At a certain stage the sparks in the highest and lowest positions again became equal, but no null-points could be found anywhere in the circle; in all positions there was vigorous sparking. From here on the spark-length at the lowest point grew less, and in its neighbourhood there presently appeared two null-points, which at first were only feebly marked; these soon became more distinct, and approached towards the points  $a$  and  $a'$ , but always lay on the half of the circle remote from the conductor  $C$ . Finally, they coincided with the points  $a$  and  $a'$ ; the electrical condition was now identical with that which obtained before the conductor  $C$  had been brought near. The successive changes are just what might be expected according to our conception of the mode of action. For if the period of oscillation of the conductor  $C$  approaches that of the conductor  $A A'$ , the current in  $C$  becomes stronger, but at the same time there arises a difference of phase between the current and the inducing force. At the stage where resonance occurs the current in  $C$  is strongest, and the difference of phase amounts (as in every case of resonance of a moderately damped oscillation) to a quarter-period; hence there can no longer be any interference between the oscillations induced in  $B$  by  $A A'$  and by  $C$  respectively. This condition evidently corresponds to the stage specially referred to above. If the period of oscillation of  $C$  becomes much greater than that of  $A A'$  the amplitude of the oscillations in  $O$  again

decreases, and the difference of phase between them and the exciting force now approaches a half-period. The current in  $C$  is now at every instant in the same direction as that in  $A A'$ ; interference between the oscillations excited in  $B$  by (p. 101) these currents is again possible; but the effect produced by the conductor  $C$  must be opposite to that which it exerted in its original position.

If the conductor  $C$  is brought very close to  $A A'$  only small sparks appear in the circle  $B$ . By bringing the conductors closer together the period of oscillation of  $A A'$  is increased, and thus  $A A'$  and  $B$  are no longer in resonance.

### *Effects produced by Approach of Non-conductors*

A very rough estimate shows that if large masses of insulating substances are brought near to the apparatus, the quantities of electricity displaced by dielectric polarization must be at least as great as those which are set in motion by conduction in thin metallic rods. The approach of the latter has been found to produce a very noticeable effect in our apparatus; if, therefore, the approach of large insulating masses produced no similar effect, we should naturally conclude that the electricity displaced by dielectric polarization did not exert a corresponding electromagnetic action. But if the views of Faraday and Maxwell are correct, we should expect that a noticeable effect would be produced, and, further, that the approach of a non-conductor would act in the same way as that of a conductor having a very short period of oscillation. Experiment fully confirms this expectation; and the only difficulty in carrying out the experiments is that of procuring sufficiently large masses of the insulating material.

I made the first experiments with a material which lay ready to hand, namely, paper. Underneath the conductor  $A A'$  I piled up books in the form of a parallelepiped 1.5 metre long, 0.5 m broad, and 1 m high, until they reached the plates  $A$  and  $A'$ . It was shown without doubt that sparks now appeared in those positions of the circle which before were free from sparks, and that in order to make the sparks disappear the spark-gap  $f$  had to be turned about  $10^\circ$  towards the pile of books. Encouraged by this, I had 800 kgm of unmixed asphalt cast in the form of a block 1.4 metre long, 0.6 m. high, and 0.4 m. broad ( $D$  in Fig. 24). The apparatus was removed on to this, the plates being laid upon the block. The effect could (p. 102) be immediately recognised; the result obtained were as follows: —

1. The spark at the highest point of the circle was now considerably stronger than at the lowest point (that nearest the asphalt).

2. The null-points were displaced downwards, *i.e.*, towards the insulator, and when the plates were laid right upon it the angle of displacement (which could be measured with fair accuracy) was  $23^\circ$ . But the sparking no longer ceased completely at these points. At the original zero-points there was now vigorous sparking.

3. When the plates  $A$  and  $A'$  rested upon the asphalt block the period of oscillation of  $A A'$  was altered; the period of oscillation of  $B$  had to be increased at the same time in order to obtain sparks of maximum length.

4. If the apparatus was gradually removed in any direction away from the asphalt block the effect continuously diminished, without experiencing any qualitative change.

We have here all the effects of a conductor of small period of oscillation. The accordance between the mode of action of the insulator and of a conductor is further shown by the fact that the one can be compensated by the opposing action of the other. Thus, if the apparatus lay upon the asphalt, and the conductor  $C$  was brought near it from above, the null-points shifted backwards towards their original positions, and they again coincided with the points  $a$  and  $a'$  when the conductor  $C$  was brought within about 11 cm of the conductor  $A A'$ . If the upper surface of the asphalt lay 5 cm beneath the plates  $A$  and  $A'$ , compensation was attained as soon as  $C$  was brought within 17 cm of  $A A'$ . The compensating action always took place when the conductor was somewhat farther off than the insulator. In a rough way these experiments show that the action of the insulator is, quantitatively as well as qualitatively, about what we should expect.

The asphalt used was an excellent insulator; it contained (as might be suspected from its high specific gravity) a large amount of mineral matter. One hundred parts (by weight) were found to give no less than 62 parts of ash, consisting of 17 parts of quartz-sand, 40 of calcium compounds, and 5 of aluminum and (p. 103) iron compounds.<sup>1</sup> It might be suspected that the action should be attributed entirely to these constituents, some of which might perhaps act as conductors. In order to remove this doubt, I had a second, and exactly similar, block made of the so-called artificial pitch: this also is an excellent insulator, and gives scarcely any ash. The phenomena observed with this were the same as those above described, excepting that they were not quite so strongly marked; for example, the maximum displacement of the null-points here was only  $19^\circ$ . Unfortunately, however, this artificial pitch contains not only hydrocarbons but also free carbon in a very fine state of division, and it would be difficult to determine the amount of this latter. It cannot be denied that this carbon would have some conductivity, and hence the doubt in question is not entirely removed by this experiment. The expense of undertaking further investigations on the same large scale with pure substances was prohibitory. I therefore had the system of conductors  $A A'$  and  $B$  made again of exactly one-half the linear dimensions, and tried whether the phenomena could be followed with sufficient accuracy in this smaller model. The result was satisfactory, although, of course, with such exceedingly delicate sparks the strain upon the observer's attention was necessarily increased. For the purpose of demonstrating the phenomenon, or for quantitative experiments, it would be advisable to adhere to the larger

---

<sup>1</sup> For the analysis I have to thank my colleague, Herr Hofrath Engler.

dimensions. With the small apparatus I investigated altogether eight substances, which I will now mention in order: —

1. *Asphalt*. — The large block already described was used. When the plates *A* and *A'* lay upon the block, so that their front edges lay along the front edge of the block, the rotation of the null-point amounted to  $31^\circ$ . When the apparatus was drawn forward, so that the central line *rs* coincided with the front edge of the block, the rotation amounted to  $20^\circ$ .

2. *Artificial Pitch obtained from Coal*. — Here, again, the large block was used. The rotations in the two positions referred to in (1) amounted to  $21^\circ$  and  $13^\circ$  respectively.

3. *Paper*. — When the apparatus was placed upon a block of paper 70 cm long, 35 cm high, and 20 cm broad, the null-points were displaced about  $8^\circ$  towards the paper.

(p. 104) 4. With a block of dense and perfectly dry wood the rotation of the null-points amounted to about  $10^\circ$ .

5. *Sandstone*. — When the apparatus was brought near to a sandstone pillar in the building (almost touching it), the null-points were rotated about  $20^\circ$  towards the sandstone. I had already observed with the large apparatus that the stone floor exercised a perceptible effect as soon as the apparatus was brought within half a metre of it.

6. *Sulphur*. — A massive block 70 cm long, 20 cm broad, and 35 cm high, was cast from roll sulphur in a wooden mould, and the mould was then removed. The action of the block was very distinct; the various effects described above could be perceived, and the rotation amounted to  $13 - 14^\circ$ .

7. *Paraffin*. — The paraffin was white; it melted between  $60^\circ$  and  $70^\circ$ , giving a liquid as clear as water and free from impurities. It was melted and poured into a cardboard mould of the same dimensions, which was afterwards removed. The action was very distinct, and the rotation amounted to  $7^\circ$ .

8. *Petroleum*. — In order to investigate the effect of a liquid insulator, I filled an oak trough with 45 litres of pure petroleum. The internal dimensions of the trough were: Length 70 cm, breadth 20 cm, depth 35 cm. When full, it produced a rotation of about  $7^\circ$ , when empty, about  $2^\circ$ . The very perceptible difference indicates the effect which would be produced by the petroleum alone.

The concordance between the observations made upon so many substances, some of which were pure, scarcely leaves any doubt that the action is a real one, and that it must be attributed to the substances themselves, and not to impurities in them. Indeed, I see only two objections which can be urged against this interpretation of the phenomena, and it will be advisable to rebut these at once. In the first place, it might be asserted that the effect is not an electromagnetic one, but that the insulator changes the distribution of the electrostatic force in its neighbourhood, and that this change in the distribution results in a change in the phenomenon. I have tried in vain to interpret, in accordance with this assumption, the various phenomena observed. But the assertion can be directly disproved. For, if the insulator fills a space which is (p. 105) only bounded by lines of force, and by parts of the surfaces of  $A$  and  $A'$ , it cannot give rise to any change in the electrostatic force outside its own mass. Now the vertical plane through the centre line  $rs$  is certainly made up of lines of force, and so also is the horizontal plane of the plates  $A$  and  $A'$  themselves. If, therefore, the insulator is bounded by these two planes, and if it extends behind the former and under the latter, as far as it can exert any influence, then every electrostatic effect outside the insulator is avoided. Now if we place our smaller apparatus with the line  $rs$  upon the upper front edge of one of the large blocks, the conditions referred to are sufficiently fulfilled. But when this was done the action, as already stated, did not cease, but was of similar strength to that observed under the most favourable conditions. It follows that the action did not arise from electrostatic forces.

In the second place, it may be objected that the effects should be attributed to currents arising through a residual conductivity. This objection can scarcely be urged with respect to such excellent insulators as sulphur and paraffin; nor do I believe that it is valid in the case of inferior insulators such as wood. Even assuming that such a substance insulates so badly that it allows the charged plate  $A$  to discharge in the ten-thousandth part of a second, but not much more rapidly, then during an oscillation of our apparatus the plate would never lose more than the ten-thousandth part of its charge. The conduction-current proper in the substance under consideration would therefore never exceed the ten-thousandth part of the primary current in  $AA'$ , and hence it would be quite ineffective. Hence in the case of the better insulators, at any rate, any assistance through conduction is excluded.

At present it does not appear to be possible to give any discussion of the quantitative relations of the experiments that would be of interest.

---

We have now seen what effect is produced upon the secondary circuit  $B$  by bringing a metallic conductor  $C$  near to the primary conductor  $AA'$ . If  $C$  was in resonance with (p. 106)  $AA'$ , its action upon  $B$  could not interfere with the direct action of  $AA'$ . But at the same time, when the conditions for resonance were fulfilled, its action was fairly powerful, and could even be perceived when  $C$  was removed 1 – 1.5 metre away from  $AA'$ . Upon this I based experiments which should establish a finite rate of propagation of the electric forces. For if these forces require time to proceed in the first place from  $AA'$  to  $C$ , and then again from  $C$  back to  $B$ , the difference of phase between the effects of  $AA'$

upon  $B$  and of  $C$  upon  $B$  will increase when the distance between  $A A'$  and  $C$  increases; and the two effects must again become capable of producing interference if the distance between  $A A'$  and  $C$  becomes so great that the time taken by the electric force in traversing it is one-quarter of the half-period of oscillation. Hitherto these experiments have been unsuccessful, for I have not been able to detect any of the phenomena which I had expected. But since it was at best a question of observing exceedingly delicate changes, I do not consider that this negative result should weigh against the positive results which I have obtained otherwise.

(p. 107)

## VII

### ON THE FINITE VELOCITY OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC ACTIONS

*(Sitzungsbr. d. Berl. Akad. d. Wiss. Feb. 2, 1888. Wiedemann's Ann.34, p. 551.)*

WHEN variable electric forces act within insulators whose dielectric constants differ appreciably from unity, the polarizations which correspond to these forces exert electromagnetic effects. But it is quite another question whether variable electric forces in air are also accompanied by polarizations capable of exerting electromagnetic effects. We may conclude that, if this question is to be answered in the affirmative, electromagnetic actions must be propagated with a finite velocity.

While I was vainly casting about for experiments which would give a direct answer to the question raised, it occurred to me that it might be possible to test the conclusion, even if the velocity under consideration was considerably greater than that of light. The investigation was arranged according to the following plan: — In the first place, regular progressive waves were to be produced in a straight, stretched wire by means of corresponding rapid oscillations of a primary conductor. Next, a secondary conductor was to be exposed simultaneously to the influence of the waves propagated through the wire and to the direct action of the primary conductor propagated through the air; and thus, both actions were to be made to interfere. Finally, such interferences were to be produced at different distances from the primary circuit, so as to find out whether the oscillations of the electric (p. 108) force at great distances would or would not exhibit a retardation of phase, as compared with the oscillations in the neighbourhood of the primary circuit. This plan has proved to be in all respects practicable. The experiments carried out in accordance with it have shown that the inductive action is undoubtedly propagated with a finite velocity. This velocity is greater than the velocity of propagation of electric waves in wires. According to the experiments made up to the present time, the ratio of these velocities is about 45:28. From this it follows that the absolute value of the first of these is of the same order as the velocity of light. Nothing can as yet be decided as to the propagation of electrostatic actions.

#### *The Primary and Secondary Conductors*



The primary conductor  $A A'$  (Fig. 25) consisted of two square brass plates, 40 cm in the side, which were connected by a copper wire 60 cm long. In the middle of the wire was a spark-gap in which oscillations were produced by very powerful discharges of an induction-coil  $J$ . The conductor

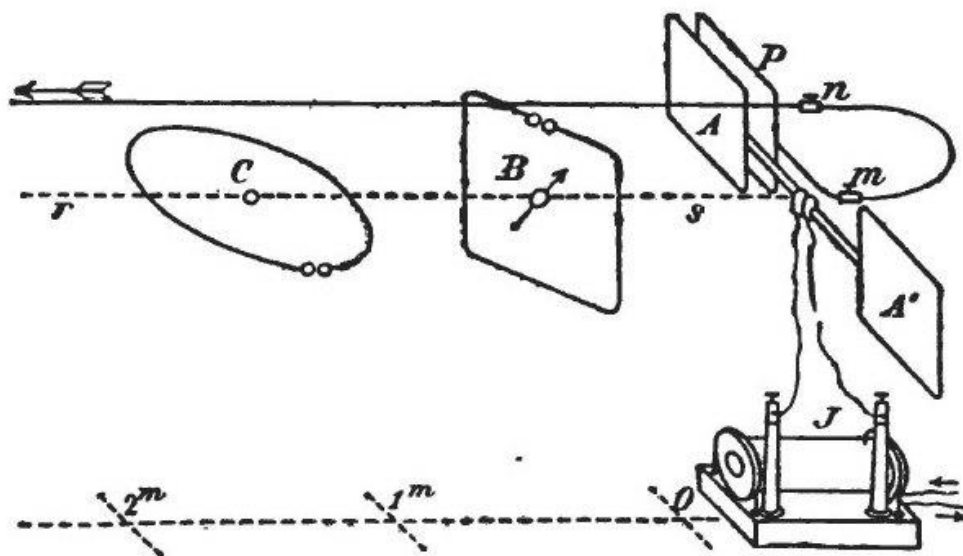


Fig. 25.

was set up 1.5 metre above the floor, with the wire horizontal and the plane of the plates vertical. We shall denote as the base-line of our experiments, a horizontal straight line  $r s$  passing through the spark-gap and perpendicular to the direction of the primary oscillation. We shall denote as the zero-point a point on this base-line 45 cm from the spark-gap.

The experiments were carried out in a large lecture-room, in which there were no fixtures for a distance of 12 metres in (p. 109) the neighbourhood of the base-line.<sup>1</sup> During the experiments this room was darkened.

The secondary circuit used was sometimes a wire  $C$  in the form of a circle of 35 cm radius, sometimes a wire  $B$  bent into a square of 60 cm in the side. The spark-gap of both these conductors was adjustable by means of a micrometer-screw; and in the case of the square conductor the spark-gap was provided with a lens. Both conductors were in resonance with the primary conductor. As calculated from the capacity and coefficient of self-induction of the primary, the (half)period of oscillation

<sup>1</sup> [See Note 12 at end of book.]

of all three conductors mounted to 1·4 hundred-millionths of a second.<sup>2</sup> Still it is doubtful whether the ordinary theory of electric oscillations gives correct results here. But inasmuch as it gives correct values in the case of Leyden jar discharges, we are justified in assuming that its results in the present case will, at any rate, be correct as far as the order of magnitude is concerned.

Let us now consider the influence of the primary oscillation upon the secondary circuit in some of the positions which are of importance in our present investigation. First let us place the secondary conductor with its centre on the base-line and its plane in the vertical plane through the base-line. We shall call this the first position. In this position no sparks are perceived in the secondary circuit. The reason is obvious: the electric force is at all points perpendicular to the direction of the secondary wire.

Now, leaving the centre of the secondary conductor still on the base-line, let it be turned so that its plane is perpendicular to the base-line, we shall call this, the second position.

Sparks now appear in the secondary circuit whenever the spark-gap lies above or below the horizontal plane through the base-line; but no sparks appear when the spark-gap lies in this plane. As the distance from the primary oscillator increases, the length of the sparks diminishes, at first rapidly but afterwards very slowly. I was able to observe the sparks along the whole distance (12 metres) at my disposal, and have no doubt that in larger rooms this distance could be still farther extended. In this position the sparks owe their origin (p. 110) mainly to the electric force which always acts in the part of the secondary circuit opposite to the spark-gap. The total force may be split up into the electrostatic part and the electromagnetic part; there is no doubt that at short distances the former, at greater distances the latter, preponderates and settles the direction of the total force.

Finally, let the plane of the secondary conductor be brought into the horizontal position, its centre being still on the base-line. We shall call this, the third position. If we use the circular conductor, place it with its centre at the zero-point of the base-line, and turn it so that the spark-gap slowly moves around it, we observe the following effects: — In all positions of the spark-gap there is vigorous sparking. The sparks are most powerful and about 6 mm long when the spark-gap faces the primary conductor; they steadily diminish when the spark-gap is moved away from this position, and attain a minimum value of about 3 mm on the side farthest from the primary conductor. If the conductor was exposed only to the electrostatic force, we should expect sparking when the spark-gap was on the one side or the other in the neighbourhood of the base-line, but no sparking in the two intermediate positions. Indeed, the direction of the oscillation would be determined by the direction of the force in the portion of the secondary conductor lying opposite to the spark-gap. But upon the oscillation excited by the electrostatic force is superposed the oscillation excited by the electromagnetic force; and here the latter is very powerful, because the electromagnetic force when integrated around the secondary

---

<sup>2</sup> See 11, p. 50. [See also Note 13 at end of book.]

circuit (considered as being closed) gives a finite integral value. The direction of this integrated force of induction is independent of the position of the spark-gap; it opposes the electrostatic force in the part of the secondary conductor which faces  $A A'$ , but reinforces the electrostatic force in the part which faces away from  $A A'$ . Hence the electrostatic and electromagnetic forces assist each other when the spark-gap is turned towards, but they oppose each other when it is turned away from the primary conductor. That it is the electromagnetic force which preponderates in the latter position and determines the direction of the oscillation, may be recognised from the fact that the change from the one state (p. 111) to the other, takes place in any position without any extinction of the sparks. For our purpose it is important to make the following observations: — If the spark-gap is rotated to the right or left through  $90^\circ$  from the base-line, it lies at a nodal point with respect to the electrostatic force, and the sparks which appear in it owe their origin entirely to the electromagnetic force, and especially to the fact that the latter, around the closed circuit, is not zero. Hence, in this particular position, we can investigate the electromagnetic effect, even in the neighbourhood of the primary conductor, independently of the electrostatic effect.

A complete demonstration of the above explanations will be found in an earlier paper.<sup>1</sup> Some further evidence in support of these explanations, and of the results arrived at in my earlier paper, will be found in what follows.

### *The Waves in the Straight Wire*

In order to excite in a wire with the aid of our primary oscillations waves suitable for our purpose, we proceed as follows: — Behind the plate  $A$  we place a plate  $P$  of the same size. From the latter we carry a copper wire 1 mm thick to the point  $m$  on the base-line; from there, in a curve 1 metre long, to the point  $n$ , which lies 30 cm above the spark-gap, and thence in a straight line parallel to the base-line for a distance sufficiently great to prevent any fear of disturbance through reflected waves. In my experiments the wire passed through the window, then went about 60 metres freely through the air, and ended in an earth-connection. Special experiments showed that this distance was sufficiently great. If now we bring near to this wire a metallic conductor in the form of a nearly closed circle, we find that the discharges of the induction-coil are accompanied by play of small sparks in the circle. The intensity of the sparks can be altered by altering the distance between the plates  $P$  and  $A$ . That the waves in the wire have the same periodic time as the primary oscillations, can be shown by bringing near to the wire one of our tuned secondary conductors; for in these the sparks become more powerful than in any other metallic circuits, whether (p. 112) larger or smaller. That the waves are regular, in respect to space as well as time, can be shown by the formation of stationary waves. In order to produce these, we allow the wire to end freely at some distance from its origin, and bring near to it our secondary conductor in such a position that its plane includes the wire, and that the spark-gap is turned towards the wire. We then observe that at the free end of the wire the sparks in

---

<sup>1</sup> See V., p. 80.

the secondary conductor are very small; they increase in length as we move towards the origin of the wire; at a certain distance, however, they again decrease and sink nearly to zero, after which they again become longer. We have thus found a nodal point. If we now measure the wavelength so found, make the whole length of the wire (reckoned from the point  $n$ ) equal to a complete multiple of this length, and repeat the experiment, we find that the whole length is now divided up by nodal points into separate waves.\* If we fix each nodal point separately with all possible care, and indicate its position by means of a paper rider, we see that the distances of these are approximately equal, and that the experiments admit of a fair degree of accuracy.

The nodes can also be distinguished from the antinodes in other ways. If we bring the secondary conductor near to the wire, in such a position that the plane of the former is perpendicular to the latter, and that the spark-gap is neither turned quite towards the wire nor quite away from it, but is in an intermediate position, then our secondary circle is in a suitable position for indicating the existence of forces which are perpendicular to the direction of the wire. Now, when the circle is in such a position, we see that sparks appear at the nodal points, but disappear at the antinodes. If we draw sparks from the wire by means of an insulated conductor, we find that these are somewhat stronger at the nodes than at the antinodes; but the difference is slight, and for the most part can only be perceived when we already know where the nodes and antinodes respectively are situated. The reason why this latter method and other similar ones give no definite result is that the particular waves under consideration have other irregular disturbances superposed upon them. With the aid of our tuned circle, however, we can pick out the disturbances in (p. 113) which we are interested, just as particular notes can be picked out of confused noises by means of resonators.

If we cut through the wire at a node, the phenomena along the part between it and the origin are not affected: the waves are even propagated along the part which has been cutoff if it is left in its original position, although their strength is diminished.

The fact that the waves can be measured admits of numerous applications. If we replace the copper wire hitherto used by a thicker or thinner copper wire, or by a wire of another metal, the nodal points are found to remain in the same positions. Thus, the rate of propagation in all such wires is the same, and we are justified in speaking of it as a definite velocity. Even iron wires are no exception to this general rule; hence the magnetic properties of iron are not called into play by such rapid disturbances. It will be of interest to test the behaviour of electrolytes. The fact that the electrical disturbance in these is bound up with the disturbance of inert matter, might lead us to expect a smaller velocity of propagation.† Through a tube of 10 mm diameter, filled with a solution of copper sulphate, the waves would not travel at all; but this may have been due to the resistance being too great. Again, by measuring the wave-lengths, we can determine the relative periods of oscillation of different primary

---

\* [See Note 14 at end of book.]

† [See Note 15 at end of book.]

conductors; it should be possible to compare in this way the periods of oscillation of plates, spheres, ellipsoids, etc.

In our particular case the nodal points proved to be very distinct when the wire was cut off at a distance of either 8 metres or 5·5 metres from the zero-point of the base-line. In the former case the positions of the paper riders used for fixing the nodal points were— 0·2 m, 2·3 m, 5·1 m, and 8 m; in the latter case — 0·1 m, 2·8 m, and 5·5 m, the distances being measured from the zero-point. From this it appears that the (half) wave-length in the free wire cannot differ much from 2·8 metres. We can scarcely be surprised at finding that the first wave-length, reckoned from *P*, appears smaller than the rest, when we take into consideration the presence of the plate and the bending of the wire. A period of oscillation (p. 114) of 1·4 hundred-millionths of a second, and a wave-length of 2·8 metres, gives 200,000 km/sec as the velocity of electric waves in wires.<sup>1</sup> In the year 1850, Fizeau and Gounelle,<sup>2</sup> making use of a very good method, found for this velocity the value 100,000 km/sec in iron wires, and 180,000 km/sec in copper wires. In 1875 W. Siemens,<sup>3</sup> using discharges from Leyden jars, found velocities from 200,000 to 260,000 km/sec in iron wires. Other determinations can scarcely be taken into consideration. Our result comes in well between the above experimental values. Since it was obtained with the aid of a doubtful theory, we are not justified in publishing it as a new measurement of this same velocity; but, on the other hand, we may conclude, from the accordance between the experimental results, that our calculated value of the period of oscillation is of the right order of magnitude.

### *Interference between the direct Action and that propagated through the Wire*

Let us place the square circuit *B* at the zero-point in our second position, and so that the spark-gap is at the highest point. The waves in the wire now exert no influence; the direct action gives rise to sparks 2 mm long. If we now bring *B* into the first position by turning it about a vertical axis, it is found conversely that the primary oscillation exercises no direct effect; but the waves in the wire now induce sparks which can be made as long as 2 mm by bringing *P* near to *A*. In intermediate positions both causes give rise to sparks, and it is thus possible for them, according to their difference in phase, either to reinforce or to weaken each other. Such a phenomenon, in fact, we observe. For, if we adjust the plane of *B* so that its normal towards *A A'* points away from that side of the primary conductor on which the plate *P* is placed, the sparking is even stronger than it is in the principal positions; but if we adjust the plane of *B* so that its normal points towards *P*, the sparks disappear, and only reappear (p. 115) when the spark-gap has been considerably shortened. If, under the same conditions, we place the spark-gap at the lowest point of *B*, the disappearance of the sparks takes place when the normal

---

<sup>1</sup> [See Note 16 at end of book.]

<sup>2</sup> Fizeau and Gounelle, *Pogg. Ann.* **80**, p. 158, 1850.

<sup>3</sup> W. Siemens, *Pogg. Ann.* **157**, p. 309, 1876.

points away from  $P$ . Further modifications of the experiment, — *e.g.* by carrying the wire beneath the secondary conductor, — produce just such effects as might be expected from what has above been stated. The phenomenon itself is just what we expected; let us endeavour to make it clear that the action takes place in the sense indicated in our explanation. In order to fix our ideas, let us suppose that the spark-gap is at the highest point, and the normal turned towards  $P$  (as in the figure). At the particular instant under consideration let the plate  $P$  have its largest positive charge. The electrostatic force, and therefore the total force, is directed from  $A$  towards  $A'$ . The oscillation induced in  $B$  is determined by the direction of the force in the lower part of  $B$ . Positive electricity will therefore be urged towards  $A'$  in the lower part, and away from  $A'$  in the upper part. Let us now consider the action of the waves. As long as  $A$  is positively charged, positive electricity flows away from the plate. At the instant under consideration this flow reaches its maximum development in the middle of the first half wavelength of the wire. At a quarter wave-length farther from the origin, — that is, in the neighbourhood of our zero-point, — it is just beginning to take up this direction (away from the zero-point). Hence at this point the electromagnetic induction urges positive electricity in its neighbourhood towards the origin. In particular, positive electricity in our conductor  $B$  is thrown into a state of motion in a circle, so that in the upper part it tends to flow towards  $A'$ , and in the lower part away from  $A'$ . Thus, in fact, the electrostatic and electromagnetic forces act against one another, and are in approximately the same phase; hence they must more or less annul one another. If we rotate the secondary circle through  $90^\circ$  (through the first position) the direct action changes its sign, but the action of the waves does not; both causes reinforce one another. The same holds good if the conductor  $B$  is rotated in its own plane until the spark-gap lies at its lowest point.

We now replace the wire  $mn$  by longer lengths of wire. We observe that this renders the interference more indistinct; (p. 116) it disappears completely when a piece of wire 250 cm long is introduced; the sparks are of the same length whether the normal points away from  $P$  or towards it. If we lengthen the wire still more the difference of behaviour in the various quadrants again exhibits itself, and the extinction of the sparks becomes fairly sharp when 400 cm of wire is introduced. But there is now this difference, — that extinction occurs when the spark-gap is at the top, and the normal points away from  $P$ . Further lengthening of the wire causes the interference to disappear once more; but it reappears in the original sense when about 6 metres of wire are introduced. These phenomena are obviously explained by the retardation of the waves in the wire, and they also make it certain that the state of affairs in the progressive waves changes sign about every 2·8 metres.

If we wish to produce interference while the secondary circle  $C$  lies in the third position, we must remove the rectilinear wire from the position in which it has hitherto remained, and carry it along in the horizontal plane through  $C$ , either on the side towards the plate  $A$ , or on the side towards the plate  $A'$ . In practice it is sufficient to stretch the wire loosely, grasp it with insulating tongs, and bring it alternately near one side or the other of  $C$ . What we observe is as follows: — If the waves are carried along the side on which the plate  $P$  lies, they annul the sparks which were previously present; if they are carried along the opposite side, they strengthen the sparks which were already present. Both

results always occur, whatever may be the position of the spark-gap in the circle. We have seen that at the instant when the plate *A* has its strongest positive charge, and when, therefore, the primary current begins to flow away from *A*, the surging at the first nodal point of the rectilinear wire begins to flow away from the origin of the wire. Hence both currents flow round *C* in the same sense when the rectilinear wire lies on the side of *C* which is remote from *A*; in the other case they flow round *C* in opposite senses, and their actions annul one another. The fact that the position of the spark-gap is of no importance confirms our supposition that the direction of the oscillation is here determined by the electromagnetic force. The interferences which have just been described also (p. 117) change their sign when 400 cm of wire, instead of 100 cm, is introduced between the points *m* and *n*.

I have also produced interferences in positions in which the centre of the secondary circle lay outside the base-line; but for our present purpose these are only of importance inasmuch as they throughout confirmed our fundamental views.

### *Interference at Various Distances*

Interferences can be produced at greater distances in the same way as at the zero-point. In order that they may be distinct, care must be taken that the action of the waves in the wire is in all cases of about the same magnitude as the direct action. This can be secured by increasing the distance between *P* and *A*. Now very little consideration will show that, if the action is propagated through the air with infinite velocity, it must interfere with the waves in the wire in opposite senses at distances of half a wave-length (*i.e.*, 2·8 metres) along the wire. Again, if the action is propagated through the air with the same velocity as that of the waves in the wire, the two will interfere in the same way at all distances. Lastly, if the action is propagated through the air with a velocity which is finite, but different from that of the waves in the wire, the nature of the interference will alternate, but at distances which are farther than 2·8 metres apart.

In order to find out what actually took place, I first made use of interferences of the kind which were observed in passing from the first into the second position. The spark-gap was at the top. At first, I limited myself to distances up to 8 metres from the zero-point. At the end of each half-metre along this position the secondary conductor was set up and examined in order to see whether any difference could be observed at the spark-gap according as the normal pointed towards *P* or away from it. If there was no such difference, the result of the experiment was indicated by the symbol *O*. If the sparks were smaller when the normal pointed towards *P*, then this showed an interference which was represented by the symbol +. The symbol – was used to indicate an interference (p. 118) when the normal pointed towards the other side. In order to multiply the experiments, I frequently repeated them, making the wire *m n* 50 cm longer each time, and thus lengthening it gradually from 100 cm to 600 cm. The results of my experiments are contained in the following summary which will easily be understood: —

	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
100	+	+	0	-	-	-	-	0	0	0	0	0	+	+	+	+
150	+	0	-	-	-	-	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0
200	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0
250	0	-	-	-	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0
300	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	0	0	0	-	-	-
350	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0	0	0	-	-	-	-
400	-	-	0	+	+	+	+	0	0	0	0	-	-	-	-	-
450	-	0	+	+	+	+	+	0	0	0	-	-	-	-	-	0
500	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	0	0	+
550	0	+	+	+	+	0	0	-	-	-	-	-	0	0	0	+
600	+	+	+	+	0	0	-	-	-	-	-	0	0	+	+	+

According to this it might almost appear as if the interferences changed sign at every half wavelength of the waves in the wire.<sup>1</sup> But, in the first place, we notice that this does not exactly happen. If it did, then the symbol O should recur at the distances 1 m, 3·8 m, 6·6 m, whereas it obviously recurs less frequently. In the second place, we notice that the retardation of phase proceeds more rapidly in the neighbourhood of the origin than at a distance from it. All the rows agree in showing this. An alteration in the rate of propagation is not probable. We can with much better reason attribute this phenomenon to the fact that we are making use of the total force (*Gesamtkraft*), which can be split up into the electrostatic force and the electromagnetic. Now, according to theory, it is probable that the former, which preponderates in the neighbourhood of the primary oscillation, is propagated more rapidly than the latter, which is almost the only factor of importance at a distance. In order first to settle what actually happens at a greater distance, I have extended the experiments to a distance of 12 metres, for at any (p. 119) rate three values of the length  $m n$ . I must admit that this required rather an effort. Here are the results: —

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
100	+	0	-	-	0	0	0	+	+	+	+	+	0
250	0	-	-	0	+	+	0	0	0	0	-	-	-
400	-	0	+	+	0	0	-	-	-	-	0	0	0

If we assume that at considerable distances the electromagnetic action alone is effective, then we should conclude from these observations that the interference of this action with the waves in the wires only changes its sign every 7 metres.

<sup>1</sup> [See Note 17 at end of book.]



In order now to investigate the electromagnetic force in the neighbourhood of the primary oscillation (where the phenomena are more distinct) as well, I made use of the interferences which occur in the third position when the spark-gap is rotated  $90^\circ$  away from the base-line. The sense of the interference at the zero-point has already been stated, and this sense will be indicated by the symbol  $-$ , whereas the symbol  $+$  will be used to denote an interference by conducting the waves past the side of  $C$  which is remote from  $P$ . This choice of the symbols will be in accord with the way in which we have hitherto used them. For since the electromagnetic force is opposed to the total force at the zero-point, our first table would also begin with the symbol  $-$ , provided that the influence of the electrostatic force could have been eliminated. Now experiment shows, in the first place, that interference still takes place up to a distance of 3 metres, and that it is of the same sign as at the zero-point. This experiment, repeated often and never with an ambiguous result, is sufficient to prove the finite rate of propagation of the electromagnetic action. Unfortunately, the experiments could not be extended to a greater distance than 4 metres, on account of the feeble nature of the sparks. Here, again, I repeated the experiments with variable lengths of the wire  $mn$ , so as to be able to verify the retardation of phase along this portion of the wire. The results are given in the given summary: —

(p. 120)

	0	1	2	3	4		0	1	2	3	4
100	-	-	-	-	0	400	+	+	+	+	0
150	-	-	0	0	0	450	+	+	+	0	0
200	0	0	0	+	+	500	+	+	0	0	0
250	0	+	+	+	+	550	+	0	0	0	-
300	+	+	+	+	+	600	0	-	-	-	-
350	+	+	+	+	0						

A discussion of these results shows that here, again, the phase of the interference alters as the distance increases, so that a reversal of sign might be expected at a distance of 7 – 8 metres.

But this result is much more plainly shown by combining the results of the second and third summary—using the data of the latter up to a distance of 4 metres, and of the former for greater distances. In the first of these intervals, we thus avoid the action of the electrostatic force by reason of the peculiar position of our secondary conductor; in the second this action drops out of account, owing to the rapid weakening of that force. We should expect the observations of both intervals to fit into one another without any break, and our expectation is confirmed. We thus obtain by collating the symbols the following table for the interference of the electromagnetic force with the action of the waves in the wire: —

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
100	-	-	-	-	0	0	0	+	+	+	+	+	0
250	0	+	+	+	+	+	0	0	0	0	-	-	-
400	+	+	+	+	0	0	-	-	-	-	0	0	0

From this table I draw the following conclusions: —

1. The interference does not change sign every 2·8 metres. Therefore, the electromagnetic actions are not propagated with infinite velocity.

2. The interference, however, is not in the same phase at all points. Therefore, the electromagnetic actions do not spread out in air with the same velocity as the electric waves in wires.

3. A gradual retardation of the waves in the wire has the (p. 121) effect of shifting any particular phase of the interference towards the origin of the waves. From the direction of this shifting, it follows that of the two different rates of propagation that through air is the more rapid. For if by retardation of one of the two actions we bring about an earlier coincidence of both, then we must have retarded the slower one.

4. At distances of every 7·5 metres, the sign of the interference changes from + to -. Hence, after proceeding every 7·5 metres, the electromagnetic action outruns each time a wave in the wire. While the former travelled 7·5 metres, the latter travelled  $7·5 - 2·8 = 4·7$  metres. The ratio of the two velocities is therefore as 75: 47, and the half wave-length of the electromagnetic action in air is  $2·8 \times 75/47 = 4·5$  metres. Since this distance is traversed in 1·4 hundred-millionths of a second, it follows that the absolute velocity of propagation in air is 320,000 km. per second. This result only holds good as far as the order of magnitude is concerned; still the actual value can scarcely be greater than half as much again, and can scarcely be less than two-thirds of the value stated. The actual value can only be determined by experiment when we are able to determine the velocity of electricity in wires more accurately than has hitherto been the case.

Since the interferences undoubtedly changes sign after 2·8 metres in the neighbourhood of the primary oscillation, we might conclude that the electrostatic force which here predominates is propagated with infinite velocity. But this conclusion would in the main depend upon a single change of phase, and this one change can be explained (apart from any retardation of phase) by the fact that, at some distance from the primary oscillation, the amplitude of the total force undergoes a change of sign. If the absolute velocity of the electrostatic force remains for the present unknown, there may yet be adduced definite reasons for believing that the electrostatic and electromagnetic forces possess different velocities. The first reason is that the total force does not vanish at any point along the baseline. Since the electrostatic force preponderates at small distances, and the electromagnetic force at

greater distances, they must in some intermediate position be equal and opposite, and, inasmuch as they do not annul one another, they must reach this position at different times.

(p. 122) The second reason is derived from the propagation of the force throughout the whole surrounding space. In a previous paper<sup>1</sup> it has already been shown how the direction of the force at any point whatever can be determined. The distribution of the force was there described, and it was remarked that there were four points in the horizontal plane, about 1.2 metre before and behind the outer edges of our plates *A* and *A'*, at which no definite direction could be assigned to the force, but that the force here acts with about the same strength in all directions. The only apparent interpretation of this is that the electrostatic and electromagnetic components here meet one another at right angles, and are about equal in strength but differ notably in phase; thus, they do not combine to produce a resultant rectilinear oscillation, but a resultant which during each oscillation passes through all points of the compass.

The fact that different components of the total force possess different velocities is also of importance, inasmuch as it provides a proof (independent of those previously mentioned) that at least one of these components must be propagated with finite velocity.

### *Conclusions*

More or less important improvements in the quantitative results of this first experiment may result from further experiments in the same direction; but the path which they must follow may be said to be already made, and we may now regard it as having been proved that the inductive action is propagated with finite velocity. Sundry conclusions follow from the results thus obtained, and to some of these I wish to draw attention.

1. The most direct conclusion is the confirmation of Faraday's view, according to which the electric forces are polarizations existing independently in space. For in the phenomena which we have investigated such forces persist in space even after the causes which have given rise to them have disappeared. Hence these forces are not simply parts or attributes of their causes, but they correspond to changed conditions (p. 123) of space. The mathematical character of these conditions justifies us then in denoting them as polarizations, whatever the nature of these polarizations may be.

2. It is certainly remarkable that the proof of a finite rate of propagation should have been first brought forward in the case of a force which diminishes in inverse proportion to the distance, and not to the square of the distance. But it is worthwhile pointing out that this proof must also affect such forces as are inversely proportional to the square of the distance. For we know that the ponderomotive attraction between currents and their magnetic actions are connected, by the principle of the

---

<sup>1</sup> See V., p. 80.

conservation of energy with their inductive actions in the strictest way, the relation being apparently that of action and reaction. If this relation is not merely a deceptive semblance, it is not easy to understand how the one action can be propagated with a finite and the other with an infinite velocity.

3. There are already many reasons for believing that the transversal waves of light are electromagnetic waves; a firm foundation for this hypothesis is furnished by showing the actual existence in free space of electromagnetic transversal waves which are propagated with a velocity akin to that of light. And a method presents itself by which this important view may finally be confirmed or disproved. For it now appears to be possible to study experimentally the properties of electromagnetic transversal waves, and to compare these with the properties of light waves.

4. The hitherto undecided questions of electromagnetism which relate to unclosed currents should now be more easily attacked and solved. Some of these questions, indeed, are directly settled by the results which have already been obtained. In so far as electromagnetism only lacks certain constants, these results might even suffice to decide between the various conflicting theories, assuming that at least one of them is correct.

Nevertheless, I do not at present propose to go into these applications, for I wish first to await the outcome of further experiments which are evidently suggested in great number by our method.

(p. 124)

## VIII

### ON ELECTROMAGNETIC WAVES IN AIR AND THEIR REFLECTION

(*Wiedemann's Ann.* 34, p. 610, 1888.)

I HAVE recently endeavored to prove by experiment that electromagnetic actions are propagated through air with finite velocity.<sup>1</sup> The inferences upon which that proof rested appear to me to be perfectly valid; but they are deduced in a complicated manner from complicated facts, and perhaps for this reason will not quite carry conviction to anyone who is not already prepossessed in favor of the views therein adopted. In this respect the demonstration there given may be fitly supplemented by a consideration of the phenomena now to be described, for these exhibit the propagation of induction through the air by wave-motion in a visible and almost tangible form. These new phenomena also admit of a direct measurement of the wave-length in air. The fact that the wave-lengths thus obtained by direct measurement only differ slightly from the previous indirect determinations (using the same apparatus), may be regarded as an indication that the earlier demonstration was in the main correct.

---

<sup>1</sup> See VII., p. 107.

In experimenting upon the action between a rectilinear oscillation and a secondary conductor I had often observed phenomena which seemed to point to a reflection of the induction action from the walls of the building. For example, feeble sparks frequently appeared when the secondary conductor was so situated that any direct action was quite impossible, as was evident from simple geometrical considerations (p. 125) of symmetry; and this most frequently occurred in the neighbourhood of solid walls. In especial, I continually encountered the following phenomenon: — In examining the sparks in the secondary conductor at great distances from the primary conductor, when the sparks were already exceedingly feeble, I observed that in most positions of the secondary conductor the sparks became appreciably stronger when I approached a solid wall, but again disappeared almost suddenly close to the wall. It seemed to me that the simplest way of explaining this was to assume that the electromagnetic action, spreading outwards in the form of waves, was reflected from the walls, and that the reflected waves reinforced the advancing waves at certain distances, and weakened them at other distances, stationary waves in air being produced by the interference of the two systems. As I made the conditions more and more favourable for reflection the phenomenon appeared more and more distinct, and the explanation of it given above more probable. But without dwelling upon these preliminary trials, I proceed at once to describe the principal experiments.

The physics lecture-room in which these experiments were carried out is about 15 metres long, 14 metres broad, and 6 metres high. Parallel to the two longer walls there are two rows of iron pillars, each of which rows behaves much like a solid wall towards the electromagnetic action, so that the parts of the room which lie outside these cannot be taken into consideration. Thus, only the central space, 15 metres long, 8·5 metres broad, and 6 metres high, remained for the purpose of experiment. From this space I had the hanging parts of the gas-pipes and the chandeliers removed, so that it contained nothing except wooden tables and benches which could not well be removed. No objectionable effects were to be feared from these, and none were observed. The front wall of the room, from which the reflection was to take place, was a massive sandstone wall in which were two doorways, and a good many gas-pipes extended into it. In order to give the wall more of the nature of a conducting surface a sheet of zinc 4 metres high and 2 metres broad was fastened on to it; this was connected by wires with the gas-pipes and with a neighboring water-pipe, and especial care was taken that any (p. 126) electricity that might accumulate at the upper and lower ends of the sheet should be able to flow away as freely as possible.

The primary conductor was set up opposite the middle of this wall at a distance of 13 metres from it, and was therefore 2 metres away from the opposite wall. It was the same conductor that had already been used in the experiments on the rate of propagation. The direction of the conducting wire was now vertical; hence the forces which have here to be considered oscillate up and down in a vertical direction. The middle point of the primary conductor was 2·5 metres above the level floor; the observations were also carried out at the same distance above the floor, a gang way for the observer being built up with tables and boards at a suitable height. We shall denote as the normal a straight line drawn from the centre of the primary conductor perpendicularly to the reflecting surface. Our experiments

are restricted to the neighbourhood of this normal; experiments at greater angles of incidence would be complicated by having to take into consideration the varying polarization of the waves. Any vertical plane parallel to the normal, will be called a plane of oscillation, and any plane perpendicular to the normal, will be called a wave-plane.

The secondary conductor was the circle of 35 cm radius, which had also been used before. It was mounted so as to revolve about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane. In the experiments the axis was horizontal; it was mounted in a wooden frame, so that both circle and axis could be rotated about a vertical axis. For the most part it does well enough for the observer to hold the circle, mounted in an insulating wooden frame, in his hand, and then to bring it as may be most convenient into the various positions. But, inasmuch as the body of the observer always exercises a slight influence, the observations thus obtained must be controlled by others obtained from greater distances. The sparks too are strong enough to be seen in the dark several metres off; but in a well-lit room practically nothing can be seen, even at close quarters, of the phenomena which are about to be described.

After we have made these preparations the most striking phenomenon that we encounter is the following: —We place (p. 127) the secondary circle with its centre on the normal and its plane in the plane of oscillation, and turn the spark-gap first towards the wall and then away from it. Generally, the sparks differ greatly in the two positions. If the experiment is arranged at a distance of about 0·8 metre from the wall the sparks are much stronger when the spark - gap is turned towards the wall. The length of the sparks can be so regulated that a continuous stream of sparks passes over when the spark-gap is turned towards the wall, whereas no sparks whatever pass over in the opposite position. If we repeat the experiment at a distance of 3 metres from the wall we find, on the contrary, a continuous stream of sparks when the spark-gap is turned away from the wall, whereas the sparks disappear when the spark-gap is turned towards the wall. If we proceed further to a distance of 5·5 metres, a fresh reversal has taken place; the sparks on the side towards the wall are stronger than the sparks on the opposite side. Finally, at a distance of 8 metres from the wall, we find that another reversal has been executed; the sparking is stronger on the side remote from the wall, but the difference is no longer so noticeable. Nor does any further reversal occur; for it is prevented by the preponderating strength of the direct action and by the complicated forces which exist in the neighbourhood of the primary oscillation. Our figure (the scale in which indicates the distances from the wall) shows at I, II, III, IV, the secondary circle in those positions in which the sparks were most strongly developed. The alternating character of the conditions of the space is clearly exhibited.

At distances lying between those mentioned both sets of sparks under consideration were of equal strength, and in the immediate neighbourhood of the wall too, the distinction between them diminishes. We may therefore denote these points, — namely, the points *A*, *B*, *C*, *D* in the figure, — as being nodal points. in a certain sense. Still, we must not consider the distance between any one of these points and the next as being the half wave-length. For if *all* the electrical disturbances change their direction in passing through one of these points, then the phenomena in the secondary circle

should repeat themselves without reversal; for in the spark-length there is nothing which corresponds to a change of direction in the (p. 128) oscillation. We should rather conclude from these experiments that in passing through any one of these points one part of the action undergoes reversal, while another part does not. On the other hand, it is allowable to assume that double the distance between any two of the points corresponds to the half wave-length, so that these points each indicate the end of a quarter wave-length. And, indeed, on the basis of this assumption and of the fundamental view just expressed, we shall arrive at a complete explanation of the phenomenon.

For let us suppose that a vertical wave of electric force proceeds towards the wall, is reflected with slightly diminished intensity, and so gives rise to stationary waves. If the wall were a perfect conductor a node would form at its very surface. For inside a conductor or at its boundary the electric force must always be vanishingly small. Now our wall cannot be regarded as a perfect conductor. For, in the first place, it is only metallic in part, and the part which is metallic is not very extensive. Hence at its surface the force will still have a certain value, and this in the sense of the advancing wave. The node, which would be formed at the wall itself if it were perfectly conducting, must therefore lie really somewhat behind the surface of the wall, say at the point *A* in the figure. If double the distance *AB*, that is the distance *Aa*, corresponds to the half wave-length, then the geometrical relations of the stationary wave are of the kind (p. 129) which are represented in the usual symbolic fashion by the continuous wave-line in the figure. The forces acting on both sides of the circle in the positions *I*, *II*, *III*, and *IV* are correctly represented for any given instant in magnitude and direction by the arrows at the sides. If, then, in the neighbourhood of a node the spark-gap is turned towards the node, we have in the circle a stronger force acting under favourable conditions against a weaker force, which acts under unfavourable conditions. But if the spark-gap is turned away from the node, the stronger force now acts under unfavourable conditions against a weaker force, which in this case is acting under favourable conditions. And whether in this latter case the one preponderates or the other, the sparks must necessarily be weaker than in the former case. Thus, the change of sign of our phenomenon every quarter wave-length is explained.

Our explanation carries with it a means of further testing its correctness. If it is correct, then the change of sign at the points *B* and *D* should occur in a manner quite different from the change of sign at *C*. At *V*, *VI*, and *VII* in the figure the circle and the acting forces in these positions are represented, and it is easily seen that if at *B* or *D* we transfer the spark-gap from the one position to the other by rotating the circle within itself, the oscillation changes its direction relatively to a fixed direction within the circle; during this rotation the sparks must therefore become zero either once or an uneven number of times.



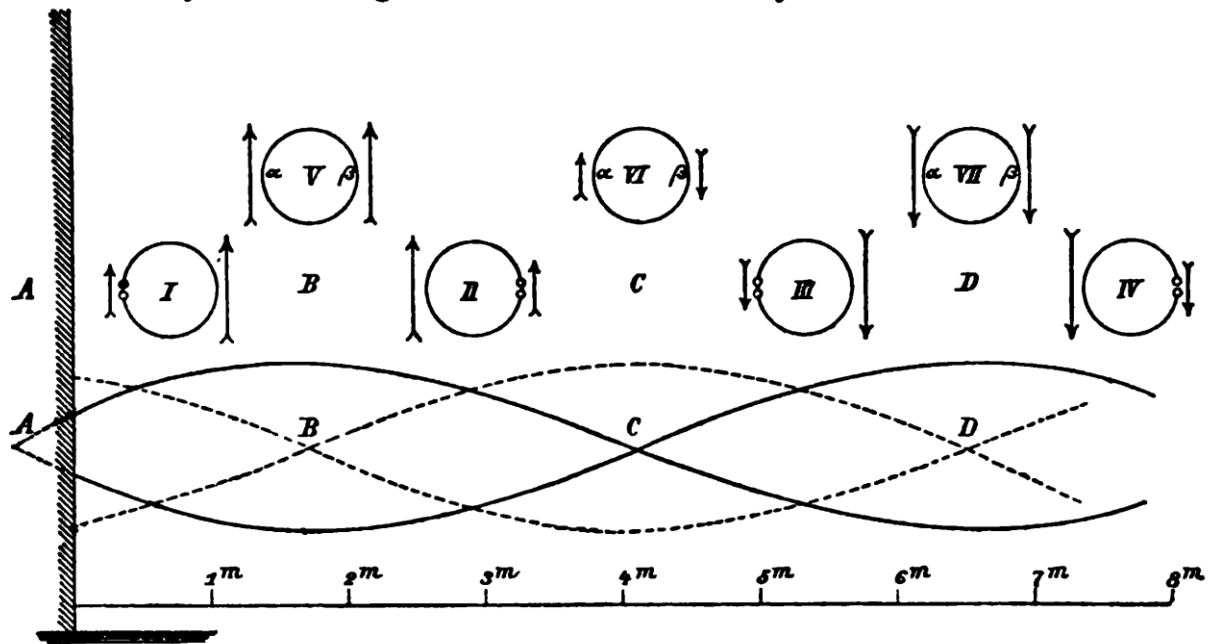


Fig. 26.

On the other hand, if the same operation is performed at *C*, the direction of the oscillation does not change; and therefore, the sparks must either not disappear at all, or else they must disappear an even number of times. Now when we actually make the experiment, what we observe is this: — At *B* the intensity of the sparks diminishes as soon as we remove the spark-gap from *a*, becomes zero at the highest point, and again increases to its original value when we come to  $\square$ . Similarly at *D*. At *C*, on the other hand, the sparks persist without change during the rotation, or, if anything, are somewhat stronger at the highest and lowest points than at those which we have been considering. Furthermore, it strikes the observer that the change of sign ensues after a much smaller displacement at *C* (p. 130) than at *B* and *D*, so that in this respect also there is a contrast between the change at *O* and that at *B* and *D*.

The representation of the electric wave which we have thus sketched can be verified in yet another way, and a very direct one. Instead of placing the plane of our circle in the plane of oscillation, let us place it in the wave-plane; the electric force is now equally strong at all parts of the circle, and for similar positions of the sparks their intensity is simply proportional to this electric force. As might be expected, the sparks are now zero at the highest and lowest points of the circle at all distances, and are strongest at the points along the normal in a horizontal plane. Let us then bring the spark-gap into one of these latter positions, and move slowly away from the wall. This is what we observe: — Just at the conducting metallic surface there are no sparks, but they make their appearance at a very small distance from it; they increase rapidly, are comparatively strong at *B*, and then again diminish. At *C* again they are exceedingly feeble, but become stronger as we proceed further. They do not, however, again diminish, but continue to increase in strength, because we are now approaching the primary

oscillation. If we were to illustrate the strength of the sparks along the interval  $AD$  by a curve carrying positive and negative signs, we should obtain almost exactly the curve which has been sketched. And perhaps it would have been better to start from this experiment. But it is not really so striking as the first one described; and furthermore, a periodic change of sign seems to be a clearer proof of wave-motion than a periodic waxing and waning.

We are now quite certain that we have recognised nodes of the electric wave at  $A$  and  $C$ , and antinodes at  $B$  and  $D$ . We might, however, in another sense call  $B$  and  $D$  nodes, for these points are nodes of a stationary wave of magnetic force, which, according to theory, accompanies the electric wave and is displaced a quarter wave-length relatively to it. This statement can be illustrated experimentally as follows: — We again place our circle in the plane of oscillation, but now bring the spark-gap to the highest point. In this position the electric force, if it were homogeneous over the whole extent of the secondary circle, could induce no sparks. It (p. 131) only produces an effect in so far as its magnitude varies in various parts of the circle, and its integral taken around the circle is not zero. This integral is proportional to the number of lines of magnetic force which flow backwards and forwards through the circle. In this sense, we may say that in this position, the sparks measure the magnetic force, which is perpendicular to the plane of the circle.<sup>1</sup> But now we find that in this position near the wall there is vigorous sparking which rapidly diminishes, disappears at  $B$ , increases again up to  $C$ , then again decreases to a marked minimum at  $D$ , after which it continuously increases as we approach the primary oscillation. Representing the strength of these sparks as ordinates with positive and negative signs, we obtain approximately the dotted line of our figure, which thus represents correctly the magnetic wave. The phenomenon which we first described can also be explained as resulting from the co-operation of the electric and the magnetic force. The former changes sign at the points  $A$  and  $C$ , the latter at the points  $B$  and  $D$ ; thus, one part of the action changes sign at each of these points while the other retains its sign; hence the resulting action (as the product) changes sign at each of the points. Clearly this explanation only differs in mode of expression, and not in meaning, from the one first given.

Hitherto we have only considered the phenomena in some of the more important positions of the circle. The number of transitions between these is in a threefold sense infinite. We shall therefore content ourselves with describing the transitions for the case in which the plane of the circle lies in the plane of oscillation. Near the wall the sparking is greatest on the side towards the wall, and least on the opposite side; on rotating the circle within itself the sparking changes from the one value to the other, attaining only intermediate values; there are no zero-points in the circle. As we move away from the wall the sparking on the side remote from it gradually diminishes and becomes zero when the centre of the circle is 1.08 metre distant from the wall; this distance can be ascertained within a few centimetres. As we proceed further, the sparks on the side remote from the wall reappear and at first are still weaker than on the side towards the wall; but (p. 132) the strength of the sparks does not

---

<sup>1</sup> [See Note 18 at end of book.]

change from the one value to the other simply by passing through intermediate values; on rotating the circle within itself the sparking becomes zero once in the upper and once in the lower half of the circle. The two zero-points develop out of the one which was first formed and separate gradually more from each other, until at *B* they lie at the highest and lowest points of the circle. By this indication the point *B* can be determined with fair accuracy, but more exactly still by a further observation of the zero-points. On proceeding further, these zero-points slide over towards the side of the circle facing the wall, approach each other, and again coincide in a single zero-point at a certain distance from the wall which can be sharply determined. In this case the distance of the centre from the wall is 2.35 metres. The point *B* must lie exactly between this and the analogous point first observed, *i.e.*, at a distance of 1.72 metres from the wall; this agrees within a few centimetres with the direct observation. If we proceed further towards *C* the sparks at all points of the circle tend to become of equal strength, and do become so at *C*. Beyond *C* the same performance begins over again. In this region there are no zero-points in the circle. In spite of this the position of the point *C* can be determined with fair accuracy, inasmuch as in its neighbourhood the phenomena first described alter very rapidly. In my experiments *C* was 4.10 to 4.15 metres, or say 4.12 metres from the wall. The point *D* could not be accurately determined for the phenomena had here become very feeble; only this much could be asserted, that its distance from the wall was between 6 and 7.5 metres. For an explanation of the details, I may refer to a previous paper.<sup>1</sup> The mathematical developments therein indicated admit of being carried much further; but the experiments seem to be sufficiently intelligible without calculation.

According to our measurement, the distance between *B* and *C* is 2.4 metres. If we assume this to be the correct value, the nodal point *A* lies 0.68 metres behind the wall, the point *D* 6.52 metres in front of it, which agrees sufficiently well with the experiments. According to this, the half wavelength is 4.8 metres. By an indirect method I had obtained (p. 133) 4.5 metres as the wave-length for the same apparatus. The difference is not so great as to prevent us from regarding the new measurement as confirming the earlier one.\* If in our earlier measurements we substitute 2.9 for 2.8 metres as the wave-length in the wire, and 7.1 for 7.5 as the length of the coincidence (which will be found to agree with the observations), we can deduce the new value from the earlier observations. Perhaps, indeed, a mean value would be nearest to the truth; and I scarcely think it likely that the nodal point *A* should lie nearly 0.7 metre behind the metallic wall. Assuming a mean value for the wave-length, and a velocity of propagation equal to that of light, we get for the period of oscillation of our apparatus about 1.55 hundred-millionths of a second, instead of the 1.4 hundred-millionths obtained by calculation.

I have repeated the experiments with some alterations. Altering the distance of the primary oscillation from the reflecting wall did not result in much fresh information. If this distance could have

---

<sup>1</sup> See V., p. 80.

\* [See Note 19 at end of book.]

been considerably extended, we might certainly have expected a distinct formation of a second and third wave-length; but there was not sufficient space for such extension. When the distance was diminished the phenomena simply became less interesting, for towards the primary oscillation they were more and more indistinct, and in the opposite direction the reversal of sign became lost. The experiments with an oscillation of different period are better worth describing, for they show that the points which have attracted our attention are determined, not by the form of the wall or of the room, but only by the dimensions of the primary and of the secondary oscillation. I, therefore, used for some experiments a secondary circle of 17·5 cm radius, and a primary oscillation of the same periodic time as this circle. The primary oscillator was placed at a distance of 8 – 9 metres from the wall. It is, however, difficult to work with apparatus of such small dimensions. Not only are the sparks exceedingly minute but the phenomena of resonance, etc., are very feebly developed. I suspect that oscillations of such rapidity are very rapidly damped. Thus, it was not possible here to make out as much detail as in the case of the larger circle; but the (p. 134) main features, such as those first described above, could be plainly recognised. Near the wall, and at distances of 2·5 and 4·5 metres from it, the stronger sparks were on the side next the wall; at the intermediate positions (1·5 and 3·5 metres from the wall) the stronger sparks were on the side next the primary oscillation. A change of sign occurred about every metre; accordingly, the half wave-length was here only 2 metres, and the oscillation was more than twice as rapid as that first used.

Finally, I may remark that as far as the above experiments are concerned, no great preparations are essential if one is content with more or less complete indications of the phenomena. After some practice one can find indications of reflection at any wall. Indeed, the action of the reflected waves can be quite well recognised between any one of the iron pillars above referred to and the primary oscillation; and similarly on the opposite side the electromagnetic shadow can be perceived.

Let us now extend our experiments in a new direction. Hitherto the secondary conductor has been placed between the reflecting wall and the primary oscillation, — that is to say, in a space in which the direct and reflected waves travel in opposite directions and by interference produces stationary waves. If, on the contrary, we place the primary oscillation between the wall and the secondary conductor, the latter is situated in a space in which the direct and reflected waves travel in the same direction. Hence these must combine to produce a progressive wave, the intensity of which will, however, depend upon the difference of phase between the two interfering waves. If the phenomena are to be at all striking, the two waves must be of similar intensity; hence the distance of the primary oscillation from the wall must not be large compared with the dimensions of the latter, and must be small compared with the distance from the secondary oscillation. In order to test whether the corresponding phenomena could be observed under the working conditions, I arranged an experiment as follows: — The secondary circle was now set up at a distance of 14 metres from the reflecting wall, and therefore 1 metre away from the opposite wall. Its plane was parallel to what we have called the plane of oscillation, and its spark-gap was turned towards the nearer wall so (p. 135) that the conditions were especially favourable for the appearance of sparks in it. The primary conductor was set up

parallel to its original position in front of the conducting wall, and, at first, at a very short distance, —about 30 cm, — from it. The sparks in the secondary circle were extremely feeble. The spark-gap was now adjusted so that no sparks whatever passed over. The primary conductor was next shifted step by step away from the wall. Single sparks soon appeared in the secondary conductor, and these ran into an unbroken stream of sparks when the primary conductor arrived at a distance of 1.5 – 2 metres from the wall — that is to say, at the point *B*. This might be referred to the decrease in the distance between the two conductors. But when I now removed the primary conductor further away from the wall, and therefore nearer to the secondary, the sparks again diminished and disappeared when the primary arrived at *C*. On proceeding still further the sparks began to increase and did so now continuously. No exact measurement of the wave-length can be deduced from these experiments, but from what has been stated above it will be seen that the wave-lengths already obtained are in accordance with the phenomena. The experiments could be very well carried out with the smaller apparatus. The primary conductor was set up at a distance of 1 metre from the wall, and the corresponding secondary conductor, 9 metres from the wall. The sparks in the latter were certainly small, but could be quite well observed. They disappeared when the primary conductor was moved out of its position, whether it was moved towards the wall or towards the secondary conductor. The sparks only reappeared when the distance from the wall was increased to 3 metres, and from there on they did not again disappear on approaching nearer to the secondary conductor. It is worthy of notice that at the same distance of 2 metres the presence of the wall proved to be of assistance in propagating the induction in the case of the slower oscillation, whereas it was a hindrance in the case of the more rapid one. This shows plainly that the position of the points to which we have drawn attention is determined by the dimensions of the oscillator, and not by those of the wall or room.

In acoustics there is an experiment analogous to those last described, in which it is shown that when a tuning-fork is (p. 136) brought near a wall the sound is strengthened at certain distances and weakened at others. The analogous experiment in optics is Lloyd's form of Fresnel's mirror-experiment.<sup>1</sup> In optics and acoustics these experiments count as arguments in favour of the wave-nature of light and sound; and so, the phenomena here described may be regarded as arguments in favour of the propagation of the inductive action of an electric oscillation by wave-motion.

I have described the present set of experiments, as also the first set on the propagation of induction, without paying special regard to any particular theory; and, indeed, the demonstrative power of the experiments is independent of any particular theory. Nevertheless, it is clear that the experiments amount to so many reasons in favour of that theory of electromagnetic phenomena which was first developed by Maxwell from Faraday's views. It also appears to me that the hypothesis as to the nature of light which is connected with that theory now forces itself upon the mind with still stronger reason than heretofore. Certainly, it is a fascinating idea that the processes in air which we have been investigating represent to us on a million-fold larger scale the same processes which go on in the

---

<sup>1</sup> [See Note 20 at end of book.]

neighbourhood of a Fresnel mirror or between the glass plates used for exhibiting Newton's rings. That Maxwell's theory, in spite of all internal evidence of probability, cannot dispense with such confirmation as it has already received, and may yet receive, is proved, — if indeed proof be needed, — by the fact that electric action is not propagated along wires of good conductivity with approximately the same velocity as through air. Hitherto it has been inferred from all theories, Maxwell's included, that the velocity along wires should be the same as that of light. I hope in time to be able to investigate and report upon the causes of this conflict between theory and experiment.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> [See Note 21 at end of book.]

(p. 137)

## IX

### THE FORCES OF ELECTRIC OSCILLATIONS, TREATED ACCORDING TO MAXWELL'S THEORY

(*Wiedemann's Ann.* 38, p. 1, 1889.)

The results of the experiments on rapid electric oscillations which I have carried out appear to me to confer upon Maxwell's theory a position of superiority to all others. Nevertheless, I based my first interpretation of these experiments upon the older views, seeking partly to explain the phenomena as resulting from the co-operation of electrostatic and electromagnetic forces. To Maxwell's theory in its pure development such a distinction is foreign. Hence, I now wish to show that the phenomena can be explained in terms of Maxwell's theory without introducing this distinction. Should this attempt succeed, it will at the same time settle any question as to a separate propagation of electrostatic force, which indeed is meaningless in Maxwell's theory.

Apart from this special aim, a closer insight into the play of the forces which accompany a rectilinear oscillation is not without interest.

#### *The Formulæ*

In what follows we are almost solely concerned with the forces in free ether. In this let  $X, Y, Z$  be the components of the electric force along the co-ordinates of  $x, y, z$ ;<sup>1</sup>  $L, M, N$ , (p. 138) the corresponding components of the magnetic force, both being measured in Gauss units;<sup>†</sup> and let  $t$  denote

---

<sup>1</sup> Suppose that you are standing at the origin of the system of co-ordinates on the  $zy$ -plane. Further assume that the direction of positive  $z$  is straight in front, of positive  $z$  upwards, and of positive  $y$  to the right hand. Unless these conventions were made, the signs of the electric and magnetic forces in the subsequent equations would not have their usual meanings.

<sup>†</sup> **H. v. Helmholtz**, *Wied, Ann*, 17, p. 48, 1882.

the time and A the reciprocal of the velocity of light. Then, according to Maxwell, the time-rate of change of the forces is dependent upon their distribution in space as indicated by the following equations: —

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{array} \right.$$

Originally, and therefore always, the following conditions must be satisfied: —

$$(3) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

The electric energy contained in a volume-element  $\tau$  of the ether is equal to

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) d\tau;$$

the magnetic energy is equal to

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2) d\tau$$

the integration extending through the volume  $\tau$ . The total energy is the sum of both these portions.

These statements form, as far as the ether is concerned, the essential parts of Maxwell's theory. Maxwell arrived at them by starting with the idea of action-at-a-distance and attributing to the ether the properties of a highly polarizable dielectric medium. We can also arrive at them in other ways. But in no way can a direct proof of these equations be deduced from experience. It appears most logical, therefore, to regard them independently of the way in which they have been arrived at, to consider them as hypothetical assumptions, and to let their probability depend upon the very large number of natural laws which they embrace. If we take up this point of view, we can dispense with a number of auxiliary ideas which render the understanding of Maxwell's theory more difficult, partly for no other reason than that they really possess no meaning,<sup>1</sup> if we finally exclude the notion of direct action-at-a-distance.

---

<sup>111</sup> As an example, I would mention the idea of a dielectric-constant of the ether.



Multiply equations (1) by  $L, M, N$ , and equations (2) by  $X, Y, Z$ ; add the equations together and integrate over a volume of which  $d\tau$  is the volume-element and  $d\omega$  the surface-element. We thus get,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau + \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \left\{ (NY - MZ) \cos n_x + (LZ - NX) \cos n_y \right. \\ & \quad \left. + (MX - LY) \cos n_z \right\} d\omega, \end{aligned}$$

where  $n, x, y, z$  denotes the angles which the normals from  $d\omega$  make with the axis.

This equation shows that the amount by which the energy of the space has increased can be regarded as having entered through the elements of the surface. The amount which enters through each element of the surface is equal to the product of the components of the electric and magnetic forces resolved along the surface, multiplied by the sine of the angle which they form with each other, and divided by  $4\pi A$ . It is well known that upon this result Dr. Poynting has based a highly remarkable theory on the transfer of energy in the electromagnetic field.<sup>2</sup>

With regard to the solution of the equations we **restrict ourselves** to the special but important case in which the distribution of the electric force is symmetrical about the  $z$ -axis, in such a way that this force at every point lies in the meridian plane passing through the axis of  $z$  and only depends upon the  $z$ -co-ordinate of the point and its distance  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  from the  $z$ -axis. Let  $R$  denote the component of the electric force in the direction of  $p$ , namely  $Xx/\rho + Yy/\rho$ ; and further let  $P$  denote the component of the magnetic force (p. 140) perpendicular to the meridian plane, namely  $Ly/\rho - Mx/\rho$ .

We then assert that if  $\Pi$  is any function whatever of  $\rho, z, t$ , which satisfies the equation —

$$A^2 d^2 \Pi / dt^2 = \Delta \Pi$$

and if we put  $Q = \rho d\Pi/d\rho$ , then the system

$$\begin{aligned} \rho Z &= dQ / d\rho, & \rho P &= A dQ / dt, \\ \rho R &= dQ / dz, & N &= 0. \end{aligned}$$

is a possible solution of our equations.

---

<sup>2</sup> J. H. Poynting, *Phil. Trans.*, 1884, 11. p. 343.

In order to prove this assertion, we observe that we have

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{R} \frac{d\rho}{dx} = \frac{d^2\Pi}{dx dz}, & \mathbf{L} &= \mathbf{P} \frac{d\rho}{dy} = \mathbf{A} \frac{d^2\Pi}{dy dt}, \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{R} \frac{d\rho}{dy} = \frac{d^2\Pi}{dy dz}, & \mathbf{M} &= \mathbf{P} \frac{d\rho}{dx} = \mathbf{A} \frac{d^2\Pi}{dx dt}, \\ \mathbf{Z} &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\Pi}{d\rho} = \frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2}, & \mathbf{N} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

We have only to substitute these expressions in the equations (1), (2) and (3) to find equations (2) and (3) identically satisfied, and also equations (1) if we have regard to the differential equation for  $\Pi$ .

It may also be mentioned that conversely, neglecting certain limitations of no practical importance, every possible distribution of electric force which is symmetrical about the  $z$ -axis can be represented in the above form; but for the purpose of what follows it is not necessary to accept this statement.

The function  $Q$  is of importance to us. For the lines in which the surface of revolution  $Q = \text{const.}$  cuts its meridian planes are the lines of electric force; if we construct these for every meridian plane at any instant, we get a clear representation of the distribution of the force. If we cut the cup-shaped space lying between the surfaces  $Q$  and  $Q + dQ$  in various places by surfaces of rotation around the  $z$ -axis, then for all such cross-sections the product of electric force and cross-section, which Maxwell calls the induction across the section, is the same. If we arrange the system of surfaces  $Q = \text{const.}$  so that in passing from one to another  $Q$  increases by the same amount  $dQ$ , then the same statement holds good if we (p. 141) compare amongst themselves the cross-sections of the various spaces thus formed. In the plane diagram formed by the intersection of the meridian planes with the equidistant surfaces  $Q = \text{const.}$ , the electric force is only inversely proportional to the perpendicular distance between two of the lines  $Q = \text{const.}$  when the points compared lie at the same distance from the  $z$ -axis; in general, the rule is that the force is inversely proportional to the product of this distance, and of the co-ordinate  $p$  of the point under consideration.

In what follows we shall introduce along with  $p$  and  $z$  the polar co-ordinates  $r$  and  $\theta$ , which are connected with the former by the relations  $p = r \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ;  $r$  then denotes the distance from the origin of our system of co-ordinates.

### *The Forces around a Rectilinear Oscillation*

Let  $E$  denote a quantity of electricity,  $l$  a length,  $m = \pi/\lambda$  the reciprocal of a length, and  $n = \pi/T$  the reciprocal of a time.

Let us put

$$\Pi = El \sin(mr - nt)/r$$

This value satisfies the equation  $A^2 d^2 \Pi dt^2 = \Delta \Pi$ , if we stipulate that  $m/n = T/\lambda = A$ , and hence that  $\lambda/T$  shall be equal to the velocity of light. And it must be noticed that the equation referred to is satisfied everywhere, except at the origin of our system of co-ordinates.

In order to find out what electrical processes at this point correspond to the distribution of force specified by  $\Pi$ , let us investigate its immediate neighbourhood. Thus, let  $r$  be vanishingly small compared with  $\lambda$ , and  $mr$  negligible compared with  $nt$ . Then  $\Pi$  becomes<sup>1</sup> equal to  $-E/\sin nt/r$ . Now since

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

We have

$$X = \frac{d^2 \Pi}{dx dz}, \quad Y = \frac{d^2 \Pi}{dy dz}, \quad Z = \frac{d^2 \Pi}{dz^2}.$$

(p. 142) Thus, the electric forces appear here as the derivatives of a potential

$$\phi = \frac{d\Pi}{dz} = El \sin nt \frac{d}{dz} \frac{1}{r}$$

and this corresponds to an electrical double-point, whose axis coincides with the  $z$ -axis, and whose moment oscillates between the extreme values  $+El$  and  $-El$  with the period  $T$ . Hence our distribution of force represents the action of a rectilinear oscillation which has the very small length  $l$ , and on whose poles at the maximum the quantities of electricity  $+E$  and  $-E$  become free. The magnetic force perpendicular to the direction of the oscillation and in its immediate neighbourhood comes out as: —

$$P = AEI n \cos nt \sin \theta / r^2$$

According to the Biot-Savart law this is the force of a current-element of length  $l$  lying in the direction of the axis of  $z$ , and whose intensity, in magnetic measure, oscillates between the extreme

---

<sup>1</sup>[See Note 22 at end of book.]

values  $+\pi AE/T$  and  $-\pi AE/T$ . In fact, the motion of the quantity of electricity  $E$  determines a current of that magnitude.

From II we get: —

$$Elm\{\cos(mr - nt) - \sin(mr - nt)/mr\}\sin^2\theta$$

and from this the forces  $Z, R, P$  follow by differentiation. Now it is true that the formulæ in general turn out to be too complicated to allow of a direct survey of the distribution of the forces. But in some special cases, which we will now indicate, the results are comparatively simple —

(1) We have already considered the immediate neighbourhood of the oscillation.

(2) In the  $z$ -axis, *i.e.*, in the direction of the oscillation, we have  $dp = rd\theta$ ,  $dz = dr$ ,  $\theta = 0$ ; so that here

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Z} = Elm/r^2\{\cos(mr - nt) - \sin(mr - nt)/mr\}$$

The electric force acts always in the direction of the oscillation; at small distances it diminishes as the inverse (p. 143) cube, at greater distances as the inverse square, of the distance.

(3) In the  $xy$ -plane, *i.e.*, when  $z = 0$ , we have  $dz = -rd\theta$ ,  $dp = dr$ ,  $\theta = 90^\circ$ ; and therefore —

$$\mathbf{P} = AEImn/r \{-\sin(mr - nt) - \cos(mr - nt)/mr + \sin(mr - nt)/m^2r^2\}$$

In the equatorial plane through the oscillation the electric force is parallel to the oscillation, and its amplitude is

$$El \frac{\sqrt{1 - m^2r^2 + m^4r^4}}{r^3}$$

The force diminishes continuously with increasing distance, at first rapidly as the inverse cube, but afterwards only very slowly and inversely as the distance itself. At greater distances the action of the oscillation can only be observed in the equatorial plane, and not along the axis.

(4) At very great distances we may neglect higher powers of  $1/r$  as compared with lower ones. Thus, we have at such distances —

$$\mathbf{Q} = Elm \cos(mr - nt) \sin^2\theta$$

from which we deduce —

$$P = A \cdot Elm n \sin(mr - nt) \sin \theta / r$$

$$Z = - Elm^2 \sin(mr - nt) \sin^2 \theta / r$$

$$R = Elm^2 \sin(mr - nt) \sin \theta \cos \theta / r$$

Whence it follows that  $Z \cos \theta + R \sin \theta = 0$ . Hence at great distances the force is everywhere perpendicular to the radius vector from the origin of the force; the propagation takes place in the form of a pure transversal wave. The magnitude of the force is  $Elm^2 \sin(mr - nt) \sin \theta / r$ . At a constant distance from the zero-point it decreases towards the axis, being proportional to the distance from the latter.

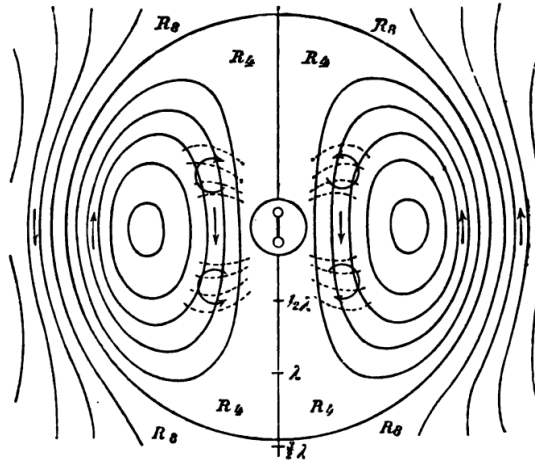


Fig. 27.

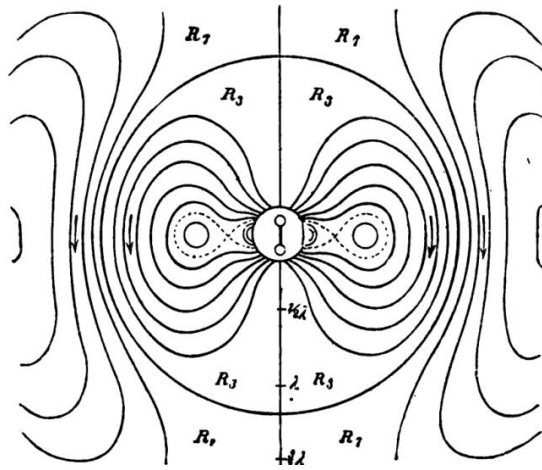


Fig. 30

In order now to find the distribution of force in the remaining parts of space we make use of graphic representation, drawing for definite times the lines of electric force, *i.e.*, the curves  $Q = \text{const.}$ , for equidistant values of  $Q$ . Since  $Q$  appears as the product of two factors, of which the one (p. 144) depends only upon  $r$ , and the other only upon  $\theta$ , the construction of these curves present no great difficulty. We split up each value of  $Q$ , for which we wish to draw the curve, in various ways in two factors; we determine the angle  $\theta$  for which  $\sin^2\theta$  is equal to the one factor and by (p. 145) this way we find as many points on the curve as we please.

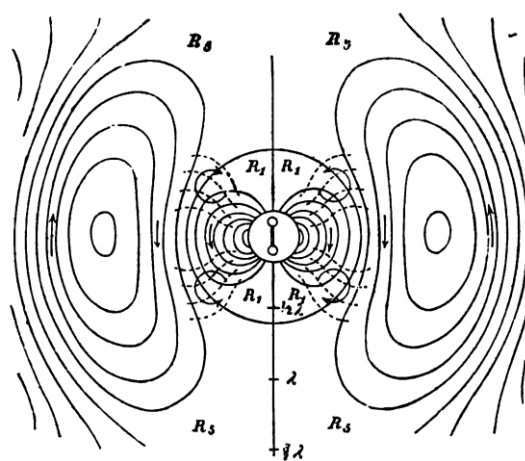


Fig. 28.

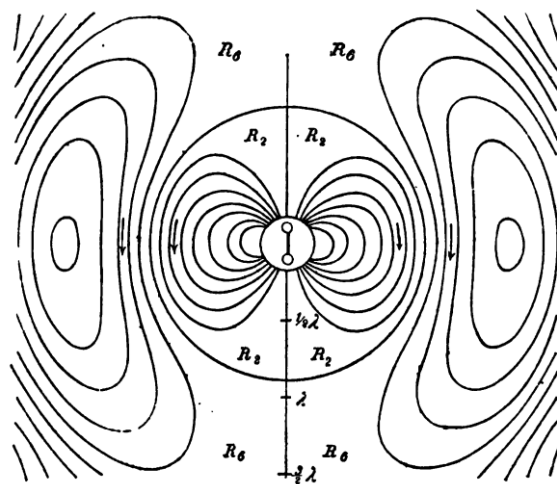


Fig. 29.

On setting about the construction of these curves one perceives many small artifices which it would be tedious to exhibit here. (p. 146) We shall content ourselves with considering the results of

the construction as shown in Figs. 27 – 30. These figures exhibit the distribution of force at the times  $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T$ , or by a suitable reversal of the arrows for all subsequent times which are whole multiples of  $\frac{1}{4}T$ . At the origin is shown, in its correct position and approximately to correct scale, the arrangement which was used in our earlier experiments for exciting the oscillations. The lines of force are not continued right up to this picture, for our formulæ assume that the oscillator is infinitely short, and therefore become inadequate in the neighbourhood of the finite oscillator.

Let us begin our explanation of the diagrams with Fig. 27. Here  $t = 0$ ; the current is at its maximum strength, but the poles of the rectilinear oscillator are not charged with electricity, — no lines of force converge towards them. But from the time  $t = 0$  onwards, such lines of force begin to shoot out from the poles; they are comprised within a sphere represented by the value  $Q = 0$ . In Fig. 27, indeed, this sphere is still vanishingly small, but it rapidly enlarges, and by the time  $t = \frac{1}{4}T$  (Fig. 28) it already fills the space  $R_1$ . The distribution of the lines of force within the sphere is nearly of the same kind as that corresponding to a static electric charge upon the poles. The velocity with which the spherical surface  $Q = 0$  spreads out from the origin is at first much greater than  $1/A$ ; in fact, for the time  $\frac{1}{4}T$  this latter velocity would only correspond to the value of  $\frac{1}{4}\lambda$  given in the figure. At an infinitesimal distance from the origin, the velocity of propagation is even infinite. This is the phenomenon which, according to the old mode of expression, is represented by the statement that upon the electromagnetic action which travels with the velocity  $1/A$ , there is superposed an electrostatic force travelling with infinite velocity. In the sense of our theory, we more correctly represent the phenomenon by saying that fundamentally the waves which are being developed do not owe their formation solely to processes at the origin, but arise out of the conditions of the whole surrounding space, which latter, according to our theory, is the true seat of the energy. However, this may be, the surface  $Q = 0$  spreads out further with a velocity which gradually sinks to  $1/A$ , and by the time  $t = \frac{1}{2}T$  (Fig. 29) fills (p. 147) the space  $R_2$ . At this time the electrostatic charge of the poles is at its greatest development; the number of lines of force which converge towards the poles is a maximum. As time progresses further no fresh lines of force proceed from the poles, but the existing ones rather begin to retreat towards the oscillating conductor, to disappear there as lines of electric force, but converting their energy into magnetic energy. Here there arises a peculiar action which can plainly be recognised, at any rate in its beginnings, in Fig. 30 ( $t = \frac{3}{4}T$ ). The lines of force which have withdrawn furthest from the origin become laterally inflected by reason of their tendency to contract together; as this inflection contracts nearer and nearer towards the  $z$ -axis, a portion of each of the outer lines of force detaches itself as a self-closed line of force which advances independently into space, while the remainder of the lines of force sink back into the oscillating conductor.

The number of receding lines of force is just as great as the number which proceeded outwards, but their energy is necessarily diminished by the energy of the parts detached. This loss of energy corresponds to the radiation into space. In consequence of this the oscillation would of necessity soon come to rest unless impressed forces restored the lost energy at the origin. In treating the oscillation as undamped, we have tacitly assumed the presence of such forces. In Fig. 27 — to which we now

return for the time  $t = T$ , conceiving the arrows to be reversed, — the detached portions of the lines of force fill the spherical space  $R_4$ , while the lines of force proceeding from the poles have completely disappeared. But newlines of force burst out from the poles and crowd together the lines whose development we have followed into the space  $R_5$ (Fig. 28). It is not necessary to explain further how these lines of force make their way to the spaces  $R_6$ (Fig. 29),  $R_7$ (Fig. 30),  $R_8$  (Fig. 27). They run more and more into a pure transverse wave-motion, and as such lose themselves in the distance. The best way of picturing the play of the forces would be by making drawings for still shorter intervals of time and attaching these to a stroboscopic disk.

A closer examination of the diagrams shows that at points which do not lie either on the  $z$ -axis or in the  $xy$ -plane the direction of the force changes from instant to instant. Thus, (p. 148) if we represent the force at such a point in the usual manner by a line drawn from the point, the end of this line will not simply move backwards and forwards along a straight line during an oscillation, but will describe an ellipse. In order to find out whether there are any points at which this ellipse approximates to a circle, and in which, therefore, the force turns successively through all points of the compass without any appreciable change of magnitude, we superpose two of the diagrams which correspond to times differing by  $\frac{1}{2}T$  from one another, *e.g.*, Figs. 27 and 29, or 28 and 30. At such points as we are trying to find, the lines of the one system must clearly cut those of the second system at right angles, and the distances between the lines of the one system must be equal to those of the second. The small quadrilaterals formed by the intersection of both systems must therefore be squares at the points sought. Now, in fact, regions of this kind can be observed; in Figs. 27 and 28 they are indicated by circular arrows, the directions of which at the same time give the direction of rotation of the force. For further explanation dotted lines are introduced which belong to the system of lines in Figs. 29 and 30. Furthermore, we find that the behaviour here sketched is exhibited by the force not only at the points referred to, but also in the whole strip-shaped tract which, spreading out from these points, forms the neighbourhood of the  $z$ -axis. Yet the force diminishes in magnitude so rapidly in this direction that its peculiar behaviour only attracts attention at the points mentioned.

In an imperfect series of observations which are not guided by theory, the force-system here described, and required by theory, may well exhibit itself in the manner described in an earlier paper.<sup>1</sup> The observations referred to do, not by any means enable us to recognise all the complicated details, but they show correctly the main features of the distribution. According to both observation and theory the distribution of the force in the neighbourhood of the oscillator is similar to the electrostatic distribution. According to both observation and theory the force spreads out chiefly in the equatorial plane and diminishes in that plane at first rapidly, then slowly, without becoming zero (p. 149) at any intermediate distance. According to both observation and theory the force in the equatorial plane, along the axis, and at great distances, is constant in direction and variable in magnitude; whereas, at intermediate points, its direction varies greatly and its magnitude but little. The only want of accord

---

<sup>1</sup> See V, p. 90.



between theory and the observations referred is in this — that, according to the former, the force at great distances should always be perpendicular to the radius vector from the origin, whereas, according to the latter, it appeared to be parallel to the oscillation. These two come to the same thing for the neighbourhood of the equatorial plane, where the forces are strongest, but not for directions lying between the equatorial plane and the axis. I believe that the error is on the side of the observations. In the experiments referred to the oscillator was parallel to the two main walls of the room used; and the components of the force parallel to the oscillator might thereby be strengthened as compared with the components normal to the oscillator.

I have therefore repeated the experiments, making various alterations in the position of the primary oscillator, and found that in certain positions the results were in accordance with theory. Nevertheless, the results were not free from ambiguity, for at great distances and in places where the force was feeble, the disturbances due to the environment of the space at my disposal were so considerable that I could not arrive at a trustworthy decision.

While the oscillator is at work the energy oscillates in and out through the spherical surfaces surrounding the origin. But the energy which goes out during each period of oscillation through every surface is greater than that which returns, and is greater by the same amount for all the surfaces. This excess represents the loss of energy due to radiation during each period of oscillation. We can easily calculate it for aspherical surface, whose radius  $r$  is so great that we may use the simplified formulæ. Thus, the energy which goes out in the element of time  $dt$  through a spherical zone lying between  $\theta$  and  $\theta + d\theta$  is

$$dt \ 2\pi r \sin\theta \times rd\theta \times (Z \sin\theta - R \cos\theta) P \times \frac{1}{4}\pi A.$$

(p. 150) If we here substitute for  $Z$ ,  $P$ ,  $R$ , the values corresponding to large values of  $r$  and integrate with respect to  $\theta$  from 0 to  $\pi$ , and with respect to  $t$  from 0 to  $T$ , we get for the energy which goes out through the whole sphere during a half-oscillation

$$\frac{1}{3} E^2 l^2 m^3 n t = \pi^4 \frac{E^2 l^2}{3\lambda^3}$$

Let us now try to deduce from this an approximate estimate of the quantities actually involved in our experiments. In these we charged two spheres of 15 cm radius in opposite senses up to a sparking distance of about 1 cm. If we estimate the difference of potential between the two spheres as 120 C.G.S. electrostatic units ( $gm^{1/2} \times cm^{1/2} \times sec^{-1}$ ), then each sphere was charged to a potential of  $\pm 60$  C.G.S. units, and therefore its charge was  $E = 15 \times 60 = 900$  C.G.S. units ( $gm^{1/2} \times cm^{3/2} \times sec^{-1}$ ). Hence the whole stock of energy which the oscillator possessed at the start amounted to

$$2 \times \frac{1}{2} \times 900 \times 60 = 54,000 \text{ ergs.},$$

or about the energy which a gramme-weight would acquire in falling through 55 cm. The length  $l$  of the oscillator was about 100 cm, and the wave-length about 480 cm. Hence it follows that the loss of energy in the half-period of oscillation was about 2400 ergs.<sup>1</sup> It is therefore evident that after eleven half-oscillations one-half of the energy will have been expended in radiation. The rapid damping of the oscillations, indicated by our experiments, was therefore necessarily determined by the radiation, and would still occur even if the resistance of the conductor and of the spark became negligible.

To furnish energy amounting to 2400 ergs in 1.5 hundred-millionths of a second is equivalent to working at the rate of 22 horse-power. The primary oscillator must be supplied with energy at fully this rate if its oscillations are to be kept up continuously and with constant intensity in spite of the radiation. During the first few oscillations the intensity of the radiation at a distance of about 12 metres from the primary conductor corresponds to the intensity of the sun's radiation at the surface of the earth.

### *The Interference-Experiments*

In order to ascertain the velocity of propagation of the electric force in the equatorial plane, we caused it to interfere (p. 151) with the action of an electric wave proceeding with constant velocity along a wire.<sup>1</sup> It appeared that the resulting interferences did not succeed each other at equal distances, but that the changes were more rapid in the neighbourhood of the oscillation than at greater distances. This behaviour was explained by the supposition that the total force might be split up into two parts, of which the one, the electromagnetic, was propagated with the velocity of light, while the other, the electrostatic, was propagated with a greater, and perhaps infinite velocity. But now, according to our theory, the force under consideration in the equatorial plane is

$$Z = Elm^3 \left\{ \frac{-\sin(mr - nt)}{mr} - \frac{\cos(mr - nt)}{m^2 r^2} + \frac{\sin(mr - nt)}{m^3 r^3} \right\}$$

and this expression can in no way be split up into two simple waves travelling with different velocities. Hence if our present theory is correct, the earlier explanation can only serve as an approximation to the truth. Let us now investigate whether the present theory leads to any explanation of the phenomena. To begin with, we can write  $Z = \mathbf{B} \sin(nt - \delta_1)$ , where the amplitude of the force  $\mathbf{B} = El\sqrt{1 - m^2 r^2 + m^4 r^4 / r^3}$  and the phase of the force is determined by the equation —

---

<sup>1</sup>[See Note 23 at end of book.]

<sup>1</sup>See VII., p. 107.

$$\tan \delta_1 = \frac{\sin mr / mr + \cos mr / m^2 r^2 - \sin mr / m^3 r^3}{\cos mr / mr - \sin mr / m^2 r^2 - \cos mr / m^3 r^3}$$

which, after transformation, gives

$$\delta_1 = mr - \tan^{-1} \frac{mr}{1 - m^2 r^2}$$

In Fig. 31 the quantity  $\delta_1$  is represented as a function of  $mr$  by the curve  $\delta_1$ . The length  $a b$  in the figure corresponds to the value of  $\pi$ , both for abscissa and ordinates. If we regard  $r$ , instead of  $mr$ , as the variable abscissa, the length  $a b$  in the abscissa corresponds to the half wave-length. For the purpose of referring directly to the experiments which we wish to discuss, there is placed beneath the diagram a further division of the axis of abscissa into metres. According to the results obtained by direct experiment<sup>22</sup>  $2 \lambda$  is put = 4.8 metres, and (p. 152) from this, the length of the metre (or scale of divisions) is determined; but the first mark of the divided scale is not at the oscillator, but is placed at a distance of 0.45 metre beyond the latter. In this way the divisions represent the divisions of the base-line which we used in determining the interferences. We see from the figure that the phase does not increase from the source; its course is rather as if the waves originated at a distance of about  $\frac{1}{2}\lambda$  in space and spread out thence, partly towards the conductor, and partly into space. At great distances the phase is smaller by the value  $\pi$  than it would have been if the waves had proceeded with constant velocity from the origin; the waves, therefore, behave at great distances as if they had travelled through the first half wave-length with infinite velocity.

---

<sup>22</sup>See VIII, p. 124.

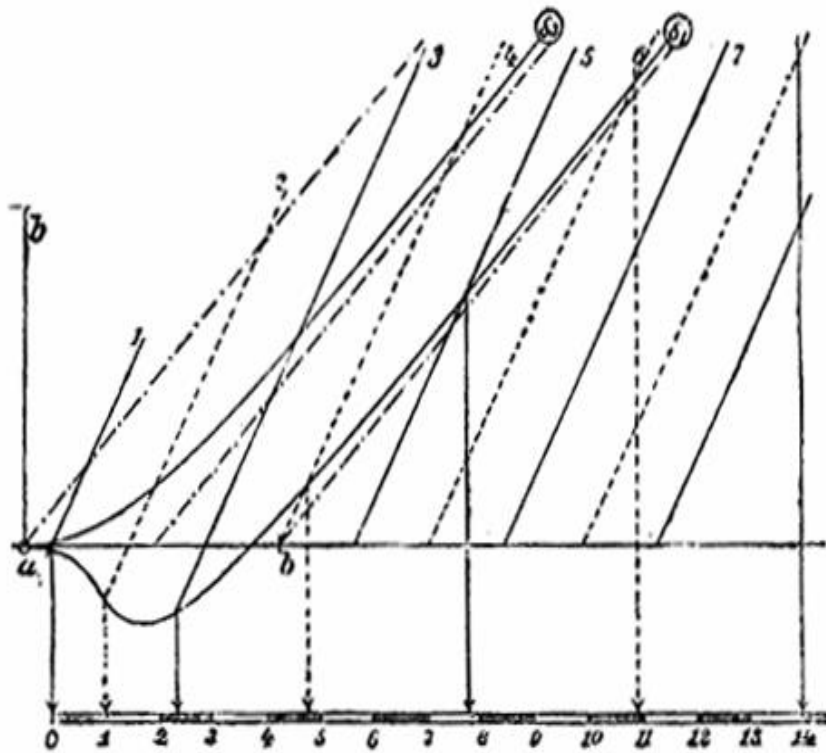


Fig. 31

The action  $w$  of the waves in the wire for a given position of the secondary conductor can now be represented in the form  $w = C \sin (nt - \delta_2)$  wherein  $\delta_2$  is used as an abbreviation for  $m_1 r + \delta = \pi r / \lambda_1 + \delta$ .  $\lambda_1$  denotes the half wave-length of the waves in the wire, which in our experiments was 2.8 metres.  $\delta$  indicates the phase of its action at the point  $r = 0$ , which we altered arbitrarily by interposing wires of various lengths. Similarly, we were able to alter the amplitude  $C$ , and we made it of such magnitude that the action of the waves in the wire was approximately equal to the direct action. The phase of (p. 153) the interference then depends only upon the difference between the phases  $\delta_1$  and  $\delta_2$ . With that particular adjustment of the secondary circle to which our expression for  $w$  relates, both actions reinforce one another (*i.e.*) the interference has the sign +) if  $\delta_1 - \delta_2$  is equal to zero or an odd multiple of  $2\pi$ ; the actions annul one another (*i.e.*, the interference has the sign -) if  $\delta_1 - \delta_2$  is equal to  $\pi$  or an odd multiple of it; no interference takes place (the interference has the sign 0) if  $\delta_1 - \delta_2$  is equal to an odd multiple of  $\frac{1}{2}\pi$ .

Let us now suppose that  $\delta$  is so determined that, at the beginning of the metre-scale, the phase of the interference has a definite value  $\varepsilon$ , so that  $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon$ . The straight line 1 in our figure will then represent the value of  $\delta_2 + \varepsilon$  as a function of the distance. For the inclination of the line is so chosen that for an increase of abscissa by  $\lambda_1 = 2.8$  metres, the ordinate increases by the value  $\pi$ ; and it is so

placed that it cuts the curve  $\delta_1$  at a point whose abscissa is at the beginning of the metre-scale. The lines 2, 3, 4, etc., further represent the course of the values of  $\delta_2 + \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon - \pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon - \frac{3}{2}\pi$ , etc. For these lines are parallel to the line 1, and are so drawn that they cut any given ordinate at distances of  $\frac{1}{2}\pi$ , and any given abscissa at distances of 1.4 metre. If we now project the points of intersection of these straight lines with the curve  $\delta_1$  upon the axis of abscissæ below, we clearly obtain those distances for which  $\delta_1$  is equal to  $\delta_2 + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon + \pi$ ,  $\delta_2 + \varepsilon + \frac{3}{2}\pi$ , etc., *i.e.* for which the phase of the interference has increased by  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ , etc., as compared with the zero-point. We thus deduce directly from the figure the following statements: — If at the zero-point of the base-line the interference has the sign + (–) it first attains the sign 0 at about 1 metre, the sign – (+) at about 2.3 metres, and it again acquires the sign 0 at about 4.8 metres: the interference reverts to the sign + (–) at about 7.6 metres, is again 0 at about 14 metres, and from there on the signs succeed each other in order at about equal distances. If at the zero-point of the base-line the interference has the sign 0, it will also have this sign at about 2.3 metres, 7.6 metres, and 14 metres; it will have a marked positive or negative character at about 1 metre, 4.8 metres, and 11 metres from the zero-point. Intermediate values correspond to intermediate phases. If this (p. 154) theoretical result is compared with the experimental result, and especially with those interferences which occurred on introducing 100, 250, 400, and 550 cm of wire,<sup>1</sup> the accordance will be found as complete as could possibly be expected.

I have not been able to account so well for the interferences of the second kind.<sup>2</sup> For producing these interferences we used the secondary circle in a position in which the most important factor was the integral force of induction around the closed circle. If we regard the dimensions of the latter as vanishingly small, the integral force is proportional to the rate of change of magnetic force perpendicular to the plane of the circle, and is therefore proportional to the expression: —

$$\frac{dP}{dt} = AEIm^2n^2 \left\{ -\frac{\cos (mr - nt)}{mr} + \frac{\sin (mr - nt)}{m^2r^2} \right\}$$

Hence, we deduce the phase  $\delta_3$  of this action —

$$\tan \delta_3 = -\frac{\cos mr/mr - \sin mr/m^2r^2}{\sin mr/mr + \cos mr/m^2r^2}$$

or after transformation —

---

<sup>1</sup>See p. 118.

<sup>2</sup>See p. 119.

$$\delta_3 = mr - \tan^{-1} mr$$

The line  $\delta_3$  of Fig. 31 represents the course of this function. We see that the phase of this action increases continuously from the origin itself. Hence the phenomena which point to a finite rate of propagation must, in the case of these interferences, make themselves felt even close to the oscillator. This was indeed apparent in the experiments, and therein lay the advantage presented by this kind of interference. But, contrary to the experiment, the apparent velocity near the oscillator comes out greater than at a distance from it; and it cannot be denied that, according to theory, the change of phase of the interference should be slightly, but noticeably, more rapid than it was in the experiments. It seems to me probable that a more complete theory — in which the two conductors used would not be regarded as vanishingly small, and perhaps a different estimate of the value of  $A$ , would establish a more satisfactory agreement. (p. 155) It is, however, important to notice that even on the basis of Maxwell's theory, the numerical results obtained cannot be explained without assuming a considerable difference between the rates of propagation of the waves in wires and in free space.

#### *Waves in Wire-shaped Conductors*

$$\mathbf{K}(p\rho) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p\rho(e^u + e^{-u})} du,$$

The function

which, for large values of  $\rho$ , approximates asymptotically to the function  $\sqrt{\pi / p\rho} e^{-p\rho}$  and for infinitesimal values of  $\rho$  to the function  $-\log(p\rho/2) - 0,577$ , satisfies the differential equation —

$$\frac{d^2\mathbf{K}(p\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{K}(p\rho)}{d\rho} - p^2\mathbf{K}(p\rho) = 0$$

If we therefore put —

$$\Pi = \frac{2J}{An} \sin(mz - nt)\mathbf{K}(p\rho)$$

then  $\Pi$  satisfies the equation  $A^2 d^2\Pi/dt^2 = \Delta\Pi$ , if we make  $p^2 = m^2 - A^2n^2$ . Here  $J$  must be understood to represent a current expressed in magnetic measure,  $p$  and  $m = \pi/\lambda$  reciprocals of lengths, and  $n = \pi/T$  the reciprocal of a time. The function  $\Pi$  satisfies its equation through all space, except along the  $z$ -axis, where it is discontinuous. The values  $R, Z, P, N$ , which can be deduced from the above  $\Pi$ ,

represent therefore an electrical disturbance taking place in a very thin wire stretched along the  $z$ -axis. In the immediate neighbourhood of this wire, neglecting quantities which contain even powers of  $\rho$ , we have —

$$Q_0 = \frac{2J}{An} \sin(mz - nt)$$

and therefore —

$$R_0 = \frac{2Jm}{An\rho} \cos(mz - nt)$$

$$P_0 = \frac{2J}{\rho} \cos(mz - nt)$$

in which the suffix 0 indicates that  $\rho$  is assumed to be (p. 156) vanishingly small. From the expression for  $R_0$  it follows that the quantity of free electricity  $e$  in unit length of the wire is —

$$e = \frac{1}{4\pi} 2\pi\rho R_0 = \frac{Jm}{An} \cos(mz - nt)$$

Similarly, from the expression for  $P_0$  it follows that the current  $i$  is —

$$i = \frac{1}{4\pi} 2\pi\rho P_0 = J \cos(mz - nt)$$

The values of  $i$  and  $e$  satisfy of themselves the necessary equation  $Ade/dt = -di/dz$ . They show us that the disturbance under consideration is an electric sine-wave which is propagated in the positive direction along the axis of  $z$ , whose half wave-length is  $A$ , and half-period of oscillation  $T$ , whose velocity is therefore  $\lambda/T = n/m$ , and whose intensity is such that the maximum current which arises is  $\pm J$ .

If we stipulate those external forces may be made to act arbitrarily in the wire, we may regard  $\lambda$  and  $T$  as being independent of each other. For every given relation between these quantities, *i.e.*, for every given velocity of the waves, the lines of electric force have a definite form which, independently of time, glides along the wire. As before, we represent this form, drawing the lines  $Q = \text{const.}$

$a$

$b$

$c$

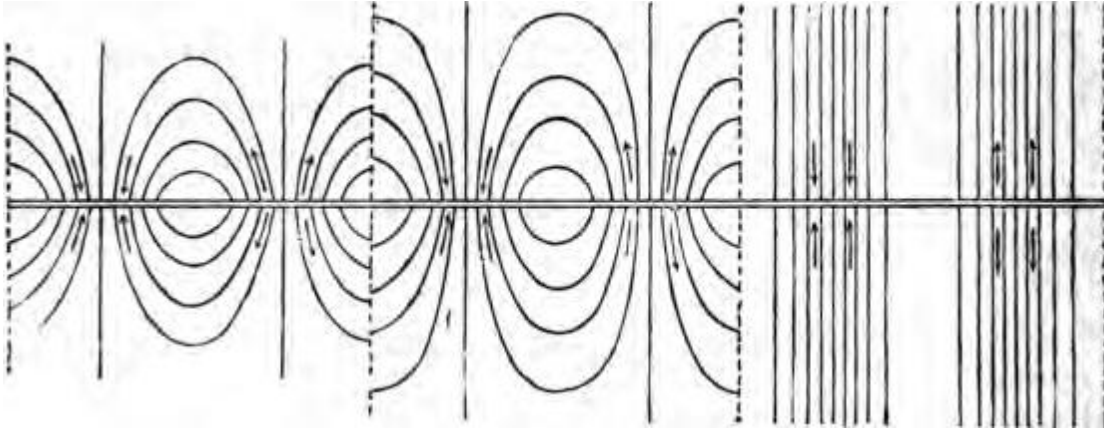


Fig 32

Such a representation is carried out in Fig. 32. In the first place, Fig. 32<sub>a</sub> represents the case in which the velocity is very small and therefore  $p = m$ . The drawing then represents a distribution of electrostatic force, viz. that which is obtained when we distribute electricity upon the wire so that its density (p. 157) is a sine-function of the length of the wire. Fig. 32<sub>b</sub> gives the lines of force for a velocity amounting to nearly 28/48 of that of light. We see that in proceeding from and returning to the wire the lines of force make a wider circuit than before. According to the older mode of conception, this would be explained by saying that the electromagnetic force, which is parallel to the wire, weakens the component of the electrostatic force in the same direction, whereas it does not affect the component perpendicular to the wire. The weakening of the component parallel to the wire may even amount to annulling it altogether. For if we take the velocity of propagation of the wire-waves as being equal to that of light,  $p$  becomes zero,  $K(p\rho)$  reduces to  $-\log \rho + \text{const.}$  for every value of  $\rho$ , and for every value of  $\rho$  —

$$Q = -\frac{2J}{An} \cdot \sin (mz - nt),$$

and therefore: —

$$R = \frac{2Jm}{An\rho} \cdot \cos (mz - nt), \quad Z = 0,$$

$$P = \frac{2J}{\rho} \cdot \cos (mz - nt), \quad N = 0.$$

The distribution of force then is the simplest that can be conceived; the electric force is everywhere normal to the wire and decreases in inverse proportion to the distance from it. The lines  $Q = \text{const.}$ ,



drawn for equidistant values of  $Q$ , are represented in Fig. 32c. For waves travelling with a velocity greater than  $1/A$ ,  $p$  becomes imaginary. For this case our formulæ would require transformation, but as it has no practical significance, we need not discuss it.

At the surface of a conductor, that component of the electric force which is tangential to the surface continues without discontinuity in the interior of the conductor. According to Maxwell, a perfect conductor is understood to mean one in whose interior there can only exist vanishingly small forces. From this it necessarily follows that at the surface of a perfect conductor the components of the force tangential to the surface must vanish. Unless this statement is incorrect, it follows that electric waves in wires of good conductivity must be propagated with the velocity of light and in the form which is (p. 158) represented in Fig. 32c. For only in this particular force-distribution is the force everywhere normal to the surface of the wire. In fact, then, it follows from Maxwell's theory, as well as from the older theories, that electric waves travel along perfectly conducting wires with the velocity of light.

If, on the other hand, we are to place any reliance upon our experiments, this conclusion is incorrect — the propagation takes place with a much smaller velocity and in some such form as is indicated in Fig. 32b. The result is all the more remarkable, because the velocity in wires appears likewise to be a velocity which is quite independent of the nature of the wire. I have found it to be the same in wires of the most diverse metals, varying widely in thickness and in the shape of their cross-section, and also in columns of conducting fluids. The causes which determine this velocity still remain obscure. The resistance, at all events, has nothing to do with it. For some time, I thought that it might be affected by the constant  $k$ , through the introduction of which Hr. H. v. Helmholtz has extended Maxwell's theory;<sup>1</sup> but further consideration led to the rejection of this idea. If only the limiting condition were correct, a wave of the form of Fig. 32c would yet be possible. This would always be a pure transversal wave, and as such must travel with the same velocity as plane transversal waves in space, whether simultaneous longitudinal waves are possible or not. Although a finite value of the constant  $k$  would not explain the difference between the two velocities, it would postulate the possibility of two kinds of waves in the wire with different velocities: experiment has hitherto given no intimation of such a phenomenon. It seems rather to be doubtful whether the limiting condition is correct for rapidly alternating forces.

Although it does not appear to be possible, on the one hand, to confer a velocity of any desired magnitude upon the waves travelling along the  $z$ -axis, there is no difficulty, on the other hand, in reducing the velocity as much as may be desired below its maximum value, or in producing distributions of force intermediate between the forms 32a and 32b. With this object the waves are made to proceed along crooked wires or wires rolled into spirals. For example, I rolled a wire 40 metres (p. 159) long into a spiral 1 cm in diameter, and so tightly that the length of the spiral was 1.6 metre; in this I was able to observe nodes at distances of about 0.31 metre, whereas, in the straight wire, the

---

<sup>1</sup> H. v. Helmholtz, *Ges. Abh.* 1, p. 545.

nodes were 2·8 metres apart. As the spiral was stretched out, the one value changed gradually into the other. Hence, when the velocity is measured along the  $z$ -axis (the axis of the spiral), the wave moves much more slowly in the coiled wire. When the velocity is measured along the wire itself, on the other hand, the wave certainly moves more rapidly. Along crooked wires the behaviour is similar. Unless I am mistaken, Maxwell's theory, assuming the limiting condition for good conductors, is unable to account for this. It seems to me that according to this theory the propagation, measured along the  $z$ -axis, must for every form of conductor take place with the velocity of light; provided, in the first place, that the resistance of the conductor does not come into consideration, and, in the second place, that the dimensions of the conductor perpendicular to the axis are negligible in comparison with the wave-length. Both conditions are satisfied by coiled metallic wires; but what should happen does not happen. In our endeavour to explain the observations by means of Maxwell's theory, we have not succeeded in removing all difficulties. Nevertheless, the theory has been found to account most satisfactorily for the majority of the phenomena; and it will be acknowledged that this is no mean performance. But if we try to adapt any of the older theories to the phenomena, we meet with inconsistencies from the very start, unless we conciliate these theories with Maxwell's by introducing the ether as dielectric in the manner indicated by v. Helmholtz

## ON THE PROPAGATION OF ELECTRIC WAVES BY MEANS OF WIRES

( *Wiedemann's Ann.* 37, p. 895, 1889.)

WHEN a constant electric current flows along a cylindrical wire, its strength is the same at every part of the section of the wire. But if the current is variable, self-induction produces a deviation from this most simple distribution. For the central parts of the wire are, on the whole, less distant from all the rest than are the outer parts; hence induction opposes variations of the current in the centre of the wire more strongly than at the circumference, and consequently the current by preference flows along the outer portion of the wire. When the current changes its direction a few hundred times per second, the deviation from the normal distribution can no longer be imperceptible. This deviation increases rapidly with the rate of alternation; and when the current alternates many million times per second, almost the whole of the interior of the wire must, according to theory, appear free from current, and the flow must confine itself to the very skin of the wire. Now in such extreme cases the above conception of what takes place is obviously not free from physical difficulties; and preference must be given to another conception of the matter which was first presented by Messrs. O. Heaviside<sup>1</sup> and J. H. Poynting,<sup>2</sup> as the correct interpretation of Maxwell's equations as applied to this case. According to this view, the electric force which determines the current is not propagated (p.161) in the wire itself, but under all circumstances penetrates from without into the wire, and spreads into the metal with comparative slowness and according to laws similar to those which govern changes of temperature in a conducting body. Thus, when the forces around the wire continually alter their direction, the action of these forces only extends to a very slight depth within the metal; the slower the fluctuations, the more deeply will the action penetrate; and lastly, when the changes succeed each other with infinite slowness, the force has time to penetrate into the interior of the wire and to act with uniform strength throughout it.<sup>1</sup>

Whatever conception we may form from the theoretical results, it is important to find out whether these latter agree with the actual facts. Inasmuch as I made use of electric waves in wires of exceedingly short period in my experiments on the propagation of electric force, it was natural to test by means of these the correctness of the conclusions deduced. As a matter of fact, the theory was found to be confirmed by the experiments which are now to be described; and it will be seen that these few experiments are amply sufficient to support the conception introduced by Messrs. Heaviside and Poynting. Similar experiments, with similar results, have been carried out by Dr. O. J. Lodge,<sup>2</sup> who

---

<sup>1</sup> O. Heaviside, *Electrician*, January 1885, *Phil. Mag.* 215, p. 158, 1888

<sup>2</sup> J. H. Poynting, *Phil. Trans.* 2, p. 277, 1885.

<sup>1</sup> [See Note 24 at end of book.]

<sup>2</sup> O. J. Lodge, *Journ. of Soc. of Arts*, May 1888; *Phil. Mag.* 28, p. 217, 1888.

has, however, used quite different experimental methods, and mainly with the object of elucidating the theory of lightning-conductors. To what extent the conclusions are true which were deduced by Dr. Lodge in the latter respect from his experiments must, in the first place, depend upon the actual rapidity of succession of the changes of electrical conditions which accompany lightning. The apparatus and methods which are here mentioned are those which have been fully described in my previous papers. The waves used were such as had in wires nodes about 3 metres apart. 1. When a primary conductor acts through air upon a secondary conductor, there can be no doubt that the action penetrates from without into the latter. For it may be regarded as an established fact that in air the action is propagated from point to point, and it must therefore first meet (p.162) the outer boundary of the conductor before it can act upon the inside. Now it can be shown that a closed metallic envelope does not allow the action to pass through it at all. If we place the secondary conductor in a favourable position with reference to the primary so that sparks 5-6 mm. long are obtained, and then surround it with a closed box of sheet zinc, not the slightest amount of sparking can be detected. Similarly, the sparks disappear when the primary conductor is completely surrounded by a metal box. It is known that a metal screen does not interfere with the integral force of induction when the fluctuations of current are relatively slow. At first sight this appears to contradict the above experimental results. But the contradiction is only apparent and disappears when the time-relations are considered. In a similar way a badly-conducting envelope protects its interior completely against rapid fluctuations of external temperature, less completely against slow fluctuations, and not at all against a permanent rise or fall in temperature. The thinner the envelope the more rapid are the fluctuations which can act through it upon the interior. And so, in our case also, the electric action should clearly penetrate into the interior if we only reduced sufficiently the thickness of the metal. Yet I did not find it easy to secure the requisite thinness. A box covered with tinfoil acted as a perfect screen; and so too did a box of gilt paper when care was taken to make good contact between the edges of the separate pieces of paper. In this case the thickness of the conducting metal could scarcely be estimated as high as  $\frac{1}{20}$  mm. I next fitted the protecting envelope as closely as possible around the secondary conductor. For this purpose, its spark-gap was drawn out to about 20 mm; and, in order to be still able to detect electric disturbances in it, an auxiliary spark-gap was introduced just opposite the usual one. The sparks in this were not so long as in the proper spark-gap because the resonance-effect was now absent, but they still were quite vigorous. After being thus prepared the conductor was completely surrounded with a tube-shaped conducting envelope made as thin as possible; this did not touch the conductor, but was brought as close as possible to it, and in the neighbourhood of the auxiliary spark-gap-in order to be able to make use of the latter-was made of wire-gauze. Between the poles of this envelope the sparking was as vigorous as it had previously been in the secondary conductor itself; but in the enclosed conductor, not the slightest electrical disturbance could be perceived. It does not interfere with the result if the envelope touches the conductor at a few points; it is not necessary to insulate the two from one another in order to make the experiment succeed, but only in order to give it its demonstrative force. In imagination we can clearly draw the envelope around the conductor more closely than is possible in practice; indeed, we can imagine it to coincide with the outer skin of the conductor. Thus, although the electrical disturbances at the surface of our conductor are so powerful as to

produce sparks of 5-6 mm length, yet at a depth of only  $\frac{1}{20}$  mm below its surface there is such complete calm that not the slightest sparking is produced. We are thus led to suspect that what we call an induced current in the secondary conductor is a process which takes place for the most part in the surrounding space and in which the inside of the conductor scarcely plays any part.

2. We might admit that this is so when an electrical disturbance passes through a dielectric, but yet maintain that it is otherwise when the disturbance, as we usually say, has been propagated in a conductor. Near one of the end plates of our primary conductor let us place a conducting plate and fasten to it a long straight wire; in our earlier experiments we have already shown how the action of the primary oscillation can be conveyed to great distances with the aid of such a wire. The usual view of this is that the wave proceeds through the wire. We will, however, try to show that all the changes are confined to the surface and the space outside, and that the interior of the wire knows nothing of the passing waves. I first arranged experiments in the following manner. From the conducting wire a piece 4 metres long was removed and replaced by two strips of zinc sheet 4 metres long and 10 cm broad, which were laid flat one upon the other with their ends touching and firmly connected. Along the whole length of the middle line between the strips, and hence almost completely surrounded by metal, was placed a copper wire 4 metres long and covered with gutta-percha. It made no difference in the experiments whether the outer ends of this wire were in metallic connection with (p.164) the strips, or insulated from them; but generally, the ends were soldered to the zinc strips. The copper wire was cut in the middle, and its ends were twisted round each other and led out between the strips to a small spark-gap by which any electrical disturbance in the wire could be perceived. Not the slightest action could be detected at the spark-gap, even when the strongest possible waves were led through the whole arrangement. But if any part of the copper wire, a few decimetres long, was pulled out of its place so as to project but a little beyond the strips, sparking immediately began. The longer the projecting part and the further it extended beyond the edge of the strips, the more vigorous became the sparking. The absence of sparks in the first instance cannot be attributed to any unfavourable conditions of resistance; no change has taken place in these conditions; only the wire at first was inside a conducting mass and beyond the reach of outside influences. Indeed, it is only necessary to enclose the projecting part of the wire with a little tinfoil in metallic connection with the zinc strips, in order to stop the sparking at once. By so doing we virtually bring the copper wire back inside the conductor. In like manner the sparks become weaker if we carry another wire, in a somewhat larger arc, around the part of the gutta-percha wire which projects beyond the strips; the second wire cuts off from the first part of the external effect. Indeed, we may say that the edge of the zinc strip itself in a similar way cuts off from the middle of the strip some of the induction. For if we now remove one of the two zinc strips and simply let the gutta-percha wire rest upon the other, we always perceive sparks in the wire; but these are extremely feeble in the middle of the strip, and much more powerful towards the edge. Just as electricity when distributed by electrostatic induction would tend to accumulate on the sharp edge of the strip, so here the current seems by preference to move along the edge. In both cases we may say that the outer parts protect the inner from an influence exerted from the outside.

Equally convincing, and somewhat neater, are the following experiments: — I inserted in the conductor, along which the waves were transmitted, a very thick copper wire 1·5 metre long, whose ends carried two circular metallic disks 15 cm (p.165) in diameter. The wire passed through the centres of the disks whose planes were perpendicular to it. Around the edge of each disk were twenty-four equidistant holes. A spark-gap was inserted in the wire. When the waves traversed the wire, they produced sparks up to 6 mm in length. A thin copper wire was now stretched across between two corresponding holes in the disks. The sparking distance thereupon sank to 3·2 mm. No other change was produced when the thin wire was replaced by a thick one, or when twenty-four wires were used instead of the single one, provided they were drawn all together through the same pair of holes. But it was otherwise when the wires were distributed around the edge of the disks. When a second wire was added opposite the first one the spark-length sank to 1·2 mm. When two more wires were put in midway between the others, the spark-length went as low as 0·5 mm. The insertion of four more wires in intermediate positions left sparks barely 0·1 mm. long; and after all, twenty-four wires were inserted at equal distances no sparking whatever could be perceived inside. Yet the resistance of the inner wire was much smaller than the joint resistance of all the outer wires; and furthermore, we have given a special proof that the resistance is of no consequence. At the side of the tube of wires which has been built up let us place as a shunt a conductor precisely similar to the one inside the tube; we see vigorous sparking in the former, but none whatever in the latter. The former is not screened, the latter is screened by the tube of wires. We have here an electromagnetic analogue to the electrostatic experiment known under the name of the electric bird-cage.

Again, I altered the experiment in the way indicated in Fig. 33. The two disks were moved nearer together so that,

The apparatus and methods which are here mentioned are those which have been fully described in my previous papers. The waves used were such as had in wires nodes about 3 metres apart.

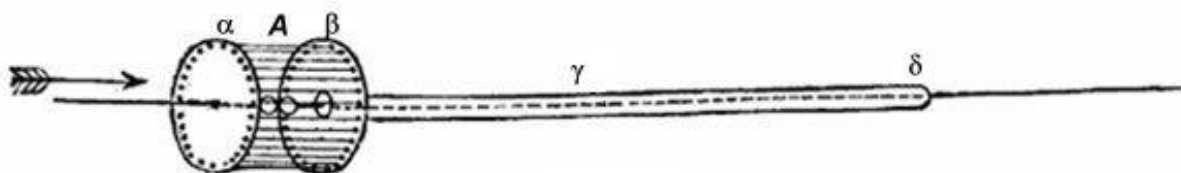


Fig. 33.

with the wires stretched between them, they formed a wire-cage A just big enough to contain the spark-micrometer. One of the disks ( $\alpha$ ) remained in metallic connection with the central wire; the other ( $\beta$ ) was insulated from it by cutting (p. 166) out a round hole, and was instead connected with a conducting tube  $\gamma$  which, without touching the central wire, completely surrounded it for a distance of 1·5 metre. The free end  $\delta$  of the tube was then placed in metallic connection with the central wire. The wire with its spark-gap still lies in a space surrounded by a metallic screen; and it seems to follow

naturally after what has already been stated that, whether the waves be led through the arrangement in the one direction or the other, not the slightest electrical disturbance would be detected in the wire. So far, then, this arrangement offers nothing new; but it has this advantage over the preceding one, that we can replace the protecting metal tube  $\gamma$  by others with thinner and thinner walls, and so find out what thickness of wall is just sufficient to stop off the outside action. Very thin brass tubes — tubes of tinfoil and tubes of Dutch metal, — acted as perfect screens. I next took glass tubes which had been chemically silvered, and now found it quite easy to prepare tubes so thin that, in spite of their protection, there was vigorous sparking in the central wire. But the sparks only appeared when the film of silver was so thin that it was no longer quite opaque to light, and was certainly thinner than  $\frac{1}{1000}$  mm. In imagination, though not in practice, we may draw the protecting envelope more and more closely around the wire, until at last it coincides with its surface; and we may feel certain that nothing would practically be altered thereby. So, however vigorously the waves may really play about the wire, inside it is perfectly calm; the action of the waves scarcely penetrates further into the wire than does the light which is reflected from its surface. Hence, we should expect to find the real seat of these waves in the neighbourhood of the wire, and not in the wire itself; and instead of saying that our waves are propagated in the wire, we should rather say that they glide towards and along the wire.

Instead of inserting the arrangement last described in the conducting wire in which waves were indirectly produced, we can insert it in one of the branches of the primary conductor itself. In such experiments I obtained much the same results as in the previous ones. Hence, it must be equally true of our primary oscillation, that its seat is not to be found in the (p. 167) interior of the conductor; only the outer skin of the conductor, about which it plays, takes part in it.<sup>1</sup>

One further item of information may be added to what we have already learned about waves in wires, and this relates to the method of carrying out the experiments. If our waves have their seat in the space surrounding the wire, then a wave gliding along a single wire will not be propagated through the air alone; but, inasmuch as its action extends to a considerable distance, it will be propagated in the neighbouring walls, the floor, etc., and so will develop into a complicated phenomenon. But if we set up in exactly the same way two auxiliary plates opposite the two poles of our primary conductor, connect a wire to each of them, and lead both wires straight and parallel to one another to the same distance, then the action of the waves makes itself felt only in the neighbourhood of the space between the two wires. Hence it is only in the space between the wires that the wave progresses. We can thus take measures to secure that the propagation occurs only through air or another insulator, and by so arranging matters can experiment more conveniently and with less fear of complications. The wave-

---

<sup>1</sup> The calculation of the self-induction of such conductors on the assumption of uniform current-density in the interior must therefore lead to totally unreliable results. It is surprising that the results obtained under such erroneous assumptions should yet appear to agree approximately with the truth.

lengths thus obtained are, however, approximately the same as those obtained with single wires; so that even with the latter the disturbing effects do not seem to be of much importance.

3. From what has already been stated, we may conclude that rapid electric oscillations are quite incapable of penetrating metallic layers of any thickness, and that it is therefore quite impossible to excite sparks by the aid of such oscillations inside closed metallic envelopes. Hence, if we see sparks induced by such oscillations inside metallic envelopes which are nearly, but not quite, closed, we must conclude that the electric disturbance has penetrated through the existing openings.

And this mode of conception is the correct one; but in some cases, it contradicts the usual view so completely that special experiments are required to induce us to forsake the usual view for the newer one. We shall select a striking case of this kind; and by making certain of the correctness of our (p. 168) view in this case, we shall show its probability in all other cases. We return to the arrangement described in the previous section, and represented in Fig. 33, only we no longer connect the protecting tube at  $\delta$  with the central wire. We now send the train of waves through the arrangement in the direction from  $A$  towards  $\delta$ . We obtain brilliant sparks at  $A$ , and these are about as strong as if we had inserted the spark-gap in the conducting wire without any protection. Nor do the sparks become much smaller if, without altering anything else, we lengthen the tube,  $\gamma$  considerably — up to about 4 metres. According to the usual view, it would be said that the wave on reaching  $A$  easily passes through the thin metal disk  $a$ , which is a good conductor, then springs across the spark-gap at  $A$  and proceeds along the central wire. According to our conception, on the other hand, we ought to describe what happens as follows: — The wave on reaching  $A$  is absolutely unable to pass through the metal disk, so it glides along the disk over the outside of the apparatus, travelling along thus until it reaches the point  $\delta$ , 4 metres off. Here it divides — one part, which at present does not concern us, immediately proceeds straight along the wire; another part bends round into the inside of the tube and runs back the whole 4 metres in the air-space between the tube and the central wire, until it reaches the spark-gap  $A$ , where it now produces sparks. We shall show by the following experiments that our conception, although somewhat complicated, is yet the correct one. In the first place, every trace of sparking at  $A$  disappears as soon as we close the opening at  $o$ , even if it be only with a tinfoil cap. Our waves have a wave-length of only 3 metres; before their action has reached the point  $\delta$ , it has gone back to zero at  $A$ , and has changed sign. What influence then could the closing of the distant opening at  $\delta$  exert upon the spark at  $A$ , if the latter really appears as soon as the wave passes through the metallic partition? In the second place, the sparks disappear when we make the central wire end inside the tube,  $\gamma$ , or at the open end  $\delta$  of this tube; they reappear when the end of the wire is allowed to project beyond the opening, even if only for 20-30 cm. What influence could this insignificant lengthening of the wire have upon the spark at  $A$ , unless the projecting end of the wire were just the means by which a part (p. 169) of the wave is intercepted and brought through the opening  $\delta$  into the interior? Let us, in the third place, introduce a second spark-gap  $B$  in the central wire between  $A$  and  $\delta$ , and surround it with a wire cage just like  $A$ . When we place the poles in  $B$  so far apart that sparks can no longer pass, we find that it is no longer possible to obtain any perceptible sparks in  $A$ . But if, in like



manner, we hinder the passage of the sparks in *A*, we find that this has scarcely any influence upon the sparks in *B*. Hence, for the passage of the sparks in *A*, it is requisite that they should first pass in *B*; but for the passage of sparks in *B*, it is not necessary that they should first pass in *A*. Hence the direction of propagation in the interior is from *B* towards *A*, not from *A* towards *B*.

Moreover, we can adduce other and more convincing proofs. By making the spark-gap either vanishingly small or very great, we may prevent the wave returning from  $\delta$  towards *A* from expending its energy in the formation of sparks. In this case the wave will be reflected at *A*, and will again proceed from *A* towards *S*. But in doing so it must combine with the direct waves to form stationary oscillations with nodes and antinodes. If we succeed in showing the presence of these, we can no longer have any doubt as to the correctness of our conception. For this purpose, we must necessarily give our apparatus somewhat different dimensions, so as to be able to introduce electric resonators inside it. I therefore carried the central wire through the axis of a cylindrical tube 5 metres long and 30 cm in diameter. This tube was not made of solid metal, but was build up of twenty-four cooper wires (Fig 34), these were stretched parallel to one another along the generating surface over seven equidistant circular rings of stout wire, as indicated in Fig. 34. The resonator to be used I made as follows:—



Fig. 34

Copper wire 1 mm thick was coiled tightly into a spiral of 1 cm diameter. About 125 turns of this were taken, pulled out a little, and bent into a circle of 12 cm diameter; between the free ends was inserted an (p. 170) adjustable spark-gap. Special experiments had shown that this circle was in resonance with the waves of 3 metres length in the wire, and yet it was sufficiently small to be introduced between the central wire and the tube. Both ends of the tube were at first left open, and the resonator was held inside in such a way that its plane included the central wire, and the spark-gap was not turned exactly inwards or outwards, but faced towards one or other end of the tube; vigorous sparks,  $\psi - 1$  mm long,— appeared at the spark-gap. If now both ends of the tube were closed by four wires arranged crosswise and connected with the central conductor, not the slightest sparking could be discovered inside, which proves that the network of the tube is sufficiently close for our experiments. In the next place, the cross-wires on the  $\beta$  side of the tube (*i.e.*, the side remote from the origin of the waves) were removed. No sparks could be detected when the resonator was in the immediate neighbourhood of the remaining cross-wires, *i.e.*, in the position *a*, which corresponds to the spark-gap *A* of our earlier experiments. But when it was moved from this position towards  $\beta$  the sparks reappeared, became very vigorous at a distance of 1.5 metre from *a*, decreased again and almost completely disappeared at a distance of 3 metres, and again became stronger towards the end of the tube. Our

supposition is, therefore, confirmed. It is right that there should be a node at the closed end, for at the metallic connection between the central wire and the tube the electric force between both must necessarily be zero. It is otherwise if we cut the central conductor at this point, quite near the cross-wires, leaving a gap a few centimetres long. In this case the wave is reflected with the opposite phase, and we should expect an antinode at  $a$ . And, in fact, we do now find vigorous sparks in the resonator; these, however, rapidly become smaller as we move from  $a$  towards  $\beta$ , disappear almost entirely at a distance of 1.5 metre, become vigorous again at a distance of 3 metres, and finally give plain indications of a second node at a distance of 4.5 metres, *i.e.*, 0.5 metre from the open end of the tube. The nodes and antinodes which we have described lie at fixed distances from the closed end, and alter their position as this does; but otherwise, they are quite independent of processes, going on outside the tube, *e.g.*, of the nodes and antinodes which (p. 171) we may produce there. The phenomena occur in precisely the same way when we allow the waves to traverse the tube in the opposite direction, *i.e.*, from the open to the closed end; but this case is less interesting, because the mode of propagation of the waves here differs less from the usual conception than in the case which we have just discussed. If we leave the central wire uncut, and both ends of the tube open, and produce in the whole system stationary waves, with nodes and antinodes, we always find a node inside the tube corresponding to each node outside, which proves that the rate of propagation is approximately the same inside and outside.

On studying the experiments above described, the mode in which we have interpreted them, and the explanations of the investigators referred to in the introduction, one difference will be found especially striking between the conceptions here advocated and the usually accepted view. In the latter conductors appear as the only bodies which take part in the propagation of electrical disturbances—non-conductors as bodies which oppose this propagation. According to our conception, on the other hand, all propagation of electrical disturbances takes place through non-conductors; and conductors oppose this propagation with a resistance which, in the case of rapid alternations, is insuperable. We might almost feel inclined to agree to the statement that conductors and non-conductors should, according to this conception, have their names interchanged. Such a paradox, however, only arises because we omit to specify what conduction or non-conduction is under discussion. Undoubtedly metals are non-conductors for electric force, and for this very reason they, under certain conditions, restrain it from becoming dissipated, and compel it to remain concentrated; they thus become conductors of the apparent source of these forces — the electricity, — to which the usual terminology has reference.

(p. 172)

## XI

### ON ELECTRIC RADIATION

*(Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. Dec. 13, 1888. Wiedermann's Ann. 38, p. 769.)*

As soon as I had succeeded in proving that the action of an electric oscillation spreads out as a wave into space, I planned experiments with the object of concentrating this action and making it perceptible at greater distances by putting the primary conductor in the focal line of a large concave parabolic mirror. These experiments did not lead to the desired result, and I felt certain that the want of success was a necessary consequence of the disproportion between the length (4 – 5 metres) of the waves used and the dimensions which I was able, under the most favourable circumstances, to give to the mirror. Recently I have observed that the experiments which I have described can be carried out quite well with oscillations of more than ten times the frequency, and with waves less than one-tenth the length of those which were first discovered. I have, therefore, returned to the use of concave mirrors, and have obtained better results than I had ventured to hope for. I have succeeded in producing distinct rays of electric force, and in carrying out with them the elementary experiments which are commonly performed with light and radiant heat. The following is an account of these experiments: —

#### *The Apparatus*

The short waves were excited by the same method which we used for producing the longer waves. The primary (p. 173) conductor used may be most simply described as follows: — Imagine a cylindrical brass body,<sup>1</sup> 3 cm in diameter and 26 cm long, interrupted midway along its length by a spark gap whose poles on either side are formed by spheres of 2 cm radius. The length of the conductor is

---

<sup>1</sup> See Figs. 85 and 36 and the description of them at the end of this paper.

approximately equal to the half wave-length of the corresponding oscillation in straight wires; from this we are at once able to estimate approximately the period of oscillation. It is essential that the pole-surfaces of the spark-gap should be frequently repolished, and also that during the experiments they should be carefully protected from illumination by simultaneous side discharges; otherwise, the oscillations are not excited. Whether the spark-gap is in a satisfactory state can always be recognised by the appearance and sound of the sparks. The discharge is led to the two halves of the conductor by means of two gutta-percha covered wires which are connected near the spark-gap on either side. I no longer made use of the large Ruhmkorff, but found it better to use a small induction-coil by Keiser and Schmidt; the longest sparks, between points, given by this were 4.5 cm. long. It was supplied with current from three accumulators, and gave sparks 1–2 cm. long between the spherical knobs of the primary conductor. For the purpose of the experiments the spark-gap was reduced to 3 mm. Here, again, the small sparks induced in a secondary conductor were the means used for detecting the electric forces in space. As before, I used partly a circle which could be rotated within itself and which had about the same period of oscillation as the primary conductor. It was made of copper wire 1 mm thick, and had in the present instance a diameter of only 7.5 cm. One end of the wire carried a polished brass sphere a few millimetres in diameter; the other end was pointed and could be brought up, by means of a fine screw insulated from the wire, to within an exceedingly short distance from the brass sphere. As will be readily understood, we have here to deal only with minute sparks of a few hundredths of a millimetre in length; and after a little practice one judges more according to the brilliancy than the length of the sparks. The circular conductor gives only a differential effect, and (p. 174) is not adapted for use in the focal line of a concave mirror. Most of the work was therefore done with another conductor, arranged as follows:—Two straight pieces of wire, each 50 cm long and 5 mm in diameter, were adjusted in a straight line so that their near ends were 5 cm apart. From these ends two wires, 15 cm long and 1 mm in diameter, were carried parallel to one another and perpendicular to the wires first mentioned to a spark-gap arranged just as in the circular conductor. In this conductor the resonance-action was given up, and indeed it only comes slightly into play in this case. It would have been simpler to put the spark-gap directly in the middle of the straight wire; but the observer could not then have handled and observed the spark-gap in the focus of the mirror without obstructing the aperture. For this reason, the arrangement above described was chosen in preference to the other which would in itself have been more advantageous.

### *The Production of the Ray*

If the primary oscillator is now set up in a fairly large free space, one can, with the aid of the circular conductor, detect in its neighbourhood on a smaller scale all those phenomena which I have already observed and described as occurring in the neighbourhood of a larger oscillation.<sup>1</sup> The greatest distance at which sparks could be perceived in the secondary conductor was 1.5 metre, or, when the primary spark-gap was in very good order, as much as 2 metres. When a plane reflecting plate is

---

<sup>1</sup> See V., VII., VIII.

set up at a suitable distance on one side of the primary oscillator, and parallel to it, the action on the opposite side is strengthened. To be more precise: — If the distance chosen is either very small, or somewhat greater than 30 cm, the plate weakens the effect; it strengthens the effect greatly at distances of 8 – 15 cm, slightly at a distance of 45 cm, and exerts no influence at greater distances. We have drawn attention to this phenomenon in an earlier paper, and we conclude from it that the wave in air corresponding to the primary oscillation has a half wave-length of about 30 cm. We may expect to find a still further reinforcement if we replace the plane surface by a concave mirror having the form of a (p. 175) parabolic cylinder, in the focal line of which the axis of the primary oscillation lies. The focal length of the mirror should be chosen as small as possible, if it is properly to concentrate the action. But if the direct wave is not to annul immediately the action of the reflected wave, the focal length must not be much smaller than a quarter wavelength. I therefore fixed on  $12\psi$  cm as the focal length, and constructed the mirror by bending a zinc sheet 2 metres long, 2 metres broad, and  $\psi$  mm thick into the desired shape over a wooden frame of the exact curvature. The height of the mirror was thus 2 metres, the breadth of its aperture 1.2 metre, and its depth 0.7 metre. The primary oscillator was fixed in the middle of the focal line. The wires which conducted the discharge were led through the mirror; the induction-coil and the cells were accordingly placed behind the mirror so as to be out of the way. If we now investigate the neighbourhood of the oscillator with our conductors, we find that there is no action behind the mirror or at either side of it; but in the direction of the optical axis of the mirror the sparks can be perceived up to a distance of 5 – 6 metres. When a plane conducting surface was set up so as to oppose the advancing waves at right angles, the sparks could be detected in its neighbourhood at even greater distances—up to about 9 – 10 metres. The waves reflected from the conducting surface reinforce the advancing waves at certain points. At other points again the two sets of waves weaken one another. In front of the plane wall one can recognise with the rectilinear conductor very distinct maxima and minima, and with the circular conductor the characteristic interference-phenomena of stationary waves which I have described in an earlier paper. I was able to distinguish four nodal points, which were situated at the wall and at 33, 65, and 98 cm distance from it. We thus get 33 cm as a closer approximation to the half wave-length of the waves used, and 1.1 thousand-millionth of a second as their period of oscillation, assuming that they travel with the velocity of light. In wires the oscillation gave a wave-length of 29 cm. Hence it appears that these short waves also have a somewhat lower velocity in wires than in air; but the ratio of the two velocities comes very near to the theoretical value — unity — and does not differ from it so much as appeared to (p, 176) be probable from our experiments on longer waves. This remarkable phenomenon still needs elucidation. Inasmuch as the phenomena are only exhibited in the neighbourhood of the optic axis of the mirror, we may speak of the result produced as an electric ray proceeding from the concave mirror.

I now constructed a second mirror, exactly similar to the first, and attached the rectilinear secondary conductor to it in such a way that the two wires of 50 cm. length lay in the focal line, and the two wires connected to the spark-gap passed directly through the walls of the mirror without touching it. The spark-gap was thus situated directly behind the mirror, and the observer could adjust and examine

it without obstructing the course of the waves. I expected to find that, on intercepting the ray with this apparatus; I should be able to observe it at even greater distances; and the event proved that I was not mistaken. In the rooms at my disposal, I could now perceive the sparks from one end to the other. The greatest distance to which I was able, by availing myself of a doorway, to follow the ray was 16 metres; but according to the results of the reflection-experiments (to be presently described), there can be no doubt that sparks could be obtained at any rate up to 2·0 metres in open spaces: For the remaining experiments such great distances are not necessary, and it is convenient that the sparking in the secondary conductor should not be too feeble; for most of the experiments a distance of 6 - 10 metres is most suitable. We shall now describe the simple phenomena which can be exhibited with the ray without difficulty. When the contrary is not expressly stated, it is to be assumed that the focal lines of both mirrors are vertical.

### *Rectilinear Propagation*

If a screen of sheet zinc 2 metres high and 1 metre broad is placed on the straight line joining both mirrors, and at right angles to the direction of the ray, the secondary sparks disappear completely. An equally complete shadow is thrown by a screen of tinfoil or gold-paper. If an assistant walks across the path of the ray, the secondary spark-gap becomes dark as soon as he intercepts the ray, and again lights up when he leaves the path clear. Insulators do not stop the ray — it (p. 177) passes right through a wooden partition or door; and it is not without astonishment that one sees the sparks appear inside a closed room. If two conducting screens, 2 metres high and 1 metre broad, are set up symmetrically on the right and left of the ray, and perpendicular to it, they do not interfere at all with the secondary spark so long as the width of the opening between them is not less than the aperture of the mirrors, viz. 1·2 metre. If the opening is made narrower the sparks become weaker, and disappear when the width of the opening is reduced below 0·5 metre. The sparks also disappear if the opening is left with a breadth of 1·2 metre, but is shifted to one side of the straight line joining the mirrors. If the optical axis of the mirror containing the oscillator is rotated to the right or left about 10° out of the proper position, the secondary sparks become weak, and a rotation through 15° causes them to disappear.

There is no sharp geometrical limit to either the ray or the shadows; it is easy to produce phenomena corresponding to diffraction.<sup>1</sup> As yet, however, I have not succeeded in observing maxima and minima at the edge of the shadows.

### *Polarization*

---

<sup>1</sup> [See Note 25 at end of book.]

From the mode in which our ray was produced we can have no doubt whatever that it consists of transverse vibrations and is plane-polarized in the optical sense. We can also prove by experiment that this is the case. If the receiving mirror be rotated about the ray as axis until its focal line, and therefore the secondary conductor also, lies in a horizontal plane, the secondary sparks become more and more feeble, and when the two focal lines are at right angles, no sparks whatever are obtained even if the mirrors are moved close up to one another. The two mirrors behave like the polarizer and analyzer of a polarization apparatus.

I next had made an octagonal frame, 2 metres high and 2 metres broad; across this were stretched copper wires 1 mm thick, the wires being parallel to each other and 3 cm. apart. If the two mirrors were now set up with their focal lines parallel, and the wire screen was interposed perpendicularly to the ray and so that the direction of the wires was perpendicular to the direction of the focal lines, the screen practically did not interfere at all with the secondary sparks. But if the screen was set up in such a way that its wires were parallel to the focal lines, it stopped the ray completely. With regard, then, to transmitted energy the screen behaves towards our ray just as a tourmaline plate behaves towards a plane-polarized ray of light. The receiving mirror was now placed once more so that its focal line was horizontal; under these circumstances, as already mentioned, no sparks appeared. Nor were any sparks produced when the screen was interposed in the path of the ray, so long as the wires in the screen were either horizontal or vertical. But if the frame was set up in such a position that the wires were inclined at  $45^\circ$  to the horizontal on either side, then the interposition of the screen immediately produced sparks in the secondary spark-gap. Clearly the screen resolves the advancing oscillation into two components and transmits only that component which is perpendicular to the direction of its wires. This component is inclined at  $45^\circ$  to the focal line of the second mirror, and may thus, after being again resolved by the mirror, act upon the secondary conductor. The phenomenon is exactly analogous to the brightening of the darkfield of two crossed Nicols by the interposition of a crystalline plate in a suitable position.

With regard to the polarization, it may be further observed that, with the means employed in the present investigation, we are only able to recognise the electric force. When the primary oscillator is in a vertical position the oscillations of this force undoubtedly take place in the vertical plane through the ray, and are absent in the horizontal plane. But the results of experiments with slowly alternating currents leave no room for doubt that the electric oscillations are accompanied by oscillations of magnetic force which take place in the horizontal plane through the ray and are zero in the vertical plane. Hence the polarization of the ray does not so much consist in the occurrence of oscillations in the vertical plane, but rather in the fact that the oscillations in the vertical plane are of an electrical nature, while those in the horizontal plane are of a magnetic nature. Obviously, then, the question, in which of the two planes the oscillation in our ray occurs, cannot be answered (p. 179) unless one specifies whether the question relates to the electric or the magnetic oscillation. It was Herr Kolaček<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> [F. Kolaček, *Wied. Ann.* **34**, p. 676, 1888.]

who first pointed out clearly that this consideration is the reason why an old optical dispute has never been decided.

### *Reflection*

We have already proved the reflection of the waves from conducting surfaces by the interference between the reflected and the advancing waves, and have also made use of the reflection in the construction of our concave mirrors. But now we are able to go further and to separate the two systems of waves from one another. I first placed both mirrors in a large room side by side, with their apertures facing in the same direction, and their axes converging to a point about 3 metres off. The spark-gap of the receiving mirror naturally remained dark. I next set up a plane vertical wall made of thin sheet zinc, 2 metres high and 2 metres broad, at the point of intersection of the axes, and adjusted it so that it was equally inclined to both. I obtained a vigorous stream of sparks arising from the reflection of the ray by the wall. The sparking ceased as soon as the wall was rotated around a vertical axis through about  $15^\circ$  on either side of the correct position; from this it follows that the reflection is regular, not diffuse. When the wall was moved away from the mirrors, the axes of the latter being still kept converging towards the wall, the sparking diminished very slowly. I could still recognize sparks when the wall was 10 metres away from the mirrors, *i.e.*, when the waves had to traverse a distance of 20 metres. This arrangement might be adopted with advantage for the purpose of comparing the rate of propagation through air with other and slower rates of propagation, *e.g.*, through cables.

In order to produce reflection of the ray at angles of incidence greater than zero, I allowed the ray to pass parallel to the wall of the room in which there was a doorway. In the neighbouring room to which this door led I set up the receiving mirror so that its optic axis passed centrally through the door and intersected the direction of the ray at right angles. If the plane conducting surface was now set up vertically at (p. 180) the point of intersection, and adjusted so as to make angles of  $45^\circ$  with the ray and also with the axis of the receiving mirror, there appeared in the secondary conductor a stream of sparks which was not interrupted by closing the door. When I turned the reflecting surface about  $10^\circ$  out of the correct position the sparks disappeared. Thus, the reflection is regular, and the angles of incidence and reflection are equal. That the action proceeded from the source of disturbance to the plane mirror, and hence to the secondary conductor, could also be shown by placing shadow-giving screens at different points of this path. The secondary sparks then always ceased immediately; whereas no effect was produced when the screen was placed anywhere else in the room. With the aid of the circular secondary conductor, it is possible to determine the position of the wave-front in the ray; this was found to be at right angles to the ray before and after reflection, so that in the reflection it was turned through  $90^\circ$ .

Hitherto the focal lines of the concave mirrors were vertical, and the plane of oscillation was therefore perpendicular to the plane of incidence. In order to produce reflection with the oscillations in the plane of incidence, I placed both mirrors with their focal lines horizontal. I observed the same phenomena as in the previous position; and, moreover, I was not able to recognise any difference in



the intensity of the reflected ray in the two cases. On the other hand, if the focal line of the one mirror is vertical, and of the other horizontal, no secondary sparks can be observed. The inclination of the plane of oscillation to the plane of incidence is therefore not altered by reflection, provided this inclination has one of the two special values referred to; but in general, this statement cannot hold good. It is even questionable whether the ray after reflection continues to be plane-polarized. The interferences which are produced in front of the mirror by the intersecting wave-systems, and which, as I have remarked, give rise to characteristic phenomena in the circular conductor, are most likely to throw light upon all problems relating to the change of phase and amplitude produced by reflection.

One further experiment on reflection from an electrically eolotropic surface may be mentioned. The two concave mirrors were again placed side by side, as in the reflection-experiment (p. 181) first described; but now there was placed opposite to them, as a reflecting surface, the screen of parallel copper wires which has already been referred to. It was found that the secondary spark-gap remained dark when the wires intersected the direction of the oscillations at right angles, but that sparking began as soon as the wires coincided with the direction of the oscillations. Hence, the analogy between the tourmaline plate and our surface which conducts in one direction is confined to the transmitted part of the ray.<sup>1</sup> The tourmaline plate absorbs the part which is not transmitted; our surface reflects it. If in the experiment last described the two mirrors are placed with their focal lines at right angles, no sparks can be excited in the secondary conductor by reflection from an isotropic screen; but I proved to my satisfaction that sparks are produced when the reflection takes place from the eolotropic wire grating, provided this is adjusted so that the wires are inclined at 45° to the focal lines. The explanation of this follows naturally from what has been already stated.

### *Refraction*

In order to find out whether any refraction of the ray takes place in passing from air into another insulating medium, I had a large prism made of so-called hard pitch, a material like asphalt. The base was an isosceles triangle 1·2 metres in the side, and with a refracting angle of nearly 30°. The refracting edge was placed vertical, and the height of the whole prism was 1·5 metres. But since the prism weighed about 12 cwt., and would have been too heavy to move as a whole, it was built up of three pieces, each 0·5 metre high, placed one above the other.

The material was cast in wooden boxes which were left around it, as they did not appear to interfere with its use. The prism was mounted on a support of such height that the middle of its refracting edge was at the same height as the primary and secondary spark-gaps. When I was satisfied that refraction did take place, and had obtained some idea of its amount, I arranged the experiment in the following manner: — The producing mirror was set up at a distance of 2·6 metres from the prism and facing one of the refracting surfaces, so that the axis of the beam was directed as nearly as possible

---

<sup>1</sup> [See Note 26 at the end of the book.]

towards the centre (p. 182) of mass of the prism, and met the refracting surface at an angle of incidence of  $25^\circ$  (on the side of the normal towards the base). Near the refracting edge and also at the opposite side of the prism were placed two conducting screens which prevented the ray from passing by any other path than that through the prism. On the side of the emerging ray there was marked upon the floor a circle of 2.5 metres radius, having as its centre the centre of mass of the lower end of the prism. Along this the receiving mirror was now moved about, its aperture being always directed towards the centre of the circle. No sparks were obtained when the mirror was placed in the direction of the incident ray produced; in this direction the prism threw a complete shadow. But sparks appeared when the mirror was moved towards the base of the prism, beginning when the angular deviation from the first position was about  $11^\circ$ . The sparking increased in intensity until the deviation amounted to about  $22^\circ$ , and then again decreased. The last sparks were observed with a deviation of about  $34^\circ$ . When the mirror was placed in a position of maximum effect, and then moved away from the prism along the radius of the circle, the sparks could be traced up to a distance of 5 – 6 metres. When an assistant stood either in front of the prism or behind it the sparking invariably ceased, which shows that the action reaches the secondary conductor through the prism and not in any other way. The experiments were repeated after placing both mirrors with their focal lines horizontal, but without altering the position of the prism. This made no difference in the phenomena observed. A refracting angle of  $30^\circ$  and a deviation of  $22^\circ$  in the neighbourhood of the minimum deviation corresponds to a refractive index of 1.69. The refractive index of pitch-like materials for light is given as being between 1.5 and 1.6. We must not attribute any importance to the magnitude or even the sense of this difference,<sup>1</sup> seeing that our method was not an accurate one, and that the material used was impure.

We have applied the term rays of electric force to the phenomena which we have investigated. We may perhaps further designate them as rays of light of very great wave-length. The experiments described appear to me, at any rate, eminently (p. 183) adapted to remove any doubt as to the identity of light, radiant heat, and electromagnetic wave-motion. I believe that from now on we shall have greater confidence in making use of the advantages which this identity enables us to derive both in the study of optics and of electricity.

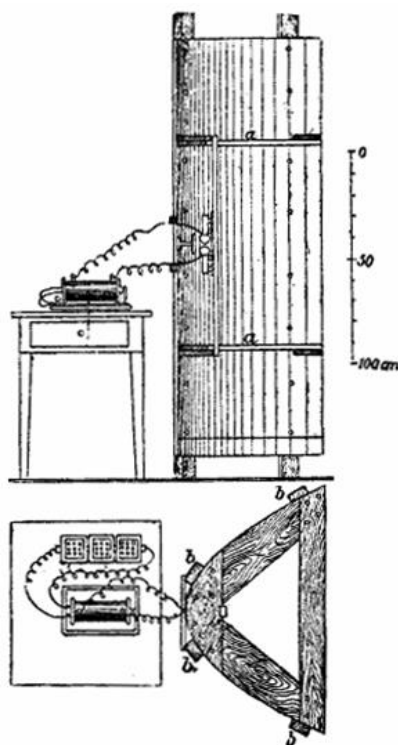
---

### *Explanation of the Figures*

---

<sup>1</sup> [See Note 27 at end of book.]

In order to facilitate the repetition and extension of these experiments, I append in the accompanying Figs. 35, 36<sub>a</sub> and 36<sub>b</sub>, illustrations of the apparatus which I used, although these were constructed simply for the purpose of experimenting at the time and without any regard to durability.



**Fig. 35.**

Fig. 35 shows in plan and elevation(section) the producing mirror. It will be seen that the framework of it consists of two horizontal frames (*a, a*) of parabolic form, and four vertical supports (*b, b*) which are screwed to each of the frames so as to support and connect them. The sheet metal reflector is clamped between the frames and the supports, and fastened to both by numerous screws. The supports project above and below beyond the sheet metal so that they can be use as handles in handling the mirror. Fig. 36<sub>a</sub> represents the primary conductor on a somewhat larger scale. The two metal parts, slide with friction in two sleeves of strong paper which are held together by India rubber bands. The sleeves themselves are fastened by four rods of sealing-wax to a board which again is tied by India rubber bands to a strip of wood forming part of the frame which can be seen in Fig. 35. The two leading ([p, 184](#)) wires (covered with gutta-percha) terminate in two boles bored in the knobs of the primary conductor. This arrangement allows of all necessary motion and adjustment of the various parts of the conductor; it can be taken to pieces and put together again in a few minutes, and this is essential in order that the knobs may be frequently repolished. Just at the points where the leading wires pass through the mirror, they are surrounded during the discharge by a bluish light. The smooth wooden screen *sis* introduced for the purpose of shielding the spark-gap from this light, which

otherwise would interfere seriously with the production of the oscillations. Lastly, Fig. 36<sub>b</sub> represents the secondary spark-gap.

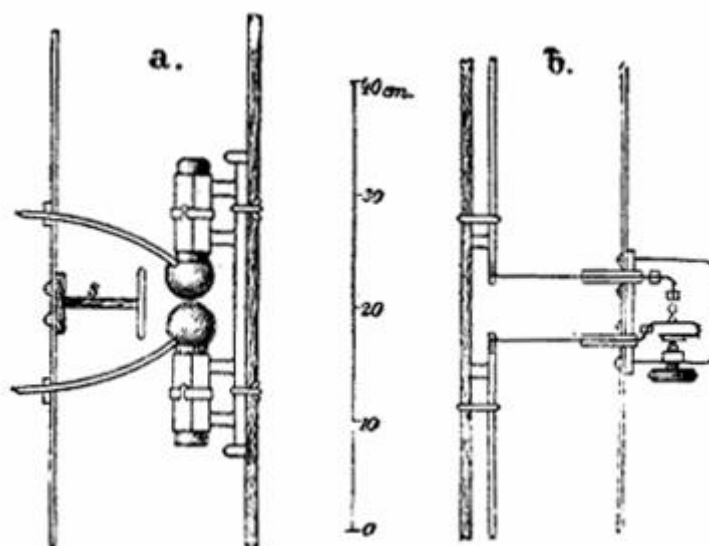


Fig. 36.

Both parts of the secondary conductor are again attached by sealing-waxrods and india-rubber bands to a slip forming part of the wooden framework. From the inner ends of these parts the leading wires, surrounded by glass tubes, can be seen proceeding through the mirror and bending towards one another. The upper wire carries at its pole a small brass knob. To the lower wire is soldered a piece of watch-spring which carries the second pole, consisting of a fine copper point. The point is intentionally chosen of softer metal than the knob; unless this precaution is taken the point easily penetrates into the knob, and the minute sparks disappear from sight in the small hole thus produced. The figure shows how the point is adjusted by a screw which presses against the spring that is insulated from it by a glass plate. The spring is bent in a particular way in order to secure (p. 185) finer motion of the point than would be possible if the screw alone were used.

No doubt the apparatus here described can be considerably modified without interfering with the success of the experiments. Acting upon friendly advice, I have tried to replace the spark-gap in the secondary conductor by a frog's leg prepared for detecting currents; but this arrangement which is so delicate under other conditions does not seem to be adapted for these purposes.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>[See Note 28 at end of book.]

(p. 186)

## XII

### ON THE MECHANICAL ACTION OF ELECTRIC WAVES IN WIRES

(*Wiedemann's Ann.* 42, p. 407, 1891.)

The investigation of the mechanical forces to which a conductor is subjected under the action of a series of electric waves appeared to me to be desirable for several reasons. In the first place, these forces might supply a means of investigating such waves quantitatively, provided that the effects observed were of sufficient magnitude and regularity. Hitherto almost the only quantitative determinations have been based on the heating effect of the waves. In the hands of Herren Rubens and Ritter this method has given excellent results;<sup>1</sup> but the observation of the mechanical forces offers in many cases the advantage of simplicity. In the second place, by examining the nature and distribution of the mechanical forces, I hoped to find a means of demonstrating the existence of the magnetic force in addition to the electric force. Only the latter has manifested itself in the observations hitherto made;<sup>2</sup> and as the ordinary methods of detecting magnetic force are of no avail here, it appeared to be worth while trying whether anew method would prove more serviceable. In the third and last place — and this was more especially the object of the investigation — I hoped to be able to devise some way of making observations on waves in free air, — that is to say, in such a manner that any disturbances which might be observed could (p. 187) in no wise be referred to any action-at-a-distance. This last hope was frustrated by the feebleness of the effects produced under the circumstances. I had to content myself with examining the effects produced by waves travelling along wires, although in so doing the most important object of the experiments was missed. The mechanical actions produced by waves in wires may be and will be regarded as being due to attractions caused by the electrification of the wires and by the currents flowing in them. For this reason, researches on waves in wires cannot be made use of to decide between the older and the newer views. If, however, we start from the point

---

<sup>1</sup> H. Rubens and R. Ritter, *Wied. Ann.* 40, p. 55, 1890.

<sup>2</sup> If I have myself on former occasions happened to speak of the observation of nodes of the magnetic waves, this mode of expression was only justified by theory and not required by experiment.

of view from which waves in wires are regarded simply as a special form of waves travelling in air, it is a matter of indifference whether we make the one form or the other the object of our experiments.

### 1. *The System of Waves Employed*

After trying several ways of disposing the waves, and after obtaining results which in the main were concordant, I decided to adhere to Herr Lecher's arrangement as being the neatest and the most suitable for the investigation.<sup>1</sup> Fig. 37 shows the form thereof.

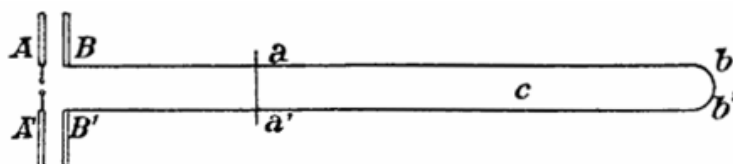


Fig. 37.

A  $A'$  is the same conductor which was always used before as the primary conductor, and consists of two square plates, each 40 cm in the side, connected by a wire 60 cm long which contains a 2 mm spark-gap. A small induction-coil was used as an exciter; this was supplied with current from two accumulators, and its maximum spark-length was only 4cm Single discharges of this smaller apparatus were certainly less efficient than those of a larger induction-coil, but this (p. 188) drawback was more than compensated for by the more rapid succession of discharges. Opposite the plates  $A$  and  $A'$ , and at a distance of 10 cm from them, stood the plates  $B$  and  $B'$ , from which two parallel wires, about 30 cm apart, are led to a distance of 6·8 metres, and there are connected together between  $b$  and  $b'$ . At a variable distance  $a a'$  from their origin these wires are placed in communication with each other by means of a second connection or *bridge*. When this bridge is in a certain position, at a distance of about 1·2 metre from  $BB'$ , there takes place in the interval between  $aa'$  and  $bb'$  a very energetic oscillation. This indicates the half wavelength of a stationary wave, and, as Herr Lecher has shown, it is produced by resonance between this oscillation itself and the primary oscillation, which here takes place in the interval between  $AA'$  on the one hand, and  $Ba a'B'$  on the other hand.

Any shifting of the bridge increases one of the two periods of oscillation, and at the same time diminishes the other; hence the peculiar definiteness of adjustment with this arrangement. Besides its general excellence it offers for our present purpose several special advantages. Since the forces to be observed are very small, we have to protect carefully the conductors which are subjected to them from external electrostatic effects. With the arrangement here used this is possible, because the wires, which we must necessarily place near the test-body, form a connected conducting system. If in our experiments we surround the working parts (of the apparatus) with a wire network, and connect this

<sup>1</sup> E. Lecher, *Wied. Ann.* **41**, p. 850, 1890.

with the nodal points at  $aa'$  and  $bb'$ , the protection is made complete without interfering with the vibration. Hence the experiments are carried out in this way. Again, since the conductors which are to be subjected to the forces do not, like the resonators previously used, pick out a definite vibration from the whole disturbance, we could only expect confused results if we did not otherwise take care to produce a simple oscillation of definite wave-length and with nodes in known positions. This condition is fulfilled in the above arrangement; for there can be no doubt that the points  $aa'$  and  $bb'$  are nodal points of all oscillations excited between them, and that among these only the longest oscillation, strengthened by resonance, rises to a considerable magnitude. Clearly, we do not narrow the scope of the experiments by (p. 189) contenting ourselves with the investigation of half a wavelength. Finally, the conditions of our oscillation are practically the same whether the two wires are stretched straight, or whether they are bent side by side in any desired way; just as, in the case of acoustic vibrations of air in tubes, it is not of much importance whether the tubes are straight or crooked. We can thus easily bring our oscillation into all possible positions with respect to the test-body which is held in a fixed position. As a matter of fact, the various relative positions were always obtained by shifting the wire, even in cases in which it may appear from the text that the test-body had been shifted.

## 2. The Electric Force

For the purpose of measuring the mechanical action of the electric force, I made use of a small cylindrical tube of gold paper 5.5 cm long, and 0.7 cm in diameter. This was suspended by a silk fiber with its axis horizontal; a very small magnet gave the tube a definite position of rest, and a deviation from this position was measured by means of a small mirror.

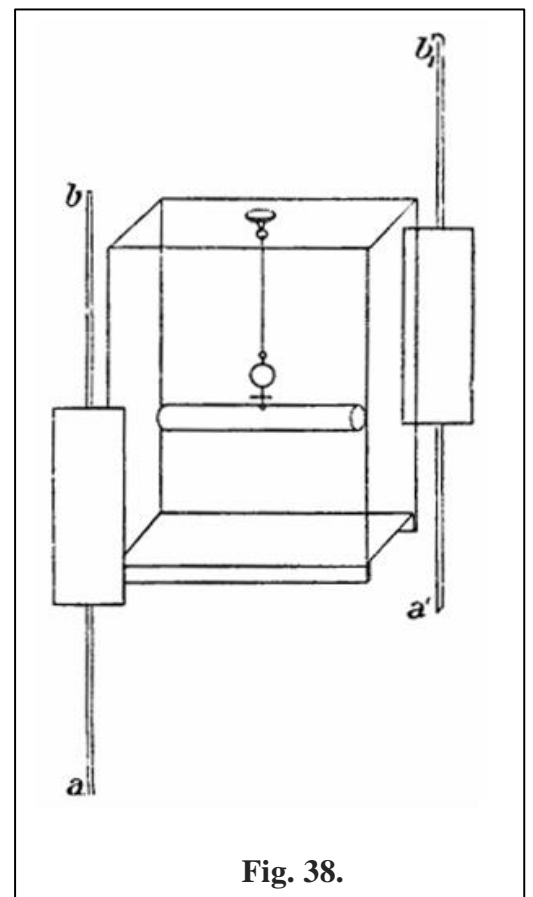


Fig. 38.

The whole system hung in a glass case, as shown in Fig. 38. When the apparatus was subjected to the action of the oscillation, the needle tended to set along the mean direction of the electric force, and was thus deflected from the position of rest. In order to increase these deflections, I brought the two wires in the neighbourhood of the apparatus nearer to one another and to the test-body—in fact, within a few centimetres; and in order to strengthen the action I attached small plates to the wires, opposite to the ends of the test-body, as shown for one special case in the figure. Under (p. 190) these circumstances first deflections of 100 scale divisions and above could be obtained. These first throws

exhibited a satisfactory regularity; when the same experiment was repeated several times, the separate results only differed from one another by a few per cent. The differences between single discharges ought to be much greater, but the throw of the needle gives the mean effect of very many discharges. In order to show how these throws can be used in quantitative experiments I here, quote two series of observations. The first of these is intended to illustrate the effect of resonance. The apparatus was set up at  $c$  at the antinode of an oscillation, and the wires  $ab$  and  $a'b'$  were brought near to it, as shown in Fig. 38. The bridge  $aa'$  was now placed at various distances  $e$  from the origin  $BB'$  of the wires, the induction-apparatus was put into action, and the magnitude  $i$  of the throw measured. The respective values of  $e$  and  $i$  in the neighbourhood of the maximum were: —

$e$	90	100	110	120	130	140	150	160	
= 80									cm
$i$	10.0	21.	51.2	44.1	19.3	10.3	5.7	4.2	
= 5.3		8							div

When the throws are represented graphically it is seen that their course is regular and exhibits a pronounced maximum between 110 and 120 cm. In fact, the throws reach their largest value  $I = 60.6$  scale divisions at  $e = 114$  cm. The second series of observations was intended to exhibit the decrease in the intensity of the oscillation from the antinode  $e$  to the node  $b$ . For this purpose, the distance was divided into 12 equal divisions, and the apparatus was introduced at the 13 end-points. The following first throws  $I$  were obtained: —

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
80.5	80.5	79.0	77.0	65.6	57.8	50.0	38.5	27.5	17.5	7.0	1.0	0

These values again give a sufficiently smooth curve and enable us to form an idea of the nature of the oscillation, and to convince ourselves that it differs appreciably from the simple sine-oscillation.

Other experiments which I planned had reference to the direction of the electric force in the neighbourhood of the wires. These experiments gave no fresh information beyond (p. 191) what might be regarded as already settled. In the interval between the wires the needle tended to set along the shortest line between the two wires; outside this space it tended to take up the direction towards the nearest wire. Thus, there was always an apparent attraction to be observed between the ends of the tube and the nearest parts of the wires.

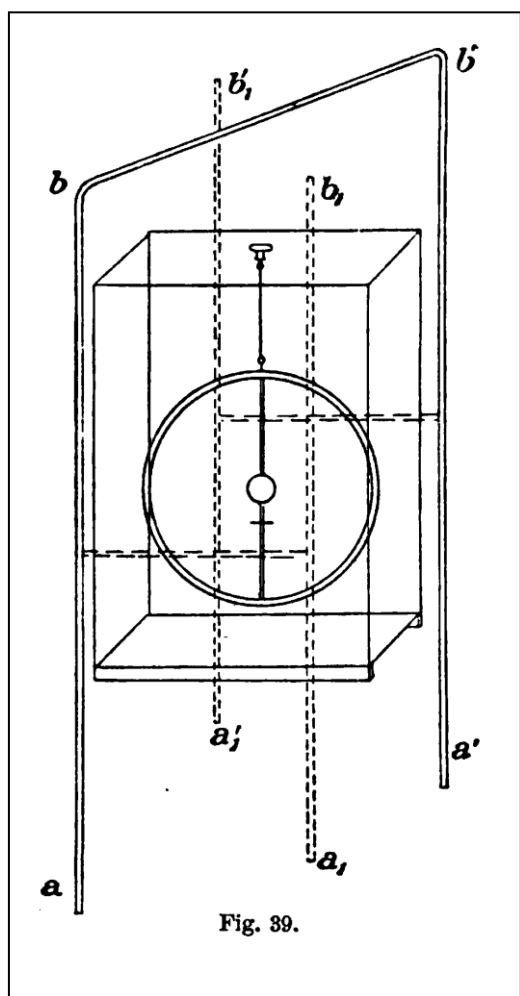
### **3, The Magnetic Force**

In order to investigate the magnetic force, I made use of a circular hoop of aluminum wire. The diameter of this hoop was 65 mm, and that of the wire was 2 mm. The hoop was suspended so that it



could turn about a vertical diameter, and, like the cylinder in the last section, was provided with a magnet, mirror, and glass case. Fig. 39 gives a sketch of the apparatus used.

If we disregard for a moment our knowledge of the magnetic force, we should expect that, under the influence of the oscillation, the hoop would behave just like the cylinder, and therefore that the direction of the parts which are farthest from the axis of rotation, *i.e.*, that the horizontal diameter of the hoop would play the same part as the axis of length of the cylinder. We should therefore expect



the end points of the horizontal diameter would everywhere be attracted by the nearest parts of the wires through which the waves are passing, and that this action would be strongest at the antinode of the oscillation, and would cease in the neighbourhood of the nodes where the electric force itself disappears. But if we actually hang up the hoop at the node  $b b'$ , in the manner shown in Fig.39, we observe other and unexpected phenomena. In the (p. 192) first place, the ring does not remain at rest under the influence of the oscillation, but exhibits deflections of the same order of magnitude as those shown by the cylinder at the antinode of the oscillation. In the second place, the deflection does not indicate an attraction but repulsion between the neighbouring points of the hoop and the wires, That the repulsion is a consequence of the oscillation itself is shown by the fact that its magnitude is found to be determined by resonance, according to the same law as that of the electrical action. If we leave the hoop inside the bent wire  $b b'$ , but alter the relative positions of the two, we find that the horizontal diameter always, and from all sides, endeavors to take up a position perpendicular to the plane of the bent wire.

After these experiments alone, and apart from any knowledge obtained otherwise, we may therefore assert that, in addition to the electric oscillation, there is present

an oscillation of another kind whose nodal points do not coincide with those of the electric oscillation, and that this oscillation, like the electric alone, exhibits itself as a directive change of space-conditions, but that the characteristic direction of the new oscillation is perpendicular to the electrical one.

We may indeed, going beyond mere observation, at once identify the new oscillation with the magnetic oscillation required by theory. The rapidly alternating magnetic force must induce in the closed hoop a current alternating rhythmically with it, and the reaction between these causes the deflection of the loop. The magnetic force has its maximum value at the nodes of the electric oscillation, and just there its direction is perpendicular to the plane of the bent wire. We can most easily

understand the repulsion between the fixed wires and the neighbouring parts of the hoop by regarding it as the effect of currents flowing along these paths. The current deduced in the hoop must continually annul the effect of the inducing current in the interior of the hoop; it must therefore at every instant be in the opposite direction to the latter, and must accordingly be repelled by it.

All the remaining phenomena of disturbance which are observed with the suspended hoop, can without difficulty be connected with the above explanation. Under certain circumstances complications arise. For example, if we leave the (p. 193) arrangement in the state shown in Fig. 39, but move the hoop from the node  $b b'$  towards the antinode of the oscillation, the repulsion rapidly diminishes; at a certain distance it becomes zero, and then changes into an attraction which increases until we arrive at the antinode. In one special case, for example, the repulsion at  $bb'$  amounted to 20 scale divisions, disappeared at a distance of 95 cm from the end, and then changed into an attraction of which the maximum value was measured by 44 scale divisions. Clearly these changes are not to be explained by the behaviour of the magnetic force alone, but by the joint action of the magnetic with the electric force; of these the latter preponderates considerably at  $c$ , the former at  $b b'$ . By eliminating the electric force, we can confirm this view and follow the course of the magnetic oscillation. For this purpose, we set up two other wires parallel to the wires  $ab$  and  $a'b'$ , but only 20 cm long, and in such a position that they are symmetrical towards the wires  $ab$  and  $a'b'$  with reference to the position of rest of the hoop, as shown by the dotted lines  $a_1b_1$  and  $a_1' b_1'$  in Fig. 40. We connect  $ab$  with  $a_1b_1$  and  $a' b'$  with  $a_1' b_1'$ . Clearly this almost annuls the electric action, but scarcely affects the magnetic. In fact, we now observe that at all distances the movable ring is repelled from the fixed wires. This repulsion diminishes continuously from the ends towards the middle of the oscillation; it there reaches a minimum which, in the particular instance referred to, amounted to 4 scale divisions. If the electric oscillation were a real sine-oscillation, the magnetic force would necessarily vanish at its antinode; but we saw at once, from the distribution of the electric force, that this simple assumption did not hold good, and so we can easily understand the existence of a residual magnetic force at the antinode of the oscillation.

As required by theory, the mechanical effects of the electric and of the magnetic force prove to be, in general, of the same order of magnitude; the preponderance of the one over the other in each particular case is mainly determined by the proportions of the neighbouring parts of the ring and of the fixed conductors. The more these approximate to the state of infinitely thin wires, the more the magnetic force comes into prominence; the broader the surfaces which are attached to them, the more is the magnetic force overpowered by the (p. 194) electric force. It is evident, even from the simple examples of forms of conductor which we have chosen for the detailed investigation, that a conductor of any form whatever inside a train of electromagnetic waves must be subjected to the action of forces which are complicated and not always easy to understand.

(p. 195)

### XIII

## ON THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF ELECTROMAGNETICS FOR BODIES AT REST

(*Gottinger Nachr.* March 19, 1890; *Wiedemann's Annn.* 40, p. 577)

The system of ideas and formulæ by which Maxwell represented electromagnetic phenomena is in its possible developments richer and more comprehensive than any other of the systems which have been devised for the same purpose. It is certainly desirable that a system which is so perfect, as far as its contents are concerned, should also be perfected as far as possible in regard to its form. The system should be so constructed as to allow its logical foundations to be easily recognised; all unessential ideas should be removed from it, and the relations of the essential ideas should be reduced to their simplest form, in this respect Maxwell's own representation does not indicate the highest attainable goal; it frequently wavers between the conceptions which Maxwell found in existence, and those at which he arrived. Maxwell starts with the assumption of direct actions-at-a-distance; he investigates the laws according to which hypothetical polarizations of the dielectric ether vary under the influence of such distance-forces; and he ends by asserting that these polarizations do really vary thus, but without being actually caused to do so by distance-forces.<sup>1</sup>This procedure leaves behind it the unsatisfactory feeling that there must be something wrong about either the final result or the way which led to it. Another effect of this procedure is that in the formulæ there are retained a number of superfluous, (p. 196) and in a sense rudimentary, ideas which only possessed their proper significance in the older theory of direct action-at-a distance.

Among such rudimentary ideas of a physical nature may mention that of dielectric displacement in free ether, as distinguished from the electric force which produces it and the relation between the two—the specific inductive capacity of the ether. These distinctions have a meaning so long as we can

---

<sup>111</sup> The same remark applies to v. Helmholtz's paper in vol. 72 of *Crelle's Journal*, — *not*, indeed, throughout, but as far as relates to the special values of the constants, which allow the distance-forces to vanish from the final results, and which, therefore, lead to the theory here supported.

remove the ether from a space and yet allow the force to persist in it. This was conceivable, according to the conception from which Maxwell started; it is not conceivable, according to the conception to which we have been led by his researches. As a rudimentary idea of a mathematical nature, I may mention the predominance of the vector-potential in the fundamental equations. In the construction of the new theory the potential served as a scaffolding; by its introduction the distance-forces which appeared discontinuously at particular points were replaced by magnitudes which at every point in space were determined only by the conditions at the neighbouring points. But after we have learnt to regard the forces themselves as magnitudes of the latter kind, there is no object in replacing them by potentials unless a mathematical advantage is thereby gained. And it does not appear to me that any such advantage is attained by the introduction of the vector-potential in the fundamental equations; furthermore, one would expect to find in these equations relations between the physical magnitudes which are actually observed, and not between magnitudes which serve for calculation only.

Again, the incompleteness of form referred to renders it more difficult to apply Maxwell's theory to special cases. In connection with such applications, I have been led to endeavour for some time past to sift Maxwell's formulæ and to separate their essential significance from the particular form in which they first happened to appear. The results at which I have arrived are set forth in the present paper. Mr. Oliver Heaviside has been working in the same direction ever since 1885. From Maxwell's equations he removes the same symbols as myself; and the simplest form which these equations<sup>1</sup> (p. 197) thereby attain is essentially the same as that at which I arrive. In this respect, then, Mr. Heaviside has the priority. Nevertheless, I hope that the following representation will not be deemed superfluous. It does not claim to set forth matters in a final form; but only in such a manner as to admit of further improvements more easily than has hitherto been possible.

I divide the subject into two parts. In the first part (A) I give the fundamental ideas and the formulæ by which they are connected. Explanations will be added to the formulæ; but these explanations are not to be regarded as proofs of the formulæ. The statements will rather be given as facts derived from experience and experience must be regarded as their proof. It is true, meanwhile, that each separate formula cannot be specially tested by experience, but only the system as a whole. But practically the same holds good for the system of equations of ordinary dynamics.

In the second part (B) I state in what manner the facts which are directly observed can be systematically deduced from the formulæ; and, hence, by what experiences the correctness of the system can be proved. A complete treatment of this part would naturally assume very large dimensions, and therefore mere indications must here suffice.

---

<sup>1</sup> These equations will be found in the *Phil. Mag.* for February 1888. Reference is there made to earlier papers in the *Electrician* for 1885, but this source was not accessible to me.



## A. THE FUNDAMENTAL IDEAS AND THEIR CONNECTION

### 1. *Electric and Magnetic Force*

Starting from rest, the interior of all bodies, including the free ether, can experience disturbances which we denote as electrical, and others which we denote as magnetic. The nature of these changes of state we do not know, but only the phenomena which their presence causes. Regarding these latter as known we can, with their aid, determine the geometrical relations of the changes of state themselves. The disturbances of the electric and the magnetic kind are so connected with one another that disturbances of the one kind can continuously exist independently of those of the other kind; but that, on the other hand, it is not possible for disturbances of either of the two kinds to experience temporary fluctuations without exciting simultaneously disturbances of the other kind. (p. 198) The production of the change of state necessitates an expenditure of energy; this energy is again released when the disturbance disappears; hence the presence of the disturbance represents a stock of energy. At any given point the changes of state of either kind can be distinguished as to direction, sense, and magnitude. For the determination, therefore, of the electrical as well as of the magnetic state, it is necessary to specify a directed magnitude or the three components thereof. But it is an essential and important hypothesis of our present theory that the specification of a single directed magnitude is sufficient to determine completely the change of state under consideration. Certain phenomena, *e.g.*, those of permanent magnetism, dispersion, etc., are not intelligible from this standpoint; they require that the electric or magnetic conditions of any point should be represented by more than one variable.<sup>1</sup> For this very reason such phenomena are excluded from our considerations in their present state.

That directed magnitude by means of which we first determine the electrical state, we call the electric force. The phenomenon by which we define the electric force is the mechanical force which a certain electrified body experiences in empty space under electrical stress. That is to say, for empty space we make the component of the electric force in any given direction proportional to the component of this mechanical force in the same direction. By electric force at a point in a ponderable body we understand the electric force at this point inside an infinitely small cylindrical space, infinitely narrow as compared with its length, bored out of the body in such a way that its direction coincides with that of the force — a requirement which, as experience shows, can always be satisfied. And whatever may be the relation between the force so measured and the actual change of state of the body, it certainly must, in accordance with our hypothesis, determine the change of state without ambiguity. If we everywhere replace the word "electric" by the word "magnetic," and the electrified test-body by the pole of a magnetic needle, we obtain the definition of magnetic force. In order to settle the sense of both forces in the conventional manner, let us further stipulate that the electrified

---

<sup>1</sup> [See Note 29 at end of book.]

test-body is charged with vitreous electricity, and (p. 199) that the pole of the magnetic needle used is the one which points towards the north. The units of the forces are still reserved. The components of the electric force in the directions  $x, y, z$ , we shall denote as  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ , and the corresponding components of the magnetic force as  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ .

## *2. The Energy of the Field*

The stock of electrical energy in a portion of a body, within which the electric force has a constant value, is a homogeneous quadratic function of the three components of the electric force. The corresponding statement holds good for the supply of magnetic energy. The total supply of energy we shall denote as the electromagnetic; it is the sum of the electrical and the magnetic.

According to this, the amount of energy of either kind per unit volume is for an isotropic body equal to the product of the square of the total force under consideration and a constant. The magnitude of the latter may be different for the electric and the magnetic energy; it depends upon the material of the body and the choice of the units for energy and for the forces. We shall measure the energy in absolute Gauss's measure; and shall now fix the units of the forces by stipulating that in free ether the value of the constants shall be equal to  $1/8\pi$ , so that the energy of unit volume of the stressed ether will be

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2).$$

When the forces are measured in this manner, we say that they are measured in absolute Gauss's units.<sup>1</sup> The dimensions of the electric force become the same as those of the magnetic force. Both are such that their square has the dimensions of energy per unit volume; or, expressed in the usual notation, the dimensions of both are  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}^{-1}$ .

For every isotropic ponderable body, we can now, in accordance with what has been stated, put the energy per unit volume as equal to

$$\frac{\epsilon}{8\pi}(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) + \frac{\mu}{8\pi}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2).$$

(p. 200) The new constants ( $\epsilon$  and  $\mu$ .) here introduced are necessarily positive, and are simply numbers. We shall call  $\epsilon$  the specific inductive capacity (*Dielektricitätsconstante*) and  $\mu$ , the magnetic permeability (*Magnetisirungsconstante*) of the substance. Clearly,  $\epsilon$  and  $\mu$ , are numerical ratios, by means of which we compare the energy of one material with the energy of another material A definite

---

<sup>1</sup> See **H. Helmholtz**, *Wied. Ann.* **17**, p. 42, 1882.

value of either does not follow simply from the nature of a single substance itself. This is what we mean when we say that the specific inductive capacity and the magnetic permeability are not intrinsic constants of a substance. There is nothing wrong in saying that these constants are equal to unity for the ether; but this does not state any fact derived from experience; it is only an arbitrary stipulation on our part.

For crystalline bodies the energy per unit of volume will be equal to

$$\frac{1}{8\pi}(\epsilon_{11}X^2 + \epsilon_{22}Y^2 + \epsilon_{33}Z^2 + 2\epsilon_{12}XY + 2\epsilon_{23}YZ + 2\epsilon_{13}XZ) \\ + \frac{1}{8\pi}(\mu_{11}L^2 + \mu_{22}M^2 + \mu_{33}N^2 + 2\mu_{12}LM + 2\mu_{23}MN + 2\mu_{13}LN).$$

By a suitable choice of axes either the one part or the other of this expression can be transformed into a sum of three squares. It is even probable that the same choice of axes would thus transform both parts. The  $\epsilon$  and  $\mu$ , must be such that in the transformation into a sum of squares all the coefficients would become positive.

### 3. *Connection of the Forces in the Ether*

We assume that the system of co-ordinates is such that the direction of positive  $x$  is straight out in front of us, the direction of positive  $z$  upwards, and that  $y$  increases from left to right.<sup>1</sup> Assuming this, the electric and magnetic forces in the ether are connected with each other according to the following equations: —

(p. 201)

$$(3_a) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right. \quad (3_b) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}, \end{array} \right.$$

in addition to which we have the equations (which are not inconsistent with the above) —

---

<sup>1</sup> Unfortunately for the English reader this is not the system employed by Maxwell, but the symmetric one. Hence follow some differences from Maxwell's formulæ as to the signs + and -. The system is that which is employed in v. Helmholtz's papers.



$$(3_c) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

as a supplement distinguishing the ether from ponderable matter.

After these equations are once found, it no longer appears expedient to deduce them (in accordance with the historical course) from conjectures as to the electric and magnetic constitution of the ether and the nature of the acting forces, — all these things being entirely unknown. Rather is it expedient to start from these equations in search of such further conjectures respecting the constitution of the ether.

Since the dimensions of  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ , and of  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  are the same, the constant  $A$  must be the reciprocal of a velocity. It is in reality an intrinsic constant of the ether; in saying this we assert that its magnitude is independent of the presence of any other body, or of any arbitrary stipulations on our part.

We multiply all our equations by  $(1/4\pi A) \times d\tau$ ; further multiply the members of the series separately by  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  respectively, and add all together. We integrate both sides of the resulting equation over any definite space, of which the element of surface  $d\omega$  makes, with the co-ordinate axes, the angle  $n_x, n_y, n_z$ . The integration can be carried out on the right-hand side of the equation, and we get —

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \left\{ (\mathbf{N}\mathbf{Y} - \mathbf{M}\mathbf{Z}) \cos n_x + (\mathbf{L}\mathbf{Z} - \mathbf{N}\mathbf{X}) \cos n_y \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{M}\mathbf{X} - \mathbf{L}\mathbf{Y}) \cos n_z \right\} d\omega. \end{aligned}$$

(p. 202) The integral on the left-hand side is the electromagnetic energy of the space; the equation, therefore, gives us the variation of this energy, expressed in magnitudes which relate only to the bounding surface of the space.

#### 4. *Isotropic Non-Conductors*

In homogeneous isotropic non-conductors the phenomena are qualitatively identical with those in free ether. Quantitatively they differ in two respects: in the first place, the intrinsic constant has a value different from what it has in the ether; and in the second place, the expression for the energy per unit volume contains, as already explained, the constants  $\square$  and  $\square$ . The following equations represent these statements, and are in accord with experience: —

$$(4_a) \begin{cases} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dz} - \frac{dX}{dy}; \end{cases} \quad (4_b) \begin{cases} A\epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A\epsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A\epsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

For if, for a moment, we determine the measure of the forces in the non-conductor as we have previously done in the ether, and accordingly replace  $X, Y, Z$  by  $X/\sqrt{\epsilon}, Y/\sqrt{\epsilon}, Z/\sqrt{\epsilon}$  and  $L, M, N$  by  $L/\sqrt{\mu}, M/\sqrt{\mu}, N/\sqrt{\mu}$ ; then the equations assume exactly the form of the equations for the ether — with this single difference, that the magnitude  $A$  is replaced by the magnitude  $A/\sqrt{\epsilon\mu}$ . If we retain, on the other side, our measure of the forces, we can consistently assign to the energy the requisite value. For by carrying out the same operations which we employed in the preceding section, we get

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \{ (NY - MZ) \cos n_x + (LZ - NX) \cos n_y \\ & \quad + (MX - LY) \cos n_z \} d\omega. \end{aligned}$$

(p, 203) The general statements by which we have been guided to equations (4) no longer hold good when the non-conductor is not homogeneous. The question therefore arises — Do our equations hold good in this case? Experience answers this question in the affirmative; we may therefore regard the magnitudes  $\epsilon$  and  $\mu$  in equations (4a) and (4b) as variable from point to point.

### 5. Crystalline Non-Conductors

We can obtain a representation of the processes that take place in such bodies-whose structure differs in different directions, but whose electromagnetic properties merge into those of isotropic non-conductors as the eolotropy disappears-by regarding the time-variations of the forces on the left hand of our equations as perfectly general linear functions of the space-variations of the forces of the opposite kind on the right hand. The generality of form of these linear functions and the choice of their constants is, however, restricted by assuming that the same operation which has already furnished us with an equation for the variation of energy will always do so, and by stipulating that the energy shall thereby be expressed in the form already established. By these considerations we are led to the following equations, which, in fact, suffice for the representation of the most important phenomena: —

$$\begin{aligned}
(5_a) \quad & \left\{ \begin{aligned}
A \left( \mu_{11} \frac{dL}{dt} + \mu_{12} \frac{dM}{dt} + \mu_{13} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\
A \left( \mu_{12} \frac{dL}{dt} + \mu_{22} \frac{dM}{dt} + \mu_{23} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\
A \left( \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy};
\end{aligned} \right. \\
(5_b) \quad & \left\{ \begin{aligned}
A \left( \epsilon_{11} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{12} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{13} \frac{dZ}{dt} \right) &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\
A \left( \epsilon_{12} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{22} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dZ}{dt} \right) &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\
A \left( \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} \right) &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

(p. 204) The equation for the variation of the energy of a space gives the same result as in sections (3) and (4). Experience also shows that it is not necessary to regard the  $\square$  and  $m$ , in the equations of the present section as being constant throughout the space; they may be magnitudes varying in any way from point to point.

### 6. Distribution of the Forces in Conductors

In the bodies hitherto considered, every variation of the electric force appears as the consequence of the presence of magnetic forces. If within a finite region the magnetic forces are equal to zero, every cause for such a variation is wanting; and any existing distribution of electric force remains permanently, so long as it is left to itself and no disturbance reaches the interior from beyond the limits of the region. The electric forces do not behave thus in all bodies. In many bodies an electric force when left to itself vanishes more or less rapidly away; in such bodies, magnetic forces or other causes are necessary in order to restrain an existing distribution from change. For reasons which will appear later, we call such bodies conductors. The simplest assumptions which we can make with respect to them are these: In the first place, that the loss per unit time experienced by an electric force when left to itself is proportional to the force itself; and, in the second place, that independently of this loss the magnetic forces here tend to produce the same variations as in the bodies hitherto considered. If we introduce a new constant  $\lambda$ , the first assumption allows us to assert that the force-component  $X$  when left to itself will vary in accordance with the equation—

$$A\epsilon \frac{dX}{dt} = 4\pi\lambda Ax$$

This first assumption is supplemented by the second as follows: —When magnetic forces are present, the variation will take place in accordance with the equation —

$$A\epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda Ax$$

The constant  $\lambda$  is called the specific conductivity of the body (p. 205) measured electrostatically. Its dimension is the reciprocal of a time. Hence the magnitude  $\epsilon/4\pi\lambda$  is a time; it is the time in which the force when left to itself sinks to  $1/\epsilon$  of its initial value —the so-called time of relaxation. Hr. E. Cohn first observed and drew attention to the fact<sup>1</sup> that it is this latter time, and not  $\square$  itself, that is a second intrinsic constant of the body under consideration; one that can be settled without ambiguity and independently of any second medium.

These considerations lead us now, conjecturally, to the following equations which are in accordance with experience: —

$$(6_a) \left\{ \begin{array}{l} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right. \quad (6_b) \left\{ \begin{array}{l} A\epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\epsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\epsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dX}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ. \end{array} \right.$$

Clearly these equations refer only to isotropic media; it is, however, unnecessary, as far as the hypotheses hitherto made are concerned, that the bodies should be homogeneous as well. But in order to represent accurately the actual distribution of the forces in a non-homogeneous body, our equations still need to be supplemented to a certain extent. For if the constitution of a body varies from point to point, the electric force when left to itself does not in general sink completely to zero, but it assumes a certain final value which is not zero. This value, whose components may be  $X' Y' Z'$ , we call the electromotive force acting at the point in question. We regard this as being independent of time; in general, it is greater, the greater the variation of the chemical nature of the body per unit of length. We take into account the action of the electromotive force as follows: — Instead of making the diminution of the electric force when left to itself proportional to its absolute value, we make it proportional to the difference which remains between this absolute value and the final value. In the case,

---

<sup>1</sup> With respect to this, and the manner in which the magnitude  $\lambda$  is here introduced, cf. E. Cohn, *Berl. Ber.* **26**, p. 405, 1889.

then, of conductors whose structure admits of the production of electromotive forces, our equations become — (p. 206)

$$(6_c) \left\{ \begin{array}{l} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right. \quad (6_d) \left\{ \begin{array}{l} A\epsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A(X - X'), \\ A\epsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda A(Y - Y'), \\ A\epsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda A(Z - Z'). \end{array} \right.$$

### 7. Eolotropic Conductors

If the conductor behaves differently in different directions, we can no longer assume that the diminution in each component of the force when left to itself depends only upon this same component; we must rather suppose that it is a linear function of the three components. If we further assume that when the conductivity vanishes, the equations reduce to those of an eolotropic non-conductor, we arrive at the following system: —

$$(7_a) \left\{ \begin{array}{l} A \left( \mu_{11} \frac{dL}{dt} + \mu_{12} \frac{dM}{dt} + \mu_{13} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \left( \mu_{12} \frac{dL}{dt} + \mu_{22} \frac{dM}{dt} + \mu_{23} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \left( \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt} \right) = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{array} \right.$$

$$(7_b) \left\{ \begin{array}{l} A \left( \epsilon_{11} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{12} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{13} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z') \}, \\ A \left( \epsilon_{12} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{22} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z') \}, \\ A \left( \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \\ \quad - 4\pi A \{ \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z') \}. \end{array} \right.$$

It is highly probable that for all actual bodies  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ ,  $\lambda_{31} = \lambda_{23}$ ,  $= \lambda_{32}$ . We may regard the constants  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  in the equations of this section again as varying in value from place to place.

(p. 207)

### 8. Limiting Conditions

It is easily seen that the equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>) include all the earlier ones as particular cases; and that even the equations for the free ether can be deduced from them by a suitable disposition of the constants. Now since these constants may be functions of the space, we are led to regard the surface of separation of two heterogeneous bodies as a transition-layer, in which the constants certainly pass with extraordinary rapidity from one value to another, but in which this still happens in such a way that even in the layer itself the above equations always hold good, and express finite relations between the finite values of the constants and the forces which also remain finite. In order to deduce the limiting conditions from this hypothesis, which is in accordance with experience, let us for the sake of simplicity suppose that the element of the surface of separation under consideration coincides with the *xy*-plane.

Disregarding for the moment the appearance of electromotive forces between the bodies in contact, we find, on examining the first two of the equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>), that the magnitudes

$$\frac{dX}{dz}, \quad \frac{dY}{dz}, \quad \frac{dM}{dz}, \quad \frac{dL}{dz}$$

must, in consequence of our hypothesis, remain finite in the transition-layer as well. Thus, if the index 1 refers to the one side of the limiting layer, and the index 2 to the other side, we must have

$$(8a) \quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= 0 \\ X_2 - X_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (8b) \quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0 \\ L_2 - L_1 &= 0 \end{aligned}$$

The components of the force which are tangential to the limiting surface therefore continue through it without discontinuity. Applying this to the third of the equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>), we further find that the expressions

$$\begin{aligned} \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt} \quad \text{and} \\ \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} + 4\pi(\lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z) \end{aligned}$$

(p. 208) must have the same value on both sides of the limiting layer. This statement, which expresses the reciprocal dependence of the normal components of the forces on both sides of the limiting surface, assumes in the case of isotropic bodies the simple form

$$(8_c) \quad \mu_1 \frac{dN_1}{dt} - \mu_2 \frac{dN_2}{dt} = 0,$$

$$(8_d) \quad \epsilon_1 \frac{dZ_1}{dt} - \epsilon_2 \frac{dZ_2}{dt} = -4\pi(\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2).$$

In the next place, if we do not exclude the appearance of electromotive forces in the limiting layer, we have to observe that, in accordance with experience, the component of these forces which is normal to the limiting surface, *i.e.*  $Z'$ , becomes infinite in the transition-layer itself; and yet in such a way that the integral  $\int Z' dz$  taken through the limiting surface retains a finite value; this value we can obtain from experiments, although these leave us in the dark as to the course of  $Z'$  itself. We now satisfy the hypothesis of the present section by assuming that, with  $L, M, N, X, Y$ , the magnitude  $Z - Z'$  remains finite in the transition-layer.  $Z$  becomes infinite there; nevertheless, we can allow  $dZ/dt$  to remain finite. Furthermore, we put

$$(8_e) \quad \int Z dz = \int Z' dz = \phi_{1,2},$$

Let us now integrate the first two of the equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>) after multiplying by  $dz$  through the transition-layer. Since, on account of the shortness of the path, the integral of every finite magnitude vanishes, we obtain the conditions —

$$(8_f) \quad \begin{cases} Y_2 - Y_1 = \frac{d\phi_{1,2}}{dy}, \\ X_2 - X_1 = \frac{d\phi_{1,2}}{dx}; \end{cases} \quad (8_g) \quad \begin{cases} M_2 - M_1 = 0, \\ N_2 - N_1 = 0. \end{cases}$$

Applying these to the third of the equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>), we obtain as the conditions for the normal-forces, that on both sides of the limiting surface, the values of the expressions (p. 209)

$$\begin{aligned} & \mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt}, \\ & \epsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \epsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \epsilon_{33} \frac{dZ}{dt} + 4\pi \{ \lambda_{31}(X - X') \\ & \quad + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z') \} \end{aligned}$$

Must be equal. If the bodies on both sides of the limiting surface are homogeneous, then the presence of the electromotive forces has no effect upon the conditions by which the forces existing on the two sides are connected.

Our limiting conditions are nothing else than the general equations (7<sub>a</sub>) and (7<sub>b</sub>), transformed to suit special circumstances. We may, therefore, imagine every statement and every operation relating

to these general equations within a definite region to be at once extended to the limits of heterogeneous bodies within the region; provided always that this procedure does not land us in mathematical impossibilities, and therefore that our statements and operations, either directly or after suitable transformation, do not cease to be finite and definite. We shall often avail ourselves of the convenience which arises from this. And if, in general, we dispense with proving that all the expressions which arise are finite and definite, it must not be supposed that this is because we regard such proof as superfluous, but only because the proof has long since been furnished, or can be supplied according to known examples, in all the cases which have to be considered.

---

Each one of the previous sections means an increase in the number of facts embraced by the theory. The following sections, on the other hand, deal only with names and notations. As their introduction does not increase the number of facts embraced, they are merely accessory to the theory; their value consists partly in making possible a more concise mode of expression, and partly also in simply bringing our theory into its proper relation towards the older views as to electrical theory.

(p. 210)

### **9. *Electric and Magnetic Polarisation***

So far as our equations relate to isotropic media, each separate one gives the value which a single one of the physical magnitudes under consideration will have at the next moment, expressed as a definite function of the conditions existing at the present moment. This form of the equations is very perfect from a mathematical point of view, for it enables us to ascertain from the outset that the equations determine without ambiguity the course of any process whatever that maybe arbitrarily excited. It also appears very perfect from a much more philosophic standpoint; for it enables us to recognize on the left-hand side of the equation the future state — the consequence — while, at the same time, on the right-hand side of the equation, it exhibits the present state — the cause thereof. But those of our equations which relate to eolotropic bodies have not this perfect form; for, on the left-hand side, they do not contain the variations of a single physical magnitude, but functions of such variations. Since these functions are linear, the equations can certainly be thrown into the desired form by solving them for the separate variations. Another means to the same end — which, at the same time, simplifies the equations, — is by introducing the magnitudes which we call polarizations. We put

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{L} = \mu_{11}\mathbf{L} + \mu_{12}\mathbf{M} + \mu_{13}\mathbf{N} & \mathfrak{X} = \epsilon_{11}\mathbf{X} + \epsilon_{12}\mathbf{Y} + \epsilon_{13}\mathbf{Z} \\
 (9c) \quad \mathfrak{M} = \mu_{12}\mathbf{L} + \mu_{22}\mathbf{M} + \mu_{23}\mathbf{N} & (9d) \quad \mathfrak{D} = \epsilon_{12}\mathbf{X} + \epsilon_{22}\mathbf{Y} + \epsilon_{23}\mathbf{Z} \\
 \mathfrak{N} = \mu_{13}\mathbf{L} + \mu_{23}\mathbf{M} + \mu_{33}\mathbf{N} & \mathfrak{Z} = \epsilon_{13}\mathbf{X} + \epsilon_{23}\mathbf{Y} + \epsilon_{33}\mathbf{Z}
 \end{array}$$

and call the resultant of  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  the magnetic, and the resultant of  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{Z}$  the electric polarization. For isotropic bodies the polarizations and the forces have the same direction, and the ratio of the



former to the latter is the specific inductive capacity or the magnetic permeability. In the case of the ether polarizations and forces coincide. If we introduce the polarizations on the left-hand side of our equations, then each equation gives us the variation of a single polarization-component as the result of the forces instantaneously present. Since the forces are linear functions of the polarization, there is no difficulty in introducing the polarizations on the right-hand side of the equations as well. We should thus have (p. 211) replaced the particular directed magnitude — the force — which we first used to determine the electromagnetic state, by another directed magnitude — the polarization — which would serve our purpose as well, but not any better. The introduction of the polarizations and the forces side by side considerably simplifies the equations; and this is our first indication that, in order to represent completely the conditions in ponderable bodies, it is necessary to specify at least two directed magnitudes for the electrical condition and two for the magnetic condition.

In order to simplify our equations further, let us put

$$(9e) \quad \begin{aligned} u &= \lambda_{11}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') + \lambda_{12}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}') + \lambda_{13}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}') \\ v &= \lambda_{21}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') + \lambda_{22}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}') + \lambda_{23}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}') \\ w &= \lambda_{31}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') + \lambda_{32}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}') + \lambda_{33}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}') \end{aligned}$$

For reasons which will appear in the next section, we call  $u, v, w$  the components (measured electrostatically) of the electric current-density.

Our most general equations now take the form

$$(9a) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}\mu \frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{Z}}{dy} - \frac{d\mathfrak{Y}}{dz} \\ \mathbf{A}\mu \frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{X}}{dz} - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx} \\ \mathbf{A}\mu \frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} - \frac{d\mathfrak{X}}{dy} \end{aligned} \quad (9b) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}\varepsilon \frac{d\mathfrak{X}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{M}}{dz} - \frac{d\mathfrak{N}}{dy} - 4\pi\lambda\mathbf{A}u \\ \mathbf{A}\varepsilon \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{N}}{dx} - \frac{d\mathfrak{L}}{dz} - 4\pi\lambda\mathbf{A}v \\ \mathbf{A}\varepsilon \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} &= \frac{d\mathfrak{L}}{dy} - \frac{d\mathfrak{M}}{dx} - 4\pi\lambda\mathbf{A}w \end{aligned}$$

and, on introducing the polarisations, the electromagnetic energy per unit volume of any body, whatever takes the form

$$\frac{1}{8\pi} (\mathfrak{X}\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}) + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\mathfrak{N})$$

In these expressions there no longer appear any quantities which refer to any particular body. The statement that these equations must be satisfied at all points of infinite space, embraces all problems of electromagnetism; and the infinite multiplicity of these problems only arises through the fact that the constants  $\varepsilon, \mu, \lambda, X', Y', Z'$  of the linear relations(9c), (9d), (9e) may be functions of the space in a multiplicity of ways, varying partly continuously, and partly discontinuously, from point to point.

(p. 212)

### 10. Electricity and Magnetism

Let there be a system of ponderable bodies in which electromagnetic processes take place, and which are separated by empty space from other systems. Let us differentiate the three equations (9<sub>b</sub>) with respect to  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectively, and add; we thus obtain for all points of the system the equation

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) = -4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$$

Let us multiply this equation by the volume-element  $d\tau$ , and integrate over the volume up to any surface, completely enclosing the ponderable system. Let  $d\omega$  be the element of this surface, and let the normal to  $d\omega$ , make with the axes the angles  $n_x, n_y, n_z$ . Since  $u, v, w$ , are zero at the surface, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau &= \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{X} \cos n_x + \mathfrak{Y} \cos n_y + \mathfrak{Z} \cos n_z) d\omega = -4\pi \int \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau \\ &= -4\pi \int (u \cos n_x + v \cos n_y + w \cos n_z) d\omega = 0 \end{aligned}$$

Hence, if  $e$  denotes a quantity which is independent of time —

$$(10a) \quad \int \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau = \int (\mathfrak{X} \cos n_x + \mathfrak{Y} \cos n_y + \mathfrak{Z} \cos n_z) d\omega = 4\pi e$$

The quantity  $e$  is obviously a function of the electrical state of the system — a function of such a kind that it cannot be increased or diminished by any internal or external processes of a purely electromagnetic nature. This indestructibility of the quantity  $e$  — which also holds good for other than purely electromagnetic processes, so long as these are restricted to the interior of the system — has prompted the idea that  $e$  represents the amount of some substance contained in the system. In accordance with this idea, we call  $e$  the amount of electricity contained in the ponderable system. But we must allow  $e$  to (p. 213) be positive or negative, whereas the amount of a substance is necessarily positive. For this reason, the hypothesis has been supplemented by assuming the existence of two electricities of opposite properties, and making  $e$  mean the difference between the two; or else a way out of the difficulty has been sought in assuming that  $e$  represents only the deviation of the amount of electricity actually contained from the normal amount. But if  $e$  represents the quantity of a substance in one of these forms or some other form, then each volume-element  $d\tau$  must furnish its definite

share towards the total amount of  $e$ . Only hypothetically can we distribute the volume-integral, which supplies  $e$ , among the separate volume-elements. A possible distribution, the first which suggests itself for the moment is that which assigns to the volume-element  $d\tau$  the quantity of electricity —

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau$$

We shall call the quantity of electricity thus determined the true electricity of the volume-element; in the interior of a body, in accordance with this, we shall call the expression

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right)$$

the true volume-density, and at the surface of separation of dissimilar bodies the expression

$$\frac{1}{4\pi} \{ (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) \cos n, x + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1) \cos n, y + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1) \cos n, z \}$$

the true surface-density of the electricity.

Another possible distribution of  $e$  among the volume-elements which suggests itself, is that which we get through observing that in empty space polarisations and forces are identical, and that we can therefore write instead of (10<sub>a</sub>) —

$$(10b) \quad 4\pi e = \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z) d\omega = \int \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau$$

(p. 214) and furthermore, that we can regard the expression

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau$$

as representing the share which the volume-element  $d\tau$  contributes to  $e$ . Accordingly, we call the quantity of electricity so determined the free electricity of the volume-element, and-

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right)$$

the free volume-density, and at surfaces of separation —

$$\frac{1}{4\pi} \{ (X_2 - X_1) \cos n, x + (Y_2 - Y_1) \cos n, y + (Z_2 - Z_1) \cos n, z \}$$

the free surface-density of the electricity. The difference between the true and the free electricity we call the bound electricity. Our nomenclature follows the familiar nomenclature which takes its origin from the view hitherto held as to the existence of electrical action-at-a-distance.<sup>1</sup> According to this view, a part of the extraneous or "true" amount of electricity introduced into a non-conductor remains "bound" by electrical displacement<sup>2</sup> in the molecules of the surrounding medium; whereas the rest remains "free" to exert its distance-action outwards. And yet in many respects our nomenclature differs from the usual one. But since the latter is sometimes ambiguous and not always consistent, it was not possible for me to find a system of notation which would in all cases harmonize with the common use of terms. The common phraseology is also ambiguous in that it uses the word electricity without further discrimination to denote sometimes the true, sometimes the free electricity; and this even when important statements are being made.

In accordance with what has been stated above, we denote the integral

$$\int (\mathcal{X} \cos n, x + \mathcal{Y} \cos n, y + \mathcal{Z} \cos n, z) d\omega$$

extended over any closed surface and divided by  $4\pi$ , as the (p. 215) true electricity contained within this surface. The same integral extended over an unclosed surface we shall call the number of electric lines of force traversing this surface in the direction of the positive normal. By this notation we follow Faraday's conception, according to which the lines of force are lines which in isotropic homogeneous bodies run everywhere in the direction of the prevailing force, and the number of which is proportional to the magnitude of the force. It is true that by our notation we have rendered this conception more complete or precise in this respect, — that in all bodies we make the lines of force run everywhere in the direction of the polarization, not of the force, and that their density is in all cases proportional to the magnitude of the polarization, not of the force. It follows from our definitions that the quantity of true electricity contained in any space, multiplied by  $4\pi$ , is equal to the excess of the number of lines of force which enter the surface over the number which leave it. Every line of force which has an end must accordingly end in true electricity; and we may define the true electricity as the free ends of the lines of force. If a given space in the neighbourhood of the surface over which our integral extends is free from true electricity, then the value of the integral is independent of the particular position of the surface within this space; it only depends upon the position of the boundary of the surface. In this case, then, we denote the value of the integral as being the number of lines of

---

<sup>1</sup> [See Note 30 at end of book.]

<sup>2</sup> This is not identical with our polarizations. [See the theoretical part of the Introduction.]

force crossing the boundary line — any ambiguity remaining in this expression being supposed removed by special restrictions.

We shall next calculate the variation of the true electricity  $e_\omega$  in a part of our system bounded in any way. Let  $d\omega$ , again be an element of the bounding surface of this part. We get

$$(10c) \quad \frac{de_\omega}{dt} = \int \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) d\tau = - \int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\omega$$

Now if our bounding surface runs entirely in bodies for which  $\lambda$  is equal to zero, then  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , still vanish at the surface, and hence the amount of true electricity contained in the space bounded by it remains constant. Accordingly, true electricity cannot by any purely electromagnetic process escape from a space which is wholly bounded by bodies for which  $\lambda$  is (p. 216) equal to zero. For this reason, we call, and have called, such bodies, non-conductors. But if the bounding surface passes wholly or partially through bodies for which  $\lambda$  is not zero, it becomes possible for the amount of electricity within the space so bounded to vary through purely electrical disturbances; for this reason, we call bodies of this latter kind conductors. This division of bodies into conductors and non-conductors has reference therefore to the true electricity; with reference to the free electricity all bodies may be regarded as conductors (cf. displacement-currents). The amount of a substance within a given space can only vary by its passing inwards or outwards through the surface; and it is clear that a definite amount of the substance must pass through each element of the surface. Consistently with the fact that the amount of electricity given by our integral passes per unit time through every closed surface, we may assume that the amount

$$u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z$$

passes through unit surface of every surface-element. In accordance with this assumption we call, and have called,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , the components of the electric current-density, and the integral

$$\int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) d\omega$$

taken over an unclosed surface, the electric current flowing through this surface. We must, however, lay stress upon this — that even if we admit the materiality of electricity, the above special determination of its flow in conductors embraces a further hypothesis. Upon the system of disturbance found there can be superposed an arbitrary current-system, closed at every moment, without thereby altering the increase or decrease of electricity at any point.

If a portion of our system has attained its present condition, starting from the unelectrified condition, by purely electromagnetic processes, or if by purely electromagnetic changes it can return to the

unelectrified state, then in all non-conductors of this portion the true electricity is equal to zero. For such portions we have, then, in addition to the general equations, the following as limitations of the permissible initial conditions which are not inconsistent with the general equations, viz.: —

(p. 217)

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} = 0$$

for the interior of non-conductors; and

$$(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)\cos n_x + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1)\cos n_y + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1)\cos n_z = 0$$

for the boundary between two heterogeneous non-conductors.

The magnetic phenomena can be considered in a manner exactly analogous to the electric phenomena. Let us proceed to examine these, with the assistance of the equations (9<sub>a</sub>). We shall call

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right)$$

the true volume-density for the interior of a body; the expression —

$$\frac{1}{4\pi} \{ (\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1) \cos n_x + (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1) \cos n_y + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1) \cos n_z \}$$

the true surface-density of magnetism at the surface of separation of two bodies; and the integral of these magnitudes extended over a definite portion of space, the true magnetism contained in this portion. The integral

$$\int (\mathfrak{L} \cos n_x + \mathfrak{M} \cos n_y + \mathfrak{N} \cos n_z) d\omega,$$

taken over an unclosed surface, we shall call the number of magnetic lines of force penetrating this surface, or the boundary of this surface, Further, we shall call

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right)$$

the free volume-density for the interior of a body; and

$$\frac{1}{4\pi} \{ (L_2 - L_1) \cos n_x + (M_2 - M_1) \cos n_y + (N_2 - N_1) \cos n_z \}$$

the free surface-density of the magnetism at the surface of separation of two bodies. The distinction between conductors and non-conductors here disappears; for the equations (9<sub>a</sub>) contain no terms corresponding to the  $u, v, w$  of equations (9<sub>b</sub>). With respect to true magnetism all bodies are non-conductors; (p. 218) with respect to free magnetism all bodies may be regarded as conductors.

Let us suppose that a system or a portion of it emerges from the non-magnetic state through purely electromagnetic processes, or can by such processes return to this state. For such a system, or that portion of it, the following equations obtain, viz. —

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} = 0$$

for the interior of the bodies; and

$$(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\cos n_x + (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\cos n_y + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\cos n_z = 0$$

for the surface of separation of heterogeneous bodies. These are supplementary to the general equations as consistent stipulations respecting the possible initial conditions.

### 11. Conservation of Energy

Let  $S$  denote the electromagnetic energy of a volume  $\tau$ , which is bounded by the surface  $\omega$ . We can calculate the variation of  $S$  by multiplying all the equations (9<sub>a</sub>) and (9<sub>b</sub>) by  $(1/4\pi A)d\tau$ , then multiplying them separately in order by  $L, M, N, X, Y, Z$ , adding all together, and integrating over the volume  $\tau$ . We obtain

$$(11_a) \left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{4\pi A} \int \{ (NY - MZ) \cos n_x + (LZ - NX) \cos n_y \\ &\quad + (MX - LY) \cos n_z \} d\omega - \int (uX + vY + wZ) d\tau. \end{aligned} \right.$$

If we extend the space  $\tau$  over a complete electromagnetic system, *i.e.* as far as a surface at which the forces vanish, then our equation becomes

$$\frac{dS}{dt} = - \int (uX + vY + wZ) d\tau.$$

The conservation of energy accordingly requires that in every system which is not subjected to external actions, an amount of energy corresponding to the integral on the right-hand side should make its appearance per unit time in other (p. 219) than electromagnetic form. This requirement is

satisfied by experience, which further teaches us that each separate volume-element  $d\tau$  furnishes towards the total amount of the transformed energy the quantity

$$(uX + vY + wZ)d\tau,$$

and shows us in what form this energy makes its appearance. Or rather, to speak accurately, experience does not show that this is true in all cases, but provisionally in the following special cases only. According to both theory and experience, the amount of energy which appears per unit time and per unit volume in the interior of a homogeneous isotropic conductor takes the form

$$\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{\lambda}(u^2 + v^2 + w^2).$$

It is always positive and represents a development of heat — the Joule effect. At the boundary between two homogeneous isotropic bodies, the amount of energy per unit volume that appears in the transition-layer takes the form

$$uX' + vY' + wZ';$$

hence, by integration over the whole thickness of the transition-layer, it follows that the quantity of energy which appears per unit of surface at the boundary amounts to

$$(u \cos n_x + v \cos n_y + w \cos n_z) \cdot \phi_{1,2},$$

which expression is also confirmed by experience. This expression may be either positive or negative; it may correspond either to an appearance or a disappearance of foreign forms of energy. Either the transformed foreign energy is heat in this case as well—the Peltier effect; in which case we denote the effective electromotive forces as thermoelectric. Or else chemical energy as well as heat is transformed; in which case we denote the forces as electrochemical. Let us now consider any limited portion of our system and calculate for it the increase of its total energy, *i.e.*, of the quantity

$$\frac{dS}{dt} + \int (uX + vY + wZ)d\tau.$$

In accordance with what has been stated, we find that this (p. 220) increase is equal to an integral taken over the surface of the space. The variation of the stock of energy in this (and therefore in any) space will therefore be correctly calculated if we assume that the energy enters after the manner of a substance through the surface; and in such quantity that through every such surface the amount



$$\frac{1}{4\pi A} \{ (NY - MZ) \cos n_x + (LZ - NX) \cos n_y + (MX - LY) \cos n_z \}$$

enters per unit of surface. A geometrical discussion of this expression shows that our assumption is identical with the statement that the energy moves everywhere in a direction perpendicular to the directions of the magnetic and electric forces, and in such amount that in this direction a quantity equal to the product of the two forces, the sine of the enclosed angle, and the factor  $1/4\pi A$ , passes through unit surface per unit time. This is Dr. Poynting's highly remarkable theory on the transfer of energy in the electromagnetic field.<sup>1</sup> In examining its physical meaning we must not forget that our analysis of the surface-integral into its elements was hypothetical, and that the result thereof is not always probable.

If a magnet remains permanently at rest in presence of an electrified body, then in accordance with this result the energy of the neighbourhood must find itself in a state of continuous motion; going on, of course, in closed paths. In the present state of our knowledge respecting energy there appears to me to be much doubt as to what significance can be attached to its localisation and the following of it from point to point. Considerations of this kind have not yet been successfully applied to the simplest cases of transference of energy in ordinary mechanics; and hence it is still an open question whether, and to what extent, the conception of energy admits of being treated in this manner.<sup>2</sup>

## 12. Ponderomotive Forces

The mechanical forces, which we perceive between ponderable bodies in the electromagnetically stressed field, we regard (p. 221) as the resultants of mechanical pressures which are excited by the existence of electromagnetic stresses in the ether and in other bodies. According to this view the mechanical forces which act upon a ponderable body are completely determined by the electromagnetic state of its immediate neighbourhood; and it need not be considered what causes at a distance may have led up to this state. We further assume that the presupposed pressures are of such a kind that they cannot give rise to any resultants which would tend to set the interior of the ether itself in motion. Without this hypothesis our system would necessarily be incorrect, or at least incomplete; for without it we could not in general speak at all of electromagnetic forces in the ether at rest. It necessarily follows from this hypothesis that the forces, under observation, acting upon ponderable bodies, must satisfy the principle of the equality of action and reaction.

The question now is — Whether pressures can be specified answering these requirements, and capable of producing the resultants which are actually observed? Maxwell, and, in a more general form, von Helmholtz have described forms of pressures which satisfy all the requirements of statical

---

<sup>1</sup> J. H. Poynting, *Phil. Trans.* 2, p. 343, 1884.

<sup>2</sup> [See Note 31 at end of book.]

and stationary states. But these pressures, if assumed to obtain for the general variable state, would set the ether itself in motion. We therefore assume that the complete forms have not been discovered, and, avoiding any definite statements as to the magnitude of the pressures, we shall rather deduce the ponderomotive forces with the aid of the hypotheses already stated, of the principle of the conservation of energy, and of the following fact derived from experience: — If the ponderable bodies of an electrically or magnetically excited system, which always remains indefinitely near to the statical condition, are displaced with reference to one another, and if at the same time the amount of true electricity and of true magnetism in each element of the bodies remains invariable and behaves as if attached to the element, then the mechanical work consumed in the displacement of the bodies finds its only compensation in the increase of the electromagnetic energy of the system, and is therefore equal to this latter.<sup>1</sup>

It still remains an open question whether forms of pressure can be specified which satisfy, generally and precisely, the (p. 222) requirements which we have laid down. If this is not the case, our body of hypotheses contains an intrinsic contradiction which must be removed by correcting one or more of these hypotheses. But at all events the necessary amendments are of such a kind that their effect would not make itself felt in any of the phenomena hitherto observed. And it must be pointed out that if there is here something lacking in our theory, it is not a defect in the foundations of the theory, but in parts of the superstructure. For, from our point of view, the mechanical forces excited are secondary consequences of the electromagnetic forces. We could discuss the theory of the latter without even mentioning the former; as indeed we have excluded from the discussion all other phenomena of minor importance which result from the electromagnetic state.

## B. DEDUCTION OF THE PHENOMENA FROM THE FUNDAMENTAL EQUATIONS

We divide the phenomena represented by our equations into statical, stationary, and dynamical. In order that a phenomenon may rank as statical or stationary, it is necessary that it should not determine any variations of the electric and magnetic forces with time, *i.e.*, that the left-hand sides of the equations (9<sub>a</sub>) and (9<sub>b</sub>) should vanish. Furthermore, in order that a phenomenon may rank as statical, it is also necessary that it should not be accompanied by changes in time at all, and hence, more especially, that it should not determine any permanent change of energy into other forms. The sufficient and necessary condition for this is that the quantities  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , in equations (9<sub>a</sub>) and (9<sub>b</sub>) should also vanish.

### Statical Phenomena

---

<sup>1</sup> [See Note 32 at end of book.]

If in the equations (9<sub>a</sub>) and (9<sub>b</sub>) the left-hand sides and also the quantities  $u, v, w$ , vanish, the system splits up into two mutually independent systems, of which one contains only the electric forces and the other only the magnetic forces. We thus get two groups of problems, of which one is called electrostatics, and the other might be called magnetostatics.

(p. 223)

### 13. *Electrostatics*

In this section we shall disregard the occurrence of electromotive forces; for if these admit of the existence of the statical state at all, their action is too weak to come into consideration in the problems which are of interest. In conductors, accordingly, in which the quantities  $A$  do not vanish, the forces  $X, Y, Z$  must vanish. In non-conductors the equations(9<sub>a</sub>) take the form

$$(13_a) \quad \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0.$$

Hence the forces possess a potential  $\phi$ , and can be put equal to the negative differential coefficient of this potential. Since the forces are everywhere finite,  $\phi$  is everywhere continuous; it can therefore continue right through the conductors, and is then to be regarded as constant within these. At a surface of separation the differential coefficients of  $\phi$  tangential to the separating surface continue through it without discontinuity. Again, if  $e_f$  denote the volume-density of the free electricity, according to section (10) the potential  $\phi$  satisfies everywhere in space the equation  $\Delta\phi = -4\pi e_f$ . In free ether this assumes the form  $\Delta\phi = 0$ ; and after suitable transformation for the surface of separation between heterogeneous bodies it gives the condition

$$\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_2 - \left(\frac{d\phi}{dn}\right)_1 = -4\pi e_f$$

where  $e'_f$  denotes the surface-density of the free electricity. From all these conditions it follows that the value of  $\phi$ , within an arbitrary constant, is definite and equal to  $\int (e_f r) d\tau$ , the integral being extended over the whole space with due regard to the surfaces of separation. Thus, when the potential and the forces are distributed in the same way in different non-conductors, the free electricities are the same. But the corresponding quantities of true electricity are different, and for the interior of two homogeneous non-conductors they are in the ratio of the specific inductive capacities. Restricting ourselves for the moment to isotropic bodies, the condition (p. 224) that the density of the true electricity in the interior of the non-conductors should have given values  $e_o$ , is expressed by the equation

$$\frac{d}{dx}\left(\epsilon\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\epsilon\frac{d\phi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\epsilon\frac{d\phi}{dz}\right) = -4\pi e_w,$$

which at the boundary of two isotropic bodies assumes the form

$$\epsilon_2\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_2 - \epsilon_1\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_1 = -4\pi e'_w,$$

where  $e'_w$  denotes the surface-density of the true electricity.

Let us now direct our attention to the stock of energy in an electrostatic system. We obtain this successively in the forms

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z)d\tau &= -\frac{1}{8\pi}\int\left(\mathfrak{X}\frac{d\phi}{dx} + \mathfrak{Y}\frac{d\phi}{dy} + \mathfrak{Z}\frac{d\phi}{dz}\right)d\tau \\ &= \frac{1}{8\pi}\int\phi\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \frac{1}{2}\int\phi e_w d\tau = \frac{1}{2}\int\int\frac{e_w e'_f}{r}d\tau d\tau. \end{aligned}$$

The integrations are here supposed to extend over all space in which electrical stresses exist, and therefore, up to the boundaries where the stresses vanish, and the suitable transformation of the integrals at the bounding surfaces is implicitly assumed. When any motion of the ponderable bodies takes place, and the amounts of true electricity attached to the elements of these bodies remain constant, then, according to section (12), the increase in the value of any one of these expressions is equal to the work done by the mechanical forces in this motion. Hence, if our system consists of two quantities of electricity  $E_1$  and  $E_2$ , separated by the ether and at a distance  $R$  apart which is very great compared with their own dimensions, and if their distance apart increases by an amount  $dR$ , the electric energy of the space decreases by an amount

$$\frac{1}{2}(E_1 E_2 + E_2 E_1)\frac{dR}{R^2}.$$

Thus the expression  $E_1 E_2 / R^2$  represents the mechanical force with which the two electricities tend to move apart. (p. 225) Coulomb's law, which, in the older theories form the starting point of every discussion, here makes its appearance as a remote final result.

With regard to the general determination of the ponderomotive forces, we must here content ourselves with the following remarks:—The last two expressions obtained for the energy are just those whose variations represent the work done by the motion of bodies in ordinary electrostatics. Hence it follows that from the variations of these expressions we can calculate the values of those same forces

which are the starting point of ordinary electrostatics and are tested by experiment. In particular, it may be shown that an element of a body which contains a quantity  $e$  of true electricity is acted upon by the mechanical force-components  $eX$ ,  $eY$ ,  $eZ$ . We thus return to the same statements by means of which we first introduced the electric forces.

#### 14. *Magnetostatics*

The equations which connect the components of statical magnetic forces are the same as those which obtain between the components of statical electric forces. Hence all the statements in the preceding section may, with the necessary changes of notation, be repeated here. And if, nevertheless, the magnetic problems of interest are still distinct mathematically from the electrostatic problems, this arises from the following causes: —

(1) The class of bodies known as conductors is here wanting.

(2) In no bodies, excepting those which exhibit permanent or remanent magnetism, does true magnetism appear. Hence in the interior of such bodies, provided they are isotropic, the magnetic potential  $\psi$  must necessarily and always satisfy the equation

$$\frac{d}{dx} \left( \mu \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{d\psi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( \mu \frac{d\psi}{dz} \right) = 0,$$

which at the boundary between two such bodies becomes,

$$\mu_2 \left( \frac{d\psi}{dn} \right)_2 - \mu_1 \left( \frac{d\psi}{dn} \right)_1 = 0.$$

(p. 226) The equations which apply to the interior and the boundaries of crystalline bodies are somewhat more complicated, but can easily be given; these equations have to be considered in discussing the phenomena of the so-called magnet-crystallic force.

(3) The specific inductive capacity of all known bodies is greater than unity; on the other hand, the magnetic permeability of many bodies is less than unity. We call such bodies diamagnetic, and all others paramagnetic. The free magnetic density at the surface of an isotropic body bounded by empty space is equal to  $(1 - \mu)$  times the force in the interior of the body normal to the surface. The sign of the surface-magnetism (*Belegung*) of a diamagnetic body is therefore opposite to that of a paramagnetic body when the sense of the force is the same.

The study of static magnetism further acquires a peculiar aspect, owing to the fact that iron and steel, which are the most important substances in connection with magnetic phenomena, do not fit in at all well with the theoretical treatment. These substances exhibit permanent and remanent magnetism; hence the polarization of the ponderable material is here partly independent of the prevailing force, and therefore the magnetic state cannot be completely defined by a single directed magnitude. Again, the relations between the force and the disturbances produced by it are not linear; so that, for a double reason, our theory does not include these bodies entirely within its scope. In order to avoid excluding them entirely from consideration, we replace them by the two ideal substances which approximate most nearly to them—perfectly soft iron and perfectly hard steel. We define the first as a substance which obeys our equations, and for which the value of  $\mu$  is very large. We attain a nearer approximation by giving  $\mu$  different values according to the problem under consideration. We define perfectly hard steel as a substance which obeys our equations, whose magnetic permeability is unity, in whose interior, true magnetism can exist distributed in any way, provided always that the total quantity of true magnetism existing in any such piece of steel does not differ from zero.

### Stationary States

The same conditions hold good for the state of stationary disturbances in non-conductors as for the static condition; in (p. 227) conductors, which for the sake of simplicity we shall assume in this section to be isotropic, the equations (9<sub>a</sub>), (9<sub>b</sub>), (9<sub>c</sub>), which here come under consideration, take the form

$$(15_a) \begin{cases} \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0, \\ \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0, \\ \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0; \end{cases} \quad (15_b) \begin{cases} \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi Au, \\ \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} = 4\pi Av, \\ \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} = 4\pi Aw. \end{cases}$$

$$(15_c) \quad u = \lambda(X - X'), \quad v = \lambda(Y - Y'), \quad w = \lambda(Z - Z').$$

Differentiating equations (15<sub>b</sub>) with respect to  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectively, and adding, we get

$$(15_d) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

which equation, at surfaces where the currents vary abruptly, takes the form

$$(15_e) (u_2 - u_1) \cos n_x x + (v_2 - v_1) \cos n_y y + (w_2 - w_1) \cos n_z z = 0.$$

Combining equations (15d) and (15e) with equations (15a) and (15c), we obtain a system which contains only the electric forces. This can be treated without regard to the magnetic forces, and gives us the theory of current-distribution. If the components  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , of the current are found, the treatment of the equations (15b) further gives us the magnetic forces exerted by these currents.

### 15. Distribution of Steady Currents

It appears from equations (15a) that, in the interior of the conductor through which a current is flowing, the forces can also be represented as the negative differential coefficients of a function  $\phi$ , the potential, which is determined by the following condition, which must obtain everywhere: —

$$(15_f) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( \lambda \frac{d\phi}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( \lambda \frac{d\phi}{dz} \right) &= - \frac{d}{dx} (\lambda X') \\ &- \frac{d}{dy} (\lambda Y') - \frac{d}{dz} (\lambda Z'). \end{aligned} \right.$$

(p. 228) At the surface separating two heterogeneous conductors this equation takes the form

$$(15_i) \left\{ \begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= \int (X \cos n_x + Y \cos n_y + Z \cos n_z) dn, \\ &= \int (X' \cos n_x + Y' \cos n_y + Z' \cos n_z) dn, \\ &= \phi_{1,2}. \end{aligned} \right.$$

These conditions together determine  $\phi$ , definitely within a constant which remains dependent upon the conditions outside the conductor. For homogeneous conductors the equations (15f) to (15i) assume the simpler forms —

$$15_k) \left\{ \begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \text{ for the interior of the conductor,} \\ \lambda_1 \left( \frac{d\phi}{dn} \right)_1 &= \lambda_2 \left( \frac{d\phi}{dn} \right)_2 \text{ for the boundary between two con-} \\ &\text{ductors,} \\ \frac{d\phi}{dn} &= 0 \text{ for the boundary adjoining a non-conductor,} \\ \phi_1 - \phi_2 &= \phi_{1,2} \text{ at a bounding surface where electro-} \\ &\text{motive effects occur.} \end{aligned} \right.$$

The equations thus obtained admit of immediate application to problems on current-distribution in bodies of three dimensions. Their application to lamellar conductors or to linear conductors is easy, and gives the definition of resistance, Ohm's law for closed circuits, Kirchhoff's laws for branched circuits, as well as the other laws relating to the distribution of steady currents.

(p. 229)

### 16. Magnetic Forces of Steady Currents

In order to determine the forces L, M, N, produced by the current-components  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , which are now known, we introduce as subsidiary magnitudes the so-called components of the vector-potential, putting

$$U = \int \frac{u}{r} d\tau, \quad V = \int \frac{v}{r} d\tau, \quad W = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

The integrals are to be extended over the whole space; thus, it follows from the conditions of the steady state that

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

We now put

$$(16_a) \left\{ \begin{array}{l} L = A \left( \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right), \quad M = A \left( \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right), \\ N = A \left( \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right). \end{array} \right.$$

These quantities L, M, N, are solutions of equations (15<sub>b</sub>), and satisfy the equation

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0.$$

If, therefore, the forces actually present differ from these, the differences between the two still satisfy the conditions for the forces of static magnetism, and may be regarded as arising from these latter; this, however, does not exclude the supposition that the magnetism itself is due to currents. But if no static magnetism is present at all, the formulæ above given represent completely the magnetic forces present.



If we have only to deal with linear conductors, in which the current  $i$  flows, then the expressions  $u d\tau$ ,  $v d\tau$ ,  $w d\tau$ , in the quantities  $U$ ,  $V$ ,  $W$  are replaced by the expressions  $idx$ ,  $idy$ ,  $idz$ , where  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , are the projections of the element  $ds$  of the circuit on the three axes; and the integrations must then be taken round all the circuits. Suppose we wish to regard the magnetic forces of the whole current as the sum of the actions of the separate current-elements. In order (p. 230) to simplify the formulæ, let us suppose the element to be at the origin and the point  $x'y'z'$  to be in the  $xy$ -plane; then analysis of our integrals, which, as far as its results are concerned, is admissible, gives for the action of the current-element  $idx$  upon the point  $x'y'z'$  —

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = Aidx \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} = -\frac{Aidx}{r^2} \cdot \frac{y'}{r},$$

which formulæ contain the expression of Ampere's rule and the Biot-Savart law.

Wherever  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , vanish, *i.e.*, everywhere outside the conductor in which the current flows, the values of the forces must in accordance with equations (15<sub>b</sub>) possess a potential  $\Psi$ , to whose negative differential coefficients we can equate them. If the forces arise from only a single closed linear circuit, this potential can be expressed in the form

$$(16_b) \quad \Psi = -Ai \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega + \text{const.}$$

where  $d\omega$  denotes the element of any surface through the circuit,  $n$  the normal to this surface, and where the integration is extended over the whole of the surface bounded by the circuit. We here, regard as positive that side of the surface from which the current appears to flow in the direction in which the hands of a clock move. For the negative differential coefficients of the above expression can in all cases be brought, by known methods of transforming integrals, into the forms found for  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Except in the circuit itself these differential coefficients are therefore everywhere finite and continuous; and, even if the integral contained in  $\Psi$  becomes discontinuous at the surface  $\omega$ , the necessary continuity can always be conferred upon  $\Psi$  itself if we regard the constant contained in it as having an infinite number of values, and employ a value varying by  $4\pi Ai$  whenever we pass through the surface  $\omega$ . The potential itself thus attains an infinite number of values, and changes in value by  $4\pi Ai$  each time we return to the same point after passing round the circuit.

Various interpretations can be assigned to the integral (p.231) which occurs in  $\Psi$ . In the first place, it can be regarded as the potential due to a magnetic shell. By following out this conception we arrive at Ampere's theory of magnetism. Again, we may, with Gauss, regard the value of this integral at a

given point as the spherical angle which the circuit subtends at this point. From this, by an easy transition, we arrive at the following statement: — For any given point this integral represents the number of lines of force which proceed from a unit pole placed at the point and are embraced by the circuit. We may supplement this by applying the following statement to the potential itself (including its manifoldness): —The difference between its values at two points is equal to the product of  $Ai$  into the number of lines of force which cut the circuit in a definite direction when an unit pole is moved in any manner from the one point to the other.

From our standpoint the last interpretation is the most suitable; it also allows us, with the aid of sections (12) and (14), to deduce the following conclusions: — Firstly, the mechanical work which must be done in moving a magnet-pole, or a system of unchangeable magnetism, in the neighbourhood of a current whose strength is kept constant, is equal to the number of lines of force of the magnet-pole or magnetic system which cut the circuit in a definite direction, multiplied by the current and the constant  $A$ . Secondly, the mechanical work which must be done in moving a constant current in a magnetic field is equal to the number of lines of force which are cut by the circuit during the motion, multiplied by the current and the constant  $A$ . Lastly, and in particular, the mechanical work which must be done in moving a constant current 1 in the neighbourhood of a constant current 2, is equal to the number of lines of force proceeding from the circuit 2 which are cut by the circuit 1 during the motion, multiplied by the current in 1 and by the constant  $A$ . It is also equal to the number of lines of force proceeding from the circuit 1 which cut the circuit 2 during the motion, multiplied by the current in 2 and by the constant  $A$ . Both expressions lead to the same result; we can prove this by representing the product of the current in the one circuit and the number of lines of force from the other circuit which pass through it, by an expression which is symmetrical with reference to both. For let the (p. 232) symbols  $i, ds$  refer to the circuit 1; and the symbols  $i', ds', U', V', W', L', M', N'$ , refer to the circuit 2. Then the product of  $Ai$  into the number of lines of force from 2 which pass through 1 is equal to

$$\begin{aligned}
 & Ai \int (L' \cos n_x + M' \cos n_y + N' \cos n_z) d\omega \\
 = & A^2 i \int \left\{ \left( \frac{dV'}{dz} - \frac{dW'}{dy} \right) \cos n_x + \left( \frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz} \right) \cos n_y \right. \\
 & \left. + \left( \frac{dU'}{dy} - \frac{dV'}{dx} \right) \cos n_z \right\} d\omega \\
 = & -A^2 i \int (U' \cos s_x + V' \cos s_y + W' \cos s_z) ds \\
 = & -A^2 i i' \iint \frac{\cos s_x \cos s'_x + \cos s_y \cos s'_y + \cos s_z \cos s'_z}{r} ds ds' \\
 = & -A^2 i i' \iint \frac{\cos \epsilon}{r} ds ds',
 \end{aligned}$$

where  $\epsilon$  denotes the angle between the two current-elements. The expression obtained is symmetrical with respect to both circuits. We know that in fact the variations of this expression — Neumann's

potential of the one circuit upon the other multiplied by  $A^2 ii'$  — gives the work required for the relative displacement of closed currents, and hence, the ponderomotive forces which exist between the currents when at rest. We also know that this statement contains everything that can with certainty be asserted respecting the ponderomotive forces which arise between currents.

We shall next calculate the magnetic energy of a space in which the stationary current-components  $u, v, w$ , and the unchangeable magnetic densities  $m$  are distributed, assuming the restriction that no magnetizable bodies are present in the space. If  $\Psi$  now represents the potential of the magnetisms  $m$ , we obtain the energy successively in the forms —

$$(16_c) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau \\ & = \frac{A}{8\pi} \int \left\{ L \left( \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} - \frac{1}{A} \frac{d\Psi}{dx} \right) + M \left( \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} - \frac{1}{A} \frac{d\Psi}{dy} \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + N \left( \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} - \frac{1}{A} \frac{d\Psi}{dz} \right) \right\} d\tau \end{aligned} \right.$$

(p. 233)

$$(16_c) \left\{ \begin{aligned} & = \frac{A}{8\pi} \int \left\{ U \left( \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right) + V \left( \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + W \left( \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} \right) \right\} d\tau \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{8\pi} \int \Psi \left( \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} \right) d\tau \\ & = \frac{1}{2} A^2 \int (Uu + Vv + Ww) d\tau + \frac{1}{2} \int \Psi m d\tau, \\ & \text{or, in the case of linear currents—} \\ & = \frac{1}{2} A^2 \iint \frac{ii' \cos \epsilon}{r} ds ds' + \frac{1}{2} \int \Psi m d\tau, \end{aligned} \right.$$

where, in the first part of the last form, the integration is to be carried out with respect to both  $ds$  and  $ds'$ , and is to include all currents present. It is clear from this last form that the displacement of unchangeable magnets with respect to unchangeable currents does not alter the magnetic energy of the space. Hence the mechanical work which is done in such a displacement does not find its compensation in the variation of the magnetic energy of the space, as it does in the case of the displacement of unchangeable magnets among themselves; we must account in some other way for the work which has been done. It further appears from the same formula that the relative displacement of currents which are maintained constant does determine a change in the energy of the space, which is equal to the absolute value of the work done. But when we pay due regard to the signs, we see that this change

does not take place in such a sense that it can be regarded as the compensation for the lost mechanical energy, but in the opposite sense. Here again, then, we have to account for double the amount of work which the mechanical forces do in the relative displacement of the circuits. We shall return to this at the end of the following section.

### *Dynamical Phenomena*

From among the infinite number of possible forms of the variable state, comparatively few groups of phenomena have hitherto fallen under observation. We shall refer to these groups without attempting any exhaustive and systematic classification of the subject.

(p. 234)

#### *17. Induction in closed circuits*

In accordance with equations (9<sub>a</sub>) electric forces must necessarily be present in a varying magnetic field. In general, these forces must be very weak, for they contain the very small factor A; on this account they can only be detected through the currents which they excite in closed circuits, or through their cumulative action in very long linear circuits which are closed to within a small fraction of their lengths. Hence the effects which can be experimentally measured invariably give us only the integral effect of the electric force in a closed circuit, *i.e.*, the integral  $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$  taken along a looped line. According to a known method of transforming integrals, which we have already used, this line-integral is equal to the surface-integral

$$\int \left\{ \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n_x + \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n_y + \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n_z \right\} d\omega,$$

taken over any surface  $\omega$  bounded by the line in question. Applying equations (9<sub>a</sub>) this expression becomes equal to

$$A \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{E} \cos n_x + \mathfrak{M} \cos n_y + \mathfrak{N} \cos n_z) d\omega.$$

We may express this in words as follows: — The electromotive force which manifests itself in a closed circuit is equal to the variation per unit time of the number of magnetic lines of force which traverse the circuit multiplied by A. In particular, if the induction arises from a closed variable current, and if it is assumed that no magnetizable bodies are present, then according to the results of the

previous section the induced electromotive force is equal to the product of the Neumann's potential of the two circuits on one another and the variation per unit time of the inducing current, multiplied by  $A^2$ . These laws — of which the first is the more general — with their consequences embrace all the phenomena of induction which have been actually observed in the case of conductors at rest.

Induction in moving conductors lies beyond the range to which the present dissertation is restricted. But as far as linear conductors are concerned, the transition from the case of (p. 235) induction in conductors at rest can be made by the following statement: — Whether the magnetic field in the immediate neighbourhood of a closed circuit changes in consequence of the motion of ponderable bodies, or in consequence of purely electromagnetic changes of state, the electromotive force produced in the closed circuit is the same, provided the change in the magnetic field in its immediate neighbourhood is the same. In accordance with this and the previous statements, the induced electric force in a conductor in motion is equal to the number of lines of force which are cut by the conductor in a definite direction per unit of time, multiplied by  $A$ . The product of this electric force and of the current in the moving conductor gives, according to section (11), the thermal or chemical work done by induction in the conductor. It follows from the results of the preceding section, if we pay due regard to sign, that this is equal to the mechanical work which must be done by the external forces acting upon the circuit. Hence, if a current of constant strength is maintained in a circuit, and this circuit is moved towards a fixed magnet, the thermal and chemical energy developed in the circuit accounts for the mechanical work done; while the magnetic energy of the system remains constant. But, on the other hand, if this circuit is moved towards another in which a constant current is maintained, the larger amount of thermal and chemical energy developed in the one through the motion accounts for the mechanical work done; and the same extra amount of energy which appears in the other circuit accounts for the diminution in the magnetic energy of the field. Or, to speak more accurately, the sum of the former amounts of energy balances the sum of the latter. This settles the point referred to at the end of section (16).

### **18. *Electromagnetics of Unclosed Currents***

With regard to the phenomena which are possible, this is the richest region of all; for it includes all those problems which we cannot apportion elsewhere as special cases. But as far as actual experience is concerned, it is a region which hitherto has been but slightly explored. The oscillations of unclosed induction-circuits, or of discharging Leyden jars, can be (p. 236) treated with sufficient approximation according to the laws of the preceding section; and so far, only the electric waves and oscillations of short wave-length, which have been discussed in the earlier papers, strictly belong here. With regard to the theoretical treatment of this section we must therefore refer to these earlier papers—pointing out, however, that the splitting up of the electric force into an electrostatic and an electromagnetic part does not in these general problems convey any physical meaning which can be

clearly conceived, nor is it of any great mathematical use; so that, instead of following earlier methods of treatment, it will be expedient to avoid it.

### **19. Optical, Phenomena in Isotropic Bodies**

We include in optics those electromagnetic disturbances which are purely periodic in time, and whose period does not exceed a very small fraction, say the billionth ( $10^{-12}$ ) part, of a second. By none of the means which are at our disposal for detecting such disturbances can we recognise the magnetic and electric forces as such; what we are able to detect are simply the geometrical relations according to which the existing disturbance is propagated in different directions with different intensities. Hence the mathematical representation of the phenomena may also be confined to following the propagation of one of the two kinds of force, after eliminating the opposite kind; and it is immaterial which of the two is chosen for consideration. If we restrict ourselves to homogeneous isotropic non-conductors and eliminate in the one case the electric, in the other the magnetic, force-components, we obtain from equations (4<sub>a</sub>) and (4<sub>b</sub>) the following equations: —

(p. 237) The solutions of these, assuming that the disturbances are purely periodic, are always solutions of the equations (4<sub>a</sub>) and (4<sub>b</sub>) as well. From each of the two systems of equations (19<sub>a</sub>) and (19<sub>b</sub>) it can be seen that transverse waves are possible, and that longitudinal waves are impossible; each of the two systems gives for the velocity of the possible waves the value

$$1/A \sqrt{\epsilon\mu};$$

from each of the two systems the phenomena of rectilinear propagation, of diffraction, of the interference of natural and of polarized light can be deduced, and the different kinds of polarization can be understood. By returning to equations (4<sub>a</sub>) and (4<sub>b</sub>) it can be shown that the simultaneous directions of the electric and the magnetic force at any point of a plane wave are invariably perpendicular to one another.

Suppose that the surface of separation of two homogeneous isotropic bodies coincides with the  $xy$ -plane. In accordance with section (8), and bearing in mind that we are dealing only with periodic disturbances, the following conditions obtain at this surface of separation

$$(19_c) \begin{cases} L_1 = L_2, \\ M_1 = M_2, \\ \mu_1 N_1 = \mu_2 N_2; \end{cases} \quad (19_d) \begin{cases} X_1 = X_2, \\ Y_1 = Y_2, \\ \epsilon_1 Z_1 = \epsilon_2 Z_2. \end{cases}$$

Each of these systems of limiting equations, together with the corresponding equations for the interior of both bodies, gives the laws of reflection, of refraction, of total reflection, in fact, the fundamental laws of geometrical optics. From each of them it follows that the intensity of reflected and refracted waves is dependent upon the nature of their polarization, and that this dependence, as well as the retardation of phase of the totally reflected waves, is in accordance with Fresnel's formulæ. If we deduce these formulæ from the equations of the electric forces (19<sub>b</sub>) and (19<sub>d</sub>), it will be found that the method of development corresponds with the method of deducing these formulæ as given by Fresnel himself. If we start from the equations of the magnetic force (19<sub>a</sub>) and (19<sub>c</sub>), we approach the path by which F. Neumann arrived at Fresnel's equations. From our more general (p. 238) standpoint we cannot only see from the start that both paths must lead to the same goal, but we can also recognize that the two are equally satisfactory. In the actually observed phenomena of reflection the electric and magnetic forces are not completely interchangeable, and the two paths appear to be different. This is because the magnetic permeabilities are almost the same and equal to unity for all bodies which come under consideration, whereas the specific inductive capacities differ considerably; and hence the optical behaviour of bodies is chiefly determined by their electrical properties.

If the  $xy$ -plane forms the boundary between our nonconductor and a perfect conductor, the following equations obtain in this plane: —

$$(19_e) \quad \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

$$(19_f) \quad \mathbf{X} = \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{0}.$$

From these, together with the corresponding equations for the interior of the non-conductor, it follows that for every angle of incidence and every azimuth of polarization the reflection is total. conductors, the reflection from them may be expected to be of a kind intermediate between total reflection and the reflection from transparent bodies. Inasmuch as metallic reflection occupies such a position, our equations appear adapted for giving a general picture of metallic reflection as well. Up to the present, however, investigation does not enable us to state how far such a representation, by suitable choice of the constants, can be extended into details.

It has already been pointed out in the first section that the phenomena of dispersion require the introduction of at least two electric or two magnetic quantities, and that they therefore lie outside the limits of our present theory.

## *20. Optics of Crystalline Bodies*

We shall confine our attention to optical phenomena in the interior of a homogeneous, completely transparent crystal, — in which we further assume that the axes of symmetry of the (p. 239) electric and the magnetic energy coincide. Let the co-ordinate axes be parallel to these common axes of symmetry, and, for the sake of simplicity, let us write

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \text{ instead } \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}.$$

Equations (5<sub>a</sub>) and (5<sub>b</sub>), which here come under consideration, now take the form

$$(20_a) \begin{cases} A\mu_1 \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu_2 \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu_3 \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (20_b) \begin{cases} A\epsilon_1 \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A\epsilon_2 \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A\epsilon_3 \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

These equations are integrated by assuming that the light consists of plane waves of plane-polarized light, corresponding to the following statements: —The magnetic force is perpendicular to the electric polarization, and the electric force is perpendicular to the magnetic polarization. In general, the direction of both forces does not coincide with the wave-plane; the direction of both polarizations lies in the wave-plane. Hence, the direction which is perpendicular to both polarizations is the wave-normal; the direction which is perpendicular to both forces is the direction in which, according to section (11), the energy is propagated; in optics it is called the ray. To every given position of the wave-normal there correspond in general two possible waves of different polarizations, different velocities, and different positions of the corresponding rays. If we suppose that at any given instant plane waves starting from the origin of coordinates proceed outwards in all possible directions of the wave-normals, these wave-planes after unit time envelop a surface, the so-called wave-surface. Each single wave-plane touches the wave-surface at a point on the corresponding ray from the origin. The equation to the surface enveloped by the wave-planes is found to be

$$(20_c) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{x^2}{\epsilon_1} + \frac{y^2}{\epsilon_2} + \frac{z^2}{\epsilon_3} \right) \left( \frac{x^2}{\mu_1} + \frac{y^2}{\mu_2} + \frac{z^2}{\mu_3} \right) - \frac{x^2}{\epsilon_1\mu_1} \left( \frac{1}{\epsilon_2\mu_3} + \frac{1}{\epsilon_2\mu_2} \right) \\ & - \frac{y^2}{\epsilon_2\mu_2} \left( \frac{1}{\epsilon_1\mu_3} + \frac{1}{\epsilon_3\mu_1} \right) - \frac{z^2}{\epsilon_3\mu_3} \left( \frac{1}{\epsilon_1\mu_2} + \frac{1}{\epsilon_2\mu_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\mu_1\mu_2\mu_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

(p. 240) The surface of the fourth degree represented by this equation cuts each of the co-ordinate planes in two ellipses. In one of the co-ordinate planes the two ellipses intersect each other in four points — the four conical points (*Nabelpunkte*) of the surface; in the two other co-ordinate planes one of the ellipses surrounds the other; and these statements hold good whatever the values of  $\epsilon$  and  $\mu$  are.



To a very near approximation  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$  for all actual crystals; in this case the general form of the equation reduces to that of Fresnel's wave-surface, and of the two ellipses in which the surface cuts the co-ordinate planes, one reduces to a circle.

It is well known that the explanation of double refraction, of reflection at crystalline surfaces, and many of the interference phenomena observed in crystals are intimately connected with the consideration of the wave-surface and the simpler forms which it assumes in special cases. But other facts, again, in crystallographic optics cannot be mastered by following out the idea of a single electric and a single magnetic directed magnitude; hence, these facts lie outside the present limits of our theory.

In sections (17) to (20) we have completed the enumeration of those cases of the variable of state whose importance has up to the present time given rise to the development of special theories.

## IV

### ON THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF ELECTROMAGNETICS FOR BODIES IN MOTION

(*Wiedemann's Ann. U*, p. 369, 1890)

AN account which I recently published<sup>1</sup> of electromagnetic processes in bodies at rest agreed, as far as the matter was concerned, with Maxwell's theory, but as far as the manner was concerned it aimed at a more systematic arrangement. From the outset the conception was insisted upon, that the electric and magnetic forces at any point owe their action to the particular condition of the medium which fills the space at that point; and that the causes which determine the existence and variations of these conditions are to be wholly sought in the conditions of the immediate neighbourhood, excluding all actions-at-a-distance. It was further assumed that the electric and magnetic state of the medium which fills space could be completely determined for every point by a single directed magnitude for each state; and it was shown that the restriction which lies in this assumption only excluded from consideration comparatively unimportant phenomena. The introduction of potentials into the fundamental equations was avoided.

But the state of the case is different if we explicitly content ourselves with representing electromagnetic phenomena in a narrower sense — up to the extent to which they have hitherto been satisfactorily investigated. We may assert that among the phenomena so embraced there is not one which requires the admission of a motion of the ether independently of ponderable matter within this latter; this follows at once from the fact that from this class of phenomena no hint has been obtained as to the magnitude of the relative displacement. At least this class of electric and magnetic phenomena must be compatible with the view that no such displacement occurs, but that the ether which is hypothetically assumed to exist in the interior of ponderable matter only moves with it. This view includes the possibility of taking into consideration at every point in space the condition of only one medium filling the space; and it thus admits of the question being answered in the affirmative. For the purpose of the present paper, we adopt this view. It is true that a theory built on such a foundation will not possess the advantage of giving to every question that may be raised the correct answer, or even of giving only one definite answer; but it at (p.243) least gives possible answers to every question that

---

<sup>1</sup> See XIII. p. 195.

may be propounded, *i.e.*, answers which are not inconsistent with the observed phenomena nor yet with the views which we have obtained as to bodies at rest.

We therefore assume that at every point a single definite velocity can be assigned to the medium which fills space; and we denote the components of this in the directions of  $x$ ,  $y$ ,  $z$  by  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . We regard these magnitudes as being everywhere finite, and treat them as varying continuously from point to point. Of course, we also admit discontinuous variations, but we regard them as being only the limiting cases of very rapid continuous variations. We further limit each permissible discontinuity by the restriction that it shall in no case lead to the formation of empty spaces. The necessary and sufficient condition for this is that the three differential coefficients  $d\alpha/dx$ ,  $d\beta/dy$ ,  $d\gamma/dz$  should everywhere be finite. Wherever we find tangible matter in space we definitely deduce the values of  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  from the motion of this. Wherever we do not find in the space any tangible matter, we may assign to  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  any arbitrary value which is consistent with the given motions at the boundary of the empty space, and is of the same order of magnitude. We might, for example, give  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  those values which would exist in the ether if it moved like any gas. We further use all the symbols which occur in the preceding paper in the same sense here. We here, regard electric and magnetic force as signs of the condition of the moving matter in the same sense in which we have hitherto regarded them as signs of the conditions of matter at rest. Electric and magnetic polarization we simply regard as a second and equivalent means of indicating the same conditions. We also assign to the lines of force, by which we represent these polarizations, precisely the same meaning.

### ***1. Statement of the Fundamental Equations for Bodies in Motion***

At any point of a body at rest the time-variation of the magnetic state is determined simply by the distribution of the electric force in the neighbourhood of the point. In the case of a body in motion there is, in addition to this, a second (p. 244) variation which at every instant is superposed upon the first, and which arises from the distortion which the neighbourhood of the point under consideration experiences through the motion. We now assert that the influence of the motion is of such a kind that, if it alone were at work, it would carry the magnetic lines of force with the matter. Or more precisely: — Supposing that at any given instant the magnetic state of the substance was represented in magnitude and direction by a system of lines of force; then a system of lines of force passing through the same material points would also represent in magnitude and direction the magnetic state at any other time, if the effect of the motion alone had to be considered. The corresponding statement holds good for the variation which the electric polarization experiences through the motion. These statements suffice for extending to moving bodies the theory already developed for bodies at rest; they clearly satisfy the conditions which our system of itself requires, and it will be shown that they embrace all the observed facts.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> [See Note 38 at end of book.]

In order to represent our ideas symbolically, let us first, during the time-element  $dt$ , fix our attention upon a small surface-element in the interior of the moving matter, which at the beginning of this time-element lies parallel to the  $yz$ -plane, and during the motion is displaced and distorted with the matter. We distribute and draw the magnetic lines of force so that the number of them which penetrates the surface-element at the beginning of the time  $dt$  is  $\mathfrak{L}$ . Everywhere and always  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  will then denote the number of lines of force which traverse a surface-element of equal area parallel to the  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ -planes respectively. The number of lines of force which traverses our particular surface-element now varies owing to several causes; we shall consider separately the amount which each separate cause contributes. In the first place, the number would vary even if the surface-element remained in its original position; this variation amounts to  $(d\mathfrak{L}/dt)dt$ , if  $d\mathfrak{L}/dt$  denotes the rate of variation of  $\mathfrak{L}$  at a point which, with reference to our system of co-ordinates, is at rest. In the second place, since the surface-element is displaced with the velocity  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , to places where other values (p. 245) of  $\mathfrak{L}$  obtain, the rate of variation due to this cause amounts to  $(\alpha d\mathfrak{L}/dx + \beta d\mathfrak{L}/dy + \gamma d\mathfrak{L}/dz)dt$ . In the third place, the plane of the element rotates with velocity  $d\alpha/dy$  about the  $z$ -axis, and with velocity  $d\alpha/dz$  about the  $y$ -axis, and lines of force will be embraced by the element which originally were parallel to it; the amount due to this cause is—  $(\mathfrak{M}d\alpha/dy + \mathfrak{N}d\alpha/dz)dt$ . Finally the surface of the element increases with velocity  $d\beta/dy + d\gamma/dz$ ; and for this cause the number increases by an amount  $\mathfrak{L}(d\beta/dy + d\gamma/dz)dt$ . If the sum of these quantities is equal to zero, there can be no change in the number; we have therefore reckoned up completely all causes of variation, and since all the amounts are very small, their sum represents the total variation. We may also analyze the total variation in another manner which has a more distinct physical significance, *viz.* into the amount which the presence of the electric forces in the neighbourhood, and the amount which the motion would contribute, each by itself and in the supposed absence of the other cause. According to the laws which hold good for conductors at rest, the first amounts to  $(dZ/dy - dY/dz)dt \times 1/A$ ; according to the statement which we have just made, the latter is zero; the first of itself represents the total variation. We equate the two expressions found for the total variation, divide by  $dt$ , multiply by  $A$ , add and subtract the terms  $\alpha d\mathfrak{M}/dy + \alpha d\mathfrak{N}/dz$ , rearrange the terms and thus obtain, after treating similarly the other components of the magnetic force and the components of the electric force, the following system of fundamental equations for bodies in motion: —

$$(1_a) \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{E} - a\mathfrak{M}) - \frac{d}{dz}(a\mathfrak{L} - \gamma\mathfrak{E}) + a \left( \frac{d\mathfrak{E}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \left\{ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{L}) - \frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{E} - a\mathfrak{M}) + \beta \left( \frac{d\mathfrak{E}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \left\{ \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \frac{d}{dx}(a\mathfrak{L} - \gamma\mathfrak{E}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{L}) + \gamma \left( \frac{d\mathfrak{E}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{array} \right.$$

(p. 246)

$$(1_b) \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X} - a\mathfrak{L}) - \frac{d}{dz}(a\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) + a \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u, \\ A \left\{ \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{L} - \beta\mathfrak{Z}) - \frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X} - a\mathfrak{L}) + \beta \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v, \\ A \left\{ \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \frac{d}{dx}(a\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{L} - \beta\mathfrak{Z}) + \gamma \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w. \end{array} \right.$$

which are completed by the linear relations which connect the polarizations and the current-components with the forces. The constants of these relations are to be regarded as functions of the varying conditions of the moving matter, and to this extent as functions of the time as well<sup>1</sup>.

Our method of deducing the equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) does not require that the system of co-ordinates used should remain absolutely fixed in space. We can, therefore, without change of form, transform our equations from the system of co-ordinates first chosen to a system of co-ordinates moving in any manner through space, by taking  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , to represent the velocity-components with reference to the

<sup>1</sup> [See Note 34 at end of book.]

new system of co-ordinates, and referring the constants  $\epsilon, \mu, \lambda, X', Y', Z'$ , which depend upon direction, at every instant to these. From this it follows that the absolute motion of a rigid system of bodies has no effect upon any internal electromagnetic processes whatever in it, provided that *all* the bodies under consideration, including the ether as well, actually share the motion. It further follows from this consideration that even if only a single part of a moving system moves as a rigid body, the processes which occur in this part follow exactly the same course as in bodies at rest. If, nevertheless, the existing motion does exert any influence upon this part, this influence can only arise in those portions of the system in which distortion of the elements occurs, and must be propagated thence into those portions which move (p. 247) after the manner of rigid bodies. If, for example, a solid mass of metal is suddenly displaced in the magnetic field, then, according to our equations, the only direct or simultaneous effect of this disturbance is upon the surface and the neighbourhood of the metallic mass; it here gives rise to electric forces which afterwards produce secondary effects-penetrating into the interior of the mass and giving rise to currents in it.

The equations here stated are in form and intention closely related to those by which von Helmholtz in vol. lxxviii of Borchardt's *Journal* represented the behaviour of the electric and magnetic forces in moving bodies.<sup>1</sup> From this source the notation is partly borrowed. And yet our equations differ from those given by v. Helmholtz not only in form, but also in meaning, at least with regard to such members as have not hitherto been tested by experiment. Maxwell himself does not seem to me to have aimed in his treatise at any systematic treatment of the phenomena in moving bodies.<sup>2</sup> The numerous references which he makes to such phenomena are either confined to approximations, or relate only to cases which do not involve any necessary distinction between the theories of direct and of indirect action.

## *2. The Physical Meaning of the Separate Terms*

Equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) tell us the future value of the polarizations at every fixed point in space or, if we prefer it, in each element of the moving matter, as a definite and determinate consequence of the present electromagnetic state and the present motion in the neighbourhood of the point under consideration. This is the physical meaning of them in accordance with the conception which our system represents. The common conception of the relations expressed by these equations is quite different. It regards the rates of variation of the polarizations on the left-hand side as the cause, and the induced forces on the right-hand side as the (p. 248) consequence thereof. This conception has arisen through the fact that the polarizations and their variations are usually sooner and more clearly known to us than the forces which simultaneously arise; so that, as far as our knowledge goes, the left-hand sides of the equations are prior to the right-hand sides. In the cases which chiefly interest us

---

<sup>1</sup> v. Helmholtz, *Ges. Abhandl.* 1, p. 745; Borchardt's *Journal. f. Mathem.* 78, p. 278, 1874.

<sup>2</sup> [This statement is not quite correct. It does indeed hold good for Maxwell's treatise, to which it refers; but in his paper "On Physical Lines of Force" (*Phil. Mag.*, April 1861) Maxwell has himself given a complete and systematic treatment of the phenomena in moving bodies. Unfortunately, I had not noticed this when writing my paper.]

this conception has indeed very great advantages; but from the general standpoint it has the disadvantage that the forces are not definitely determined by the rates of variation of the polarizations of the opposite kind, but contain terms which are independent of these variations. The common theory gets out of this difficulty by setting these terms as electrostatic or magnetic forces in opposition to the electromagnetic forces which are alone, according to that theory determined by our equations. Although we do not approve of such a separation, and hence do not accept the common conception as to the causal relationship, it is still interesting to show how the partial forces which are introduced in the usual theory are contained in the separate terms of our equations. For this purpose, we split up the forces in the form  $X = X_1 + X_2$ , etc.,  $L = L_1 + L_2$ , etc., and put —

$$(2) \begin{cases} X_1 = A(\gamma M - \beta N), & L_1 = A(\beta Z - \gamma \mathcal{N}), \\ Y_1 = A(a \mathcal{N} - \gamma \mathcal{E}), & M_1 = A(\gamma \mathcal{X} - a \mathcal{Z}), \\ Z_1 = A(\beta \mathcal{E} - a M), & N_1 = A(a \mathcal{N} - \beta \mathcal{X}), \end{cases}$$

We thus obtain for  $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$  equations which result from the equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) for  $X, Y, Z, L, M, N$  by omitting the second and third terms on the left-hand side. Now, the resultant of  $X_1, Y_1, Z_1$  is an electric force which arises as soon as a body moves in the magnetic field. It is perpendicular to the direction of the motion and to the direction of the magnetic lines of force; it is that force which in a narrower sense we are accustomed to denote as the electromotive force induced through motion. But it should be observed that, according to our views, the separation of this from the total force can have no physical meaning; for it would be in opposition to our conception to suppose that the magnetic field within a body could have a motion relative to it. The counterpart to the force  $X_1, Y_1, Z_1$  is the force  $L_1, M_1, N_1$ , which must make itself felt in a non-conductor when the (p. 249) latter is displaced through the lines of force of an electric field; but this is not yet confirmed by experience and is absent from the older electromagnetics. Let us now turn our attention to the resultant of  $L_2, M_2, N_2$ , and suppose the general solutions of the equations containing these quantities to be represented as functions of the quantities

$$u, d\mathcal{X}/dt, a(d\mathcal{X}/dx + d\mathcal{N}/dy + d\mathcal{Z}/dz), \text{ etc.}$$

Let us put these latter quantities in the functions all equal to zero; there still remains a first part of the force which does not owe its origin to electromagnetic causes. Its components necessarily possess a potential; it represents that distance-force which, according to the older view, proceeds from magnetic masses. A second part of the force is given by that part of the functions which vanishes when, and only when,  $u, v, w$ , vanish. It contains the magnetic distance-force which appears to proceed from the actual electric currents. We obtain the whole of the electromagnetic part of the force  $L_2, M_2, N_2$  by replacing in the expression of the second part the quantity  $4\pi Au$  by the quantity

$$4\pi Au + A \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + Aa \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right)$$

and treating  $v$  and  $w$  similarly. This corresponds to the statement that as far as the production of a magnetic distance-force is concerned, an actual current is to be regarded as equivalent in the first place to the variation of an electric polarization, and in the second place to the convective motion of true electricity. The latter part of this statement finds its requisite confirmation in Rowland's experiment.

Finally, let us consider the force  $X_2 Y_2 Z_2$ . We can separate from this force as well a part which is independent of time-variations of the system, which possesses a potential, and which is treated as an electrostatic distance-force. From the residue of the electromagnetic force which remains we can detach a second part, which vanishes when, and only when, the quantities  $d\mathfrak{L}/dt$ ,  $d\mathfrak{M}/dt$ ,  $d\mathfrak{N}/dt$ , vanish. It clearly represents the force of induction which arises from varying magnetic moments, but it also contains in a hidden form that electric force which owes its origin to varying currents. (p. 250) Finally, there remains a third and last part which can be interpreted as an electric force produced by a convective motion of magnetism, and in which must be found the explanation of certain known phenomena of unipolar induction.

These considerations show that we might also have arrived at the system of equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) by summing up the effects of the separate forces required by the older theories, and adding a series of hypothetical terms which can neither be confirmed nor disproved by existing experience. The way which we have followed requires a smaller number of independent hypotheses. We now proceed to deduce from our equations the most important general results.

### ***3. Motion of Magnets and of Electrostatically Charged Bodies***

As independent causes of variation of the electric or magnetic polarization there appear in our scheme first the magnetic or electric forces respectively, and secondly, the motion of material bodies. According to our conclusions in the case of bodies at rest, the first cause produces no displacement of true electricity in non-conductors and no displacement of true magnetism at all. The latter cause of itself produces a displacement of electricity and of magnetism towards the space at rest, but it can cause no displacement towards the matter in motion; for by its motion this matter carries with it the lines of force, and electricity and magnetism may be regarded as the free ends of these lines. Hence, when both causes act together there can be no relative motion of true magnetism with reference to the surrounding matter; nor can there be any such relative motion of true electricity, at any rate in





introduction of these results into such problems enables us to replace the complete, but very complicated, equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) by the equivalent and very simple equations which hold (p. 252) good for statical problems in bodies at rest, and which can be deduced from equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) by equating to zero the velocities and the time-variations at all points of the space. Such a simplification of the statements is not possible without introducing the idea of electricity and of magnetism; and it seems to me that this is the principal reason why these ideas are indispensable in the study of electrostatics and in the representation of magnetic phenomena.

#### *4. Induction in Closed Circuits*

The greatest velocities which we can assign to the surrounding bodies are so small compared with the velocity of light — the reciprocal of which appears as the multiplier of  $\alpha, \beta, \gamma$ , in equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) — that, electromagnetic effects, due purely to motion, can only be investigated with precision in the particular case in which these effects consist in the induction of an electric current in a closed metallic conductor. In order to determine the magnitude of such effects in closed conductors, let us consider any unclosed portion of a surface in the interior of the matter under consideration, and which is displaced with the material particles during the motion. Let  $s$  represent the instantaneous limiting curve of this surface-element. Let  $\zeta'$  denote the number of magnetic lines of force which at any time traverse the surface  $\delta$ . We shall again consider the causes which produce (independently of each other) a variation in  $\zeta'$  as being two — in the first place, the electric forces; and in the second place, the motion of matter. If the first cause alone were at work, the system would be at rest, and so the rate of variation of  $\zeta'$  multiplied by  $A$  would be equal to the integral of the electric force taken around the whole extent of  $s$ ; the integral, viewed from the side of the positive normal, being taken clock-wise. If the motion alone were at work, it would not produce any variation of  $\zeta'$ , for it would carry forward the lines of force traversing the surface  $\delta$  together with this surface itself. Hence in the actual case in which the two causes act together, the integral of the electric force taken in the given sense around any closed curve  $s$  is equal to  $A$  multiplied by the rate of variation of the number of magnetic (p. 253) lines of force which traverse any surface which was originally bounded by the curve  $s$ , but which follows the motion. This law also holds good for the special case — the only one which is important from an experimental point of view — in which the curve  $s$  follows the path of a linear conductor; nor does it become invalid when the motion is sufficiently slow to allow all the states which arise to appear as being steady, and the current as uniform in all parts of the conductor.

To represent this symbolically, let  $n'_x, n'_y, n'_z$ , denote the angle which the normal to the element  $d\delta$ , of the moving surface  $\delta$ , makes at any instant with the axes. Let  $\mathfrak{L}' \mathfrak{M}' \mathfrak{N}'$  be the values of  $\mathfrak{L} \mathfrak{M} \mathfrak{N}$  in this element. Further, let  $d\mathfrak{L}, n_x, n_y, n_z$  denote the values of  $d\delta, n'_x, n'_y, n'_z$  in the original position. We observe that, from purely geometrical considerations, we have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d\omega \cos n',x) &= d\omega \left\{ \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n',x - \frac{d\beta}{dx} \cos n',y - \frac{d\gamma}{dx} \cos n',z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega \cos n',y) &= d\omega \left\{ -\frac{da}{dy} \cos n',x + \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n',y - \frac{d\gamma}{dy} \cos n',z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega \cos n',z) &= d\omega \left\{ -\frac{da}{dz} \cos n',x - \frac{d\beta}{dz} \cos n',y + \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n',z \right\},\end{aligned}$$

And we thus obtain

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{d}{dt} \int (\xi' \cos n',x + \eta' \cos n',y + \zeta' \cos n',z) d\omega \\ &= \int \left( \frac{d\xi}{dt} + a \frac{d\xi}{dx} + \beta \frac{d\xi}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dz} \right) \cos n',x d\omega \\ &+ \int \left( \frac{d\eta}{dt} + a \frac{d\eta}{dx} + \beta \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\eta}{dz} \right) \cos n',y d\omega \\ &+ \int \left( \frac{d\zeta}{dt} + a \frac{d\zeta}{dx} + \beta \frac{d\zeta}{dy} + \gamma \frac{d\zeta}{dz} \right) \cos n',z d\omega \\ &+ \int \xi \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n',x d\omega - \int \xi \frac{d\beta}{dx} \cos n',y d\omega - \int \xi \frac{d\gamma}{dx} \cos n',z d\omega \\ &- \int \eta \frac{da}{dy} \cos n',x d\omega - \int \eta \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n',y d\omega - \int \eta \frac{d\gamma}{dy} \cos n',z d\omega \\ &- \int \zeta \frac{da}{dz} \cos n',x d\omega - \int \zeta \frac{d\beta}{dz} \cos n',y d\omega + \int \zeta \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n',z d\omega ;\end{aligned}$$

from which, with the aid of equations (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) we get

$$\begin{aligned}A \frac{d\zeta'}{dt} &= \int \left\{ \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n',x + \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n',y + \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n',z \right\} d\omega \\ &= \int (Xdx + Ydy + Zdz),\end{aligned}$$

the last integral being taken around the whole extent  $s$  of the surface  $d\omega$ .

In special cases these results admit of simplification. If it is possible to shut off a singly connected space which entirely contains the moving curve  $s$ , and in which there is no true magnetism, it is clearly immaterial whether the auxiliary surface  $\delta$ , follows the motion of the material parts or suffers a displacement independently of these, provided it remains within the space referred to, and is bounded by the curve  $s$ . In this case we may more simply and yet definitely assert that the integral of the

electric force taken around the closed curve is equal to the time-rate of variation of the number of magnetic lines of force embraced by the curves, multiplied by  $A$ . If we retain this same supposition, and if in addition the magnetic polarization at every fixed point of the space is constant in spite of the motion of the curve  $s$ , we may assert that the induced force along the curve is equal to  $A$  multiplied by the number of magnetic lines of force, considered as at rest, which the curve  $s$  cuts in a given direction during its motion. If the magnetic forces, under the influence of which the curve  $s$  moves, are simply and solely due to the influence of an uniform current along a path  $t$ , then the number of lines of force traversing  $s$  is, as we have seen,<sup>1</sup> equal to the product of the Neumann's potential of the curves  $s$  and  $t$ , and of the current in  $t$ . In this case, therefore, the variation in the above-mentioned product per unit time multiplied by  $A$  gives the electromotive force acting along the curve  $s$ .

In one form or another, these theorems embrace all known cases of induction which have been carefully investigated. The laws of unipolar induction, too, can be easily deduced from the general propositions. Quantitative investigations of induction-phenomena in bodies of three dimensions have only been carried out to a limited extent. The equations by which (p. 255) Jochmann\* and others have succeeded in representing the known facts, follow directly from our general equations by omitting a number of terms which naturally disappear in consequence of the special nature of the problem.

We must not omit to mention that we may represent the general theorem of induction in another and a very elegant form if we allow ourselves to speak of an independent motion of the lines of force, and to regard in general every variation of the magnetic polarization as the result of such a motion of the lines of force. If we do this, we may state generally and completely that the induced electromotive force in any closed curve  $s$  is equal to the product of  $A$  into the number of lines of magnetic force which are cut by the curve  $s$  in a definite sense per unit time. But although no objection can be raised to the occasional use of the conception therein involved, nevertheless it will be better for us to avoid it in the present paper. For the conception employed by Faraday, and developed by Poynting,<sup>2</sup> of a motion of the lines of force relatively to the surrounding medium, is indeed a highly remarkable one, and may be capable of being worked out; but it is entirely different from the view here followed, according to which the lines of force simply represent a symbol for special conditions of matter. There is no meaning in speaking of an independent motion of such conditions. It should also be observed that the controllable decrease and increase of the lines of force in all parts of the space does not definitely determine the presupposed motion of the lines of force. Hence the abovementioned proposition would not of itself decide definitely the magnitude of the induction in all cases; it should rather be regarded as a definition by means of which one among the possible motions of the lines of force is pointed out as the effective motion.

---

<sup>1</sup> See: p. 232.

\* **Jochmann**, *Crelle's Journ.* 83, p. 1, 1863.

<sup>2</sup> **J. H. Poynting**, *Phil. Trans.* 2, p. 277, 1885. [See also Note 35 at end of book.]

### 5. Treatment of Surfaces of Slip

At the boundary of two heterogeneous bodies the electromagnetic constants may pass from one value to another discontinuously; but the velocity - components  $\alpha\beta\gamma$  do not necessarily undergo discontinuous changes at the same time at this bounding surface. The surfaces of separation between solid bodies and fluids, or between fluids themselves, are to be as surfaces of discontinuity of this kind; and we are free to suppose that the transition at the boundary between a body and the ether is of the same nature. The appearance of continuous motion at such surfaces of discontinuity does not give rise to any new considerations; the conditions of the material parts on both sides of the surface are connected by the same relations as those which obtain for bodies at rest.

But the case is different when the velocity-components also undergo discontinuous variations at the surface. As observed in our Introduction, the discontinuity can only refer to the components of the velocity which are parallel to the surface of separation; we therefore rightly denote surfaces of this kind as surfaces of slip (*Gleitflächen*). They may exist between solid bodies which are in contact with one another; it is also occasionally convenient and — seeing how ignorant we are as to the actual circumstances — permissible, to regard the surface of separation between a body and the ether as a surface of slip. As we have already remarked in the introduction, we treat a surface of slip as the limiting case of a transition-layer in which the motions, and possibly the electromagnetic constants as well, change very rapidly, but still continuously from one value to another. This conception is justified by the fact that it does not lead to any results in contradiction with experience; and it enables us to assert that the general propositions which we have already deduced do not become invalid in a system in which there are surfaces of slip. In order that our conception may suffice to determine the conditions in the surface of separation, the nature of the transition must be subjected to certain general restrictions. We give these restrictions in the form of hypotheses respecting the finiteness of certain magnitudes in the transition-layer itself. We assume that there are no electromotive forces at the surface of slip. We place the origin of the system of co-ordinates to which we refer at any point of the element of the transition-layer under consideration, and let it also follow this point during the motion. We further give the  $z$ -axis such a direction that it stands perpendicular to the element of the surface of slip, and also (p. 257) remains perpendicular during the motion. Thus, the transition-layer always forms the immediate neighbourhood of the  $xy$  plane. We assume that even in the transition-layer itself the quantities

X	Y	Z	L	M	N
$\kappa$	$\eta$	$\zeta$	$\epsilon$	$\mu$	$\nu$
$u$	$v$	$w$	$a$	$\beta$	$\gamma$

remain finite; and in the same way that the differential coefficients of these quantities parallel to the surface of slip, *i.e.*, with respect to  $x$  and  $y$ , and also the differential coefficients of the quantities

$$\varkappa \quad \eta \quad \mathfrak{Z} \quad \varepsilon \quad \mathfrak{M} \quad \mathfrak{N}$$

with reference to the time  $t$ , remain finite. On the other hand, we should allow the differential coefficients with respect to  $z$  to become infinite, with the exception of  $dy/dz$ , which, in accordance of the remark in the Introduction already referred to, must remain finite. Everywhere in the transition-layer, accordingly,  $\gamma$  itself is vanishingly small. These assumptions being made, we multiply the first two equations of the system (1<sub>a</sub>) and (1<sub>b</sub>) by  $dz$ , integrate with respect to  $z$  through the transition-layer between two points lying exceedingly near to it, and observe that, on account of the shortness of the integration-path, the integral of every quantity which remains finite in the layer vanishes. We thus obtain the following four equations, in which the index 1 refers to the one side, the index 2 to the other side, of the surface of separation —

$$(5_a) \quad \int_1^2 \varkappa \frac{da}{dz} dz = Y_2 - Y_1, \quad - \int_1^2 \varkappa \frac{d\beta}{dz} dz = X_2 - X_1;$$

$$(5_b) \quad - \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{da}{dz} dz = M_2 - M_1, \quad \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{d\beta}{dz} dz = L_2 - L_1.$$

These equations give the mutual relations between the force-components tangential to the surface of separation on both sides of it. Here, as in the case of bodies at rest, the components normal to the surface are connected by the condition that the surface-density of the true magnetism at the surface of separation (p. 258) cannot alter excepting by convection, and that the surface-density of the true electricity can only alter either by convection or by an actual current.

If the element of the surface of separation under consideration is not charged with any true electricity or true magnetism,  $Z$  and  $N$  are constant in the interior of the transition-layer. In this case the equations (5<sub>a</sub>) and (5<sub>b</sub>) take the simpler forms

$$(5_c) \quad X_2 - X_1 = A\varkappa(\beta_1 - \beta_2), \quad Y_2 - Y_1 = A\varkappa(a_2 - a_1),$$

$$(5_d) \quad L_2 - L_1 = A\mathfrak{Z}(\beta_2 - \beta_1), \quad M_2 - M_1 = A\mathfrak{Z}(a_1 - a_2).$$

As an example of the application of these equations, let us consider the case of a solid of revolution rotating about its axis within a hollow in another solid body which closely surrounds it. If this system is submitted to the action of a magnetic field which is symmetrical with reference to the axis of rotation, there will not be, according to our conception, either in the interior of the rotating body, or in

the interior of the surrounding mass, any cause for the appearance of electric forces. Such forces are, in fact, absent when the magnetic excitement is entirely restricted to the interior of the one body or of the other. But if the lines of force penetrate through the surface along which the two bodies slide past one another, the electromotive forces expressed by equation (5<sub>c</sub>) are excited at this surface; these forces spread into the interior of the bodies and there produce the electric stresses and currents whose existence is shown by experiment. If the bodies under consideration are non-conductors and are subjected to the influence of electric forces which are distributed symmetrically with reference to the axis of rotation, and which do not vanish at the surface of slip, the introduction of the motion excites magnetic forces in the neighbourhood in accordance with equation (5<sub>d</sub>). It is true that effects of this kind cannot be observed with the same certainty as those first referred to; but there is at least an indication of them in Professor Röntgen's experiments.<sup>1</sup>

In the general case in which there are charges of true electricity and true magnetism at the surface of separation, a knowledge of the surface-density of these is not by itself sufficient for ascertaining the integrals of the equations (5<sub>a</sub>) (p. 259) and (5<sub>b</sub>); beyond this it is necessary to know to what extent the electricity and magnetism in the transition-layer share in the motion of each of the two contiguous bodies. This indeterminateness lies in the very nature of the matter. Consider, for example, Rowland's experiment on the effect of the convective motion of electricity; and suppose the electrified disc to rotate within a solid insulator surrounding it closely, instead of rotating in air. Clearly the magnetic effect would diminish, even to the point of vanishing entirely, as the electricity gradually escaped from the surface of the rotating disc on to the contiguous surface of the body at rest.

### *6. Conservation of Energy — Ponderomotive Forces*

We shall consider the transition of the system from the initial to the final state during any element of time as being split up into two stages. In the first stage we shall suppose all the material parts to be transferred from their initial to their final position, the lines of force simply following the motion of the material parts. In the second stage we shall suppose that the electric and magnetic forces, which by this time are present, come into action, and in turn transfer the electromagnetic conditions into their final state. The variation which the electromagnetic energy of the system experiences during the whole period of transition is the sum of the variations which it experiences during the two stages. The processes which take place during the second stage are processes in bodies at rest; we already know how the variations of the electromagnetic energy during such processes are compensated by other forms of energy. But during the first stage, too, the electromagnetic energy of each material part of the system alters; we have therefore to account for what becomes of the electromagnetic energy thus diminished, or to find the source of any increase. As far as all existing experience extends, it can be proved beyond doubt that in every self-contained electromagnetic system the amount of energy in question is balanced by the mechanical work which is done by the electric and magnetic

---

<sup>111</sup> W. C. Röntgen, *Wied. Ann.* **315**, p. 264, 1888.

ponderomotive forces of the system during the element of time under consideration. But, nevertheless, taken as a statement of general applicability, this is (p. 260) not sufficient to enable us to deduce generally and rigidly the ponderomotive forces from the calculable variations of the electromagnetic energy. For this reason, we introduce two further assumptions which are not inconsistent with it; these are not required by experience but by our own particular views. The first assumption declares that the statement already made — which experience proves to be correct for every self-contained electromagnetic system, — also holds good for any material part of such a system. The second assumption asserts that no part of the system can exert upon the rest of the system any ponderomotive forces excepting pressures which are exerted by the elements of the first part upon the contiguous elements of the remaining part, and which at every point of the surface of contact depend simply upon the electromagnetic conditions of the immediate neighbourhood. The pressures required by the second assumption are determined without ambiguity by the first assumption; we shall deduce the magnitude of these pressures, and shall show that they are sufficient to explain the facts which have been directly observed. It then follows from the mode in which the pressures are deduced that the principle of the conservation of energy is satisfied in the case of moving bodies as well.

Consider during an element of time  $dt$  the magnetic energy of a material particle, whose varying volume may be denoted by  $d\tau'$ , while  $d\tau$  denotes the value of  $d\tau'$  at the beginning of the time-element  $dt$ . For the sake of simplicity let the origin of our system of co-ordinates be placed permanently in a material point of the space  $d\tau'$ . If  $d\tau'$  moved as a rigid body, carrying its lines of force with it, the amount of energy contained in it would not alter. In general, therefore, the variation of this energy must be simply a function of the distortion which  $d\tau'$  experiences in consequence of the motion; our immediate problem is to represent the variation in this form. Now, it is not the polarizations alone which alter in consequence of the distortions, but also the properties of the material vehicles thereof, *i.e.*, the magnetic constants. For the purpose of calculating this variation we need a further extension of our notation. In the first place, and in addition to the constants  $\mu$ , we define a series of constants  $\mu'$ , by the condition that (p. 261)

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} \\ &= \mu_{11} \mathfrak{L}_2 + 2\mu_{12} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.} \\ &= \mu'_{11} \mathfrak{L}_2 + 2\mu'_{12} \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.} \end{aligned}$$

These constants  $\mu'$  are therefore the coefficients of  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ , in the linear functions of these quantities by which the forces are represented. We further denote by  $\xi$   $\eta$   $\zeta$  the displacements which the point, whose velocities are  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ , suffers from its original position at the beginning of the time  $dt$ . The quantities



$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \quad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \text{ etc.},$$

are then the components of the distortions of the element  $d\tau'$  in which the displacements  $\xi \eta \zeta$ , occur. The constants  $m'$ , are functions of these quantities; moreover, they depend upon the rotations  $\rho, \sigma, \tau$ , which the element experiences during the distortion. During the element of time  $dt$  both  $x_x, x_y$ , etc., and  $\rho, \sigma, \tau$ , remain vanishingly small; hence the dependence is linear and is known to us, provided we are given the differential coefficients of  $m'$ , with respect to  $\rho, \sigma, \tau, x_x, x_y$ , etc. The differential coefficients with respect to  $\rho, \sigma, \tau$ , can be calculated from the instantaneous values of  $m'$ , itself. But this is not possible for the differential coefficients with respect to  $x_x, x_y$ , etc., and we must therefore assume that we are otherwise given the quantities

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}'}{dx_x} &= \mu_{11}',_{11}, & \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} &= \mu_{11}',_{12}, \text{ etc.}, \\ \frac{d\mu_{12}'}{dx_x} &= \mu_{12}',_{11}, & \frac{d\mu_{12}'}{dx_y} &= \mu_{12}',_{12}, \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

The 36 constants so defined clearly correspond to the magnetic properties of the particular substance which fills the space  $d\tau'$  in its instantaneous state of deformation. For our purpose we cannot dispense with a single one of these constants; nor can we *a priori* deduce a single one of them from the magnetic properties of the substance which we have hitherto considered. By a suitable orientation of our system of (p. 262) co-ordinates we can reduce the number of necessary constants; similarly, a reduction takes place when there happen to be symmetrical relations with respect to the system of co-ordinates used. In the simplest case, in which the substance is not only isotropic in its initial state, but also remains isotropic in spite of every deformation that arises — *viz.* in a fluid, — the number of the new constants reduces to a single one, which then, together with the one magnetic permeability, sufficiently defines the magnetic properties. Besides, it does not seem improbable that even in the general case necessary relations may be proved to exist between the constants which would then reduce to a smaller number of independent constants.

This notation being now assumed, we obtain successively the following expressions for the variation per unit time of the amount of magnetic energy contained in the space  $d\tau'$ : —

---

<sup>1</sup> Cf. G. Kirchhoff, *Mechanik*, p. 128, 1877.

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) d\tau' \right\} \\ & = \frac{1}{8\pi} \left\{ d\tau \frac{d}{dt} (\mu_{11}' \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}' \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \right. \\ & \quad \left. + (\mathfrak{E}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) \frac{d}{dt} d\tau' \right\} \\ & = \frac{1}{8\pi} d\tau \left\{ 2 \left( L \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N \frac{d\mathfrak{N}}{dt} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{d\mu_{11}'}{dt} \mathfrak{E}^2 + 2 \frac{d\mu_{12}'}{dt} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.} \right) \right. \\ & \quad \left. + (\mathfrak{E}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

From the last of these we proceed to remove the differential coefficients with respect to  $t$ . We obtain the following expressions for  $d\mathfrak{L}/dt$ ,  $d\mathfrak{M}/dt$ ,  $d\mathfrak{N}/dt$  from equations(1<sub>a</sub>) by considering only the influence of the motion in them, and putting the velocities  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , with due regard to the special

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} &= -\mathfrak{E} \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) + \mathfrak{M} \frac{da}{dy} + \mathfrak{N} \frac{da}{dz}, \\ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= -\mathfrak{M} \left( \frac{d\gamma}{dz} + \frac{da}{dx} \right) + \mathfrak{N} \frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{E} \frac{d\beta}{dx}, \\ \frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= -\mathfrak{N} \left( \frac{da}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \mathfrak{E} \frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M} \frac{d\gamma}{dy}. \end{aligned}$$

(p. 263) For the magnitude  $d\mu_{11}'/dt$  we further have

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}'}{dt} &= \frac{d\mu_{11}'}{dx_x} \cdot \frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu_{11}'}{dx_y} \cdot \frac{dx_y}{dt} + \text{etc.} \\ & \quad + \frac{d\mu_{11}'}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \text{etc.} \\ &= \mu_{11}'_{11} \frac{da}{dx} + \mu_{11}'_{12} \left( \frac{da}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) + \text{etc.} \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d\mu_{11}'}{d\rho} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

We deduce similar expressions for  $d\mu_{12}/dt$ , etc. We introduce all these expressions in the right-hand side of equation (6), and this side now becomes a homogeneous linear function of the nine differential coefficients of  $\alpha \beta \gamma$ , with respect to  $x y z$ . But we can and will arrange this function so that it shall appear to us as a homogeneous linear function of the six rates of deformation  $d\alpha/dx$ ,  $d\alpha/dy + d\beta/dx$ , etc., and of the three rates of rotation  $\frac{1}{2}(d\alpha/dy - d\beta/dx)$ , etc. We here note that the coefficients of the three rates of rotation must necessarily vanish identically; for a motion of a particle as a rigid body does not bring about any alteration in the amount of energy contained in it. Accordingly, we simply reject the terms in which these rates of rotation occur, and thus obtain as our final result, after reducing to the unit of volume by dividing by  $d\tau$  —

$$(6_a) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) d\tau' \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{d\alpha}{dx} (\mathfrak{E}L - \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu_{11}',_{11} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{11} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\beta}{dy} (-\mathfrak{E}L + \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu_{11}',_{22} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{22} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\gamma}{dz} (-\mathfrak{E}L - \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N + \mu_{11}',_{33} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{33} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy} \right) (\mathfrak{M}N + \mathfrak{M}N + \mu_{11}',_{23} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{23} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} \right) (\mathfrak{E}N + \mathfrak{N}L + \mu_{11}',_{13} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{13} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) (\mathfrak{M}L + \mathfrak{E}M + \mu_{11}',_{12} \mathfrak{E}^2 + 2\mu_{12}',_{12} \mathfrak{E}\mathfrak{M} + \text{etc.}) \end{aligned} \right.$$

(p. 264) Now it is clear

that in the linear function of the rates of distortion on the right hand the coefficient, taken negatively, of each of these rates, gives that pressure-component with which the magnetically strained matter tends to increase the corresponding distortion. For let us, in accordance with the usual<sup>1</sup> notation, denote by  $X_x X_y X_z$  the components of the pressure which the matter of the element  $d\tau$  exerts upon a plane section perpendicular to the  $x$ -axis; and let us further extend this notation to the directions of the other axes. Then, the expression

$$\begin{aligned} & X_x \frac{d\alpha}{dx} + Y_y \frac{d\beta}{dy} + Z_z \frac{d\gamma}{dz} \\ &+ Y_z \left( \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy} \right) + X_z \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} \right) + X_y \left( \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> G. Kirchhoff (*Mechanik*, Eleventh Lecture).

represents the mechanical work, per unit volume and per unit time, done by the material contents of the element  $d\tau$  in the distortion which takes place. According to our assumption this mechanical work is equal to the magnetic energy which is lost as a result of the distortion. Inasmuch as this holds for every possible deformation, our assertion is shown to be correct. Each of the pressure-components obtained is a homogeneous quadratic function of the three components of the prevailing magnetic force or, similarly, of the three components of the prevailing magnetic polarization. By exactly analogous considerations we can deduce exactly analogous expressions for the pressures which arise through electric stresses. The total pressure is equal to the sum of the magnetic and electric pressures.

Having now found the values of the ponderomotive pressures, we add three remarks. The first remark has reference to the difference between our system of pressures and the system which Maxwell has given for the general case in which the forces and the polarizations have different directions.<sup>2</sup> In the first place, Maxwell's formulæ are simpler, because in deducing them he paid no heed to the possible deformation of the medium. A much more important difference consists in the fact that the force-components which, according to the notation (p. 265) used, are denoted by  $X_y$  and  $Y_x$ , have different values in Maxwell, whereas with us they are identical. According to our system each material particle, when left to itself, simply changes its form; according to Maxwell's system, it would at the same time begin to rotate as a whole. Hence Maxwell's pressures cannot owe their origin to processes in the interior of the element; and they therefore find no place in the theory here worked out. At the same time, they are permissible, if one starts with the assumption that in the interior of the moving body the ether remains permanently at rest and provides the necessary point of support for the rotation which takes place.

The second remark has reference to the manner in which our formulæ become simplified when we apply them to bodies which are isotropic, and which, in spite of every deformation, remain isotropic — *viz.* to fluids. The system of constants  $\mu'$  here reduces to the one constant  $\mu' = 1 / \mu$ . If we further denote by  $\sigma$  the density of the fluid, we have

$$\begin{aligned} \mu'_{11},_{11} = \mu'_{22},_{22} = \mu'_{33},_{33} &= - \frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{d \log \sigma} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d \log \sigma}, \\ \mu'_{12},_{11} &= \text{etc.} = 0. \end{aligned}$$

Thus, the pressure-components are —

---

<sup>2</sup> Maxwell, *Treatise on Elect. and Mag.*, 2, p. 254, 1873.

$$(6_b) \left\{ \begin{array}{l} X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 - N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ X_y = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN. \end{array} \right.$$

For the same case quite identical formulæ have already been obtained by von Helmholtz<sup>1</sup> by following a similar train of thought. Our formulæ merge into his if we alter the notation so as to replace L, M, N and  $\mu$ , by  $\lambda/\mathfrak{D}$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , and (p. 266)  $1 + 4\pi$ , and further, notice that the  $\theta$  of von Helmholtz's formulæ is equal to  $d/d \log \sigma = d\mu/4\pi d \log \sigma$ .\*

The third remark has reference to the question, in how far the resultants of the pressures deduced from our hypotheses are in accordance with the mechanical forces and couples, which we actually observe in bodies subjected to electromagnetic actions. We first observe that our observations are confined to systems which are indefinitely near to the statical or steady state. For such systems, however, the principle of the conservation of energy is of itself sufficient to enable us to calculate without ambiguity, from the loss of electromagnetic energy during any displacement, the magnitude of the opposing mechanical force-components; and it may be regarded as already proved that the force-components so calculated agree with those which are observed. One system of force-components which satisfies the principle of the conservation of energy is certainly given by the resultants of the pressures which have been deduced. This system must, therefore, be the one which is directly deducible from that principle, and which is in accordance with experience. In order to arrive *à posteriori* at the same result, we observe that under actual circumstances the electromagnetic pressures are much too feeble to cause noticeable deformations of the volume-elements of solid bodies. The very slight distortions which they are able to bring about we are accustomed, in the study of electricity, to treat separately as phenomena of electrostriction, apart from the phenomena of electromagnetic proper. If, therefore, we put on one side this special class of phenomena, it will not affect the result whether we admit the pressures as calculated by us in the case of solid bodies, or no pressures at all, or any others of the same order of magnitude. We may, therefore, in general content ourselves with the simpler formulæ (6<sub>b</sub>), in which we are now to take  $\mu$ , to mean in the case of crystalline bodies any constant of the order of magnitude of  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{12}$ , etc. But we may further simplify the formulæ (6<sub>b</sub>) by neglecting

<sup>1</sup> v. Helmholtz, *Wied. Ann.*, 13, p. 400, 1881.

\* The signs remain contrary, because v. Helmholtz reckons a tension as being positive, whereas we reckon a pressure as positive.

the terms which contain the quantity  $d\mu/d \log \sigma$ . For these terms, which represent an uniform pressure, cannot produce any finite displacements in liquids on (p. 267) account of their small compressibility; they can only give rise to phenomena of electrostriction or magnetostriction respectively. In the case of gaseous bodies these terms disappear, for the constant  $\mu$  and the specific inductive capacity do not change appreciably with the density  $\sigma$ . Those ponderomotive forces which produce finite relative displacements of the bodies must accordingly be represented by the resultants of the following pressure-system, which is to be regarded as acting everywhere: —

$$(6_c) \begin{cases} X_x = \frac{\mu}{8\pi} (-L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 - M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 - N^2). \end{cases}$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Now this simplified system of magnetic pressures is just Maxwell's. Maxwell has shown<sup>1</sup> that this, together with the corresponding electric system, embraces the observed ponderomotive forces between magnets, steady currents, and electrified bodies, and to his simple demonstration we may here refer.

It does not appear to have been observed that this system of pressures in general only leaves the interior of a homogeneous body, especially of the ether, at rest, if the acting forces possess a potential, *i.e.*, if the prevailing conditions are statical or steady. In the case of any admissible electromagnetic disturbance, the pressures found must set the interior of the ether — which we have expressly supposed to be movable — into motion, with velocities which we could calculate if we had an idea of its mass.<sup>2</sup> This result seems to possess little intrinsic probability. And yet there is no reason, from the standpoint of the present dissertation, why we should abandon the theory on this account; for the result is not (P. 268) inconsistent with our hypotheses, nor yet with what experience teaches us. The small quantity of air which remains even in the highest vacua is amply sufficient to keep below perceptible magnitude all currents that could be excited in such spaces under the existing circumstances.

Finally, I wish to point out once more that I only attach value to the theory of electromagnetic forces in moving bodies here proposed from the point of view of systematic arrangement. The theory

<sup>1</sup> Maxwell, *Treatise on Elect. and Mag.*, 1873, 2, p. 256. The signs there are opposite to ours, because Maxwell reckons a tension as being positive, whereas we reckon a pressure as positive.

<sup>2</sup> [See Note 36 at end of book.]

shows how we can treat completely the electromagnetic phenomena in moving bodies, under certain restrictions which we arbitrarily impose. It is scarcely probable that these restrictions correspond to the actual facts of the case. The correct theory should rather distinguish between the conditions of the ether at every point, and those of the embedded matter. But it seems to me that, in order to propound a theory in accordance with this view at present, we should require to make more numerous and arbitrary hypotheses than those of the theory here set forth.

## SUPPLEMENTARY NOTES

(1891)

1. [II. p. 29.]

It was v. Helmholtz, in his paper *Ueber die Erhaltung der Kraft*, who first stated (in 1847) that the discharge of a Leyden jar is oscillatory. He arrived at this conclusion from its varying and opposite magnetic effects, and from the fact that when one endeavours to decompose water by electric discharges, both gases are developed at both electrodes. Sir William Thomson arrived independently at the same result from theoretical considerations. The mathematical treatment of the problem given by him in the year 1863 (*Phil. Mag.* (4) 51 p. 393) still holds good to-day. We may further mention the following among the more important early papers on the subject: —

On the discharge of Leyden jars —

**Feddersen**, *Pogg. Ann.* **103** p. 69, 1858; **108**, p. 497, 1859; **112**, p. 452, 1861; **113**, p. 437, 1861; **115**, p. 336, 1862; **116**, p. 132, 1862.

**Paalzow**, *Pogg. Ann.* **112**, pp. 567, 1861; **118**, pp. 178, 357, 1863.

**v. Oettingen**, *Pogg. Ann.* **115**, p. 513, 1862; *Jubelbd.* p. 269, 1874.

**G. Kirchhoff**, *Pogg. Ann.* **121**, p. 551, 1864; *Ges. Abhandl.* p. 168.

**L Lorenz**, *Wied. Ann.* **7**, p. 161, 1879.

On the oscillations of open induction-circuits —

**v. Helmholtz**, *Pogg. Ann.* **83**, p. 505, 1851; *Ges. Abhandl.* **1**, 429. The theory is implicitly contained in this, but is not explicitly applied to the special case of oscillations.

**v. Helmholtz**, *Ges. Abhandl.* **1**, p. 531 (1869).



**Bernstein**, *Pogg. Ann.* **142**, p. 54, 1871.

**Schiller**, *Pogg. Ann.* **152**, p. 535, 1872.

2. [II. p. 34.]

At first, I insulated carefully with sealing-wax, etc. But I always found that, for all such experiments as are here considered, (p. 270) the insulation afforded by dry wood is amply sufficient. In the subsequent experiments no other means of insulation was used.

3. [II. p. 39.]

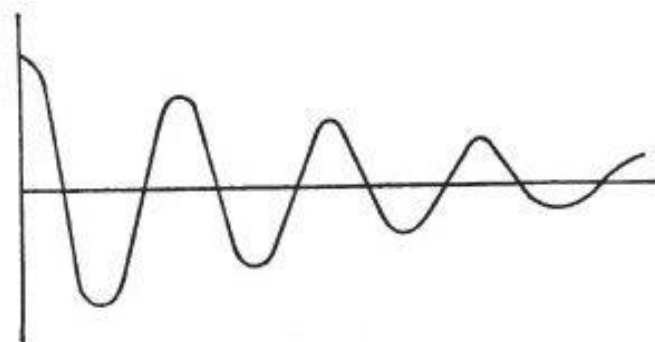
I expect that the action of the induction-coil partly depends upon the fact that directly before the discharge it allows the potential to rise very rapidly. Several accessory phenomena lead me to believe that when this rapid rise takes place, the difference of potential is forced beyond the point at which sparking occurs when the difference of potential increases slowly; and that for this reason the discharge takes place more suddenly and energetically than when a statical charge is discharged.

4. [II. p. 45.]

These curves should be compared with the corresponding resonance-curves which Herr V. Bjerknes has obtained by more accurate experimental measurements (*Wied. Ann.* **44**, p. 74, 1891).

5. [II. p. 49.]

This remark in my first paper shows clearly that I never conceived the oscillations of my primary conductor as perfectly regular and long-continued sine-oscillations. The value of the damping has recently been carefully determined by Herr V. Bjerknes (*Wied. Ann.* **44**, p. 74, 1891).



**Fig. 40.**

Fig. 40 shows, in accordance with the results of his experiments, the kind of oscillation given by a conductor similar to our primary conductor.

6. [II. p. 50.]

Just at this point there has crept into the calculation a fatal mistake, the unfortunate effects of which extend even to some of the subsequent papers.

The capacity  $C$  in the formula  $T = \pi\sqrt{PC}/A$  denotes the amount of electricity which exists at one end of an oscillating conductor when the difference of potential between the two ends is equal to unity. Now if these two ends consist of two spheres which are far apart from each other, and if their difference of potential is equal to unity, then the difference of potential between each of them and the surrounding space is equal to  $\pm \frac{1}{2}$ . Therefore, the charge upon each of the spheres, measured in absolute units, is (p. 271) found by dividing its capacity, *i.e.*, its radius measured in centimetres, by 2.

Hence, we should here put  $C = \frac{15}{2}$  cm, and not  $C = 15$  cm. The period of oscillation,  $T$ , now becomes smaller in the proportion of  $1:\sqrt{2}$ , so that  $T$  is now equal to 1.26 hundred millionths of a second.

M. H. Poincaré, as already stated in the introduction, first drew attention to this error (*Comptes Rendus*, **111**, p. 322, 1891).

7. [II. p. 52.]

The result is about right, but the way in which it is deduced is not sound. We have just referred [6] to an error in the calculation which would have to be corrected; and beside this no account is taken of damping through radiation. Indeed, I had not thought of this when writing the paper.

8. [IV. p. 67.]

The complications here mentioned, and the starting of long sparks by other much shorter ones, refer to the following phenomena: — Let the primary coils of two induction-coils be placed in the same circuit, and let their spark-gaps be so adjusted as to be just on the point of sparking. Any cause which starts sparking in one of them will now make the other begin to spark as well; and this quite independently of the mutual action of the light emitted by the two sparks— which, indeed, can easily be excluded. Sparking begins either in both, or else in neither of them. Again, let a Töpler-Holtz induction-machine, with a disc 40 cm in diameter, be turned rapidly so as to give sparks having a maximum length of about 15 cm. Now draw the poles 20 – 25 cm apart, so that the sparking entirely stops; it will now be found that a long crackling spark can again be regularly obtained every time a small spark is drawn from the negative conductor, either with the knuckle of the hand or with the knob of a Leyden jar; or the negative pole may be connected to a long conductor, and sparks may be drawn from this with the same result. The "releasing" spark may be quite short and weak; if it is

drawn with the knob of a Leyden jar, the jar only appears slightly charged. The same effect cannot be obtained by drawing sparks from the positive pole. The phenomenon must have been often observed before; but I have not found any mention of it in the literature on the subject.

I can give no explanation of these phenomena. They clearly have the same origin as the phenomena which Herr G. Jaumann has described in his paper entitled "Einfluss rascher Potentialveränderungen auf den Entladungsvorgang" (*Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissensch. zu Wien.*, Bd. **97**, Abth. IIa. July 1888). Herr Jaumann arrives at the conclusion that "not only the form, condition, and potential difference of the discharge-field," but also "the manner in which the potential difference alters, and probably its rate of (p. 272) alteration, materially influence the discharge." It is to be hoped that these phenomena will be further explained.

9. [IV. p. 73.]

Soon afterwards Herren E. Wiedemann and H. Ebert showed that the action of the light only affects the negative pole, and only the surface of it (*Wied. Ann.* 33, p. 241, 1888).

10. [IV. p. 76.]

Somewhat later I succeeded in this. I had hoped to observe an influence of the state of polarization of the light upon the action, but was not able to detect anything of the kind.

11. [IV. p. 79.]

By this I did not mean to say that I had not succeeded in observing the action of light upon discharges other than those of induction-coils; but only that I had not succeeded in replacing spark-discharges — the nature of which is so little understood — by simpler means. This was first done by Herr Hallwachs (*Wied. Ann.* **331** p. 301, 1888). The simplest effect that I obtained was with the glow-discharge from 1000 small Planté accumulators between brass knobs in free air; by the action of light. I was able to make the glow-discharge pass when the knobs were so far apart that it could not spring across without the aid of the light.

12. [VII. p. 109.]

The 12 metres are supposed to be measured in the direction of the base-line. The space on each side of the base-line was clear up to a distance of 3 – 4 metres, with the exception of an iron stove which came within 1.5 metres of it. I did not think at the time that at this distance it could interfere at all.

13. [VII. p. 109.]

In this calculation, as well the capacity is assumed to be that of an end-plate, supposed to be hanging free in air; this capacity was experimentally determined by comparison with the sphere previously used. For the reasons stated in Note 6, only the half of this capacity should have been taken. Hence the period of oscillation, as correctly calculated, is smaller than the value given in the proportion of  $1:\sqrt{2}$ . Thus, the correct value of the period of oscillation is almost exactly one hundred-millionth of a second.

14. [VII. p. 112.]

Here, as well as in all that follows, it is to be understood that, in order to produce stationary waves in wires, not only must the primary and secondary conductors be brought into resonance, but the straight stretched wires must also be tuned to unison with both of these. Only in this case does the whole length of the wire divide itself clearly into half wave-lengths, and only in this case is this beautiful phenomenon exhibited in its full development. This condition seems to have escaped the attention of some observers who have repeated the experiments on waves in wires.

(p. 273) 15. [VII. p. 113.]

This has not turned out to be true. In tubes of about 2 cm diameter, filled with dilute sulphuric acid, the waves travel quite well and with the same velocity as in wires. Herr E. Cohn has, moreover, shown that the inertia of the electrolytes cannot come into play when the period of oscillation is of the order here employed (*Wied. Ann.* **38**, p. 217). The fact that these oscillations are transmitted through electrolytes has been used by J. J. Thomson for the purpose of determining their resistance (*Proc. Roy. Soc.* **46**, p. 269).

16. [VII. p. 114.]

The correctly calculated period of oscillation is one hundred millionth of a second. This, with a wave-length of 2·8 metres, gives a velocity of 280,000 km per second, or approximately the velocity of light.

This is the final form, — although, of course, with much more careful data, — which Messrs. E. Lecher (*Wied. Ann.* **41**, p. 850) and Blondlot (*C. R.* 113, p. 628) have adopted for showing that the velocity of waves in wires is the same as the velocity of light. As a matter of fact, however, this final form only shows the accordance of theory and observation in the following respect: that in a simple straight wire 2·8 metres long, and in a conductor of the form of our primary conductor, the periods of oscillation are equal. But the absolute value of the period of oscillation, and hence the velocity, might on that account differ by the same amount in both cases from the theoretical value; and it must differ by the same amount if the same causes produce equal retardations in both conductors.

Hence this final form cannot be employed for the purpose of removing doubts as to the existence of such a retardation.

The velocity assumed in the text depends much more upon the experiments of Fizeau and Gou-nelle and Siemens, than upon the calculation.

17. [VII. p. 118.]

It is not without interest to inquire how the interferences should have taken place if the experi-ments had led to the conclusion that the velocity in wires is equal to the velocity in air. This can easily be deduced from the correct theory given in No. IX., together with the aid of Fig. 31, and comes out as follows: —

	0	1	2	3	4	5	6	7	8								
100	+	+	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
250	0	-	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
400	-	-	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

(p. 274) If the velocities were equal, there should still have been *one* change of sign; but the further changes which the experiments gave can only be explained by a difference in the velocities, or by illusions due to reflections or disturbances in the neighbourhood.

18. [VII. p. 131.]

It should be observed that we are here only able to determine the position of the magnetic force by the aid of theory. From the experiments we cannot conclude that a second kind of force is present together with the electric force. If we confine ourselves to the experiments, we can only regard the expression "magnetic force" as a short name for a certain mode of distribution of the electric force. That this magnetic force produces effects which cannot be explained by the electric force, is first verified by experiments in No. XII.; and, of course, only for waves in wires.

19. [VIII. p. 133.]

The wave-length measured depends, therefore, very much upon the distance of B and C; and hence upon the assumption that C is quite accurately measured. If we assume that the position of C is altered by general conditions of the surrounding space, the first node should be placed nearer to the wall and we might obtain much smaller values for the wave-length. But the experiments give no reason for believing that the position of C is uncertain.

20. [VIII. p. 136.]

Lloyd's experiment is the optical analogue of the experiments in which the primary conductor is gradually moved away from the wall. The experiments of the first kind, in which we removed the secondary conductor from a reflecting wall, have also found an optical analogue in the beautiful experiments which Herr O. Wiener has published in his paper on "Stationary Light-Waves and the Direction of Vibration of Polarized Light" (*Wied. Ann.* **40**, p. 303).

As to the acoustic analogues, I find that the phenomenon which forms the analogue to the experiments of the first kind was discovered by N. Savart many years ago (see *Pogg. Ann.* 46, p. 458, 1839; also, a number of Seebeck's paper in the subsequent volumes). If a steady source of sound is placed at a distance of 15-20 metres in front of a plane wall, and if we listen near the wall (best with the aid of a resonator), we find that the sound swells out at certain points — the antinodes, — and becomes weak at other points — the nodes. A correct analogue to the experiments of the second kind — in which the primary conductor is moved — has been already given in the text. Another analogue — in itself interesting — is the following. Take a glass tube about 60 cm long and 2 cm in diameter and lower it gradually over a Bunsen burner, of which the flame is not too large. At a given depth the Bunsen flame will begin, but not without some difficulty, to make the tube sing loudly. Now bring the system near to a wall. Quite near the wall the sound disappears; it (p. 275) reappears at a distance of a quarter wave-length, and again vanishes at a distance of half a wave-length. By very careful adjustment, which up to the present I have not been able to secure at will, I have been able to observe two further positions of sound and silence at distances of half a wave-length. I do not know of any complete explanation of this phenomenon. Probably it has some connection with the fact that such a tube becomes silent if a resonator, tuned to the same note, is brought near its end. This last experiment is due-as far as I am aware — to Professor A. Christiani (*Verhandl. d. phys. Gesellsch. zu Berlin*, Dec. 15, 1882, atend of the *Fortschritte der Physik*, **36**).

21. [VIII. p. 136.]

This remark refers to the experiments with wires, which I was arranging at the time when this paper was written. It has already been stated in the introduction that the hope here expressed has not been fulfilled.

22. [IX. p. 141.]

An error in sign in the original paper, to which M. L. de la Rive drew my attention, has here been corrected.

23. [IX. p. 150.]

This calculation is based upon the observed wave-length of 480 cm. If this is not correct, the calculation must be altered accordingly. With regard to the real value of the damping see Note 5.

24. [X. p. 161.]

By the experiments in the following paper, it is pretty plainly proved that in the case of rapid variations of current the changes penetrate from without into the wire. It is thereby made probable that in the case of a steady current as well, the disturbance in the wire itself is not, as has hitherto been assumed, the cause of the phenomena in its neighbourhood; but that, on the contrary, the disturbances in the neighbourhood of the wire are the cause of the phenomena inside it.

That the disturbances in the wire are connected with a regular circulation of material particles, or of a fluid assumed *ad hoc*, is a hypothesis which is neither proved nor disproved by our experiments; they simply have nothing to do with it. We have neither any right to oppose this hypothesis, nor have we any intention of doing so, on the ground of the experiments here described.

25. [XI. p. 177.]

In connection with these phenomena, we may refer to the observation which Herren Hagenbach and Zehnder have brought forward as an objection to my interpretation of the experiment (*Wied. Ann.* **43**, p. 611). My meaning is that light behaves just as the electric waves here behave; but we must imagine the dimensions of everything concerned in the experiment to (p. 276) be reduced in the same proportion, not only the length of the waves.

26. [XI. p. 181.]

Herr W. König first pointed out that the analogy between the reflection of electric waves from our grating and the reflection of monochromatic light from the surface of dichroic crystals is much more complete than the analogy which is drawn in the text. He has also drawn attention to the relation between the action of our grating and certain polarizing effects of optical gratings (*Wied. Ann.* 37, p. 651, at the end).

27. [XI. p. 182.]

Messrs. Oliver Lodge and Howard have actually succeeded in showing the refraction and concentration of electric rays by means of large lenses (*Phil. Mag.* 27, p. 48, 1889).

28. [XI. p. 185.]

Since then, the experiments have been exhibited objectively in many ways. Herr R. Ritter has employed successfully a frog's leg (*Wied. Ann.* **40**, p. 53). Mr. Dragoumis has used Geissler tubes

(*Nature*, **39**, p. 548). Herr Boltzmann has given a very convenient method in which a gold-leaf electroscope is used (*Wied. Ann.* **40**, p.399). Herr Klemenčič has used a thermo-element (*Wied. Ann.* 42, p. 416). The method which is most elegant and best adapted for demonstration, although it is far from being an easy one, is the bolometer method which Herren H. Rubens and R. Ritter have employed for exhibiting the experiments and for further useful researches (*Wied. Ann.* **40**, p. 55, and subsequent volumes).

29. [XIII. p. 198.]

And by more than one independent variable. The "force " and "polarization" in this paper are not to be regarded as two variables in this sense; for they are connected by a fixed linear relation. If this relation is allowed to drop, by regarding it as a special case of a general relation, then "force " and "Polarization" may serve as two variables. But it would be more convenient to introduce the polarization of the ether as the one variable, and the polarization of the ponderable matter as the other.

30. [XIII. p. 214.]

According to this usual system of nomenclature it is undoubtedly true that the amount of "electricity " on an insulated sphere remains unchanged when the sphere is immersed in an insulating fluid, or, speaking generally, when it is moved in any way through insulating media. Hence, we have denoted as "true" electricity the magnitude which remains unchanged during such motion. The distance-action of the sphere, and therefore the " free" electricity does change during the motion.

31. [XIII. p. 220.]

Consider a steam-engine which drives a dynamo by means of a (p. 277) strap running to the dynamo and back, and which in turn works an arc lamp by means of a wire reaching to the lamp and back again. In ordinary language we say — and no exception need be taken to such a mode of expression — that the energy is transferred from the steam-engine by means of the strap to the dynamo, and from this again to the lamp by the wire. But is there any clear physical meaning in asserting that the energy travels from point to point along the stretched strap in a direction opposite to that in which the strap itself moves? And if not, can there be any more clear meaning in saying that the energy travels from point to point along the wires, or — as Poynting says — in the space between the wires? There are difficulties here which badly need clearing up.

32. [XIII. p. 221.]

In order to deduce the mechanical forces from the changes of energy, we must impart virtual displacements to the bodies. Hence, we should have to use the equations for bodies in motion and not for bodies at rest, and at present the former are not at our disposal. By the aid of the experimental fact here assumed we are able to fill up this gap for the statical and steady states satisfactorily.



33. [XIV. p. 244.]

This proof, that the statements here made embrace the observed facts, is also a proof of the statements themselves. They are therefore logically stated as facts derived from experience; not as results of any particular experiment, but as results of all the general experience which we possess respecting such matters.

34. [XIV. p. 246.]

The meaning of the equations is exceedingly simple; but their external appearance is somewhat complicated. This led me to expect that skilful mathematicians might be able to replace them by more elegant forms. And in fact, Signor Vito Volterra has succeeded in representing by a single system of equations the phenomena for bodies both at rest and in motion (*Il nuovo Cimento* (3), **29**, p. 53; see also p. 147 *ibid.*)

35. [XIV. p. 255.]

A similar theory has also been developed recently by J. J. Thomson (*Phil. Mag.* (5), **81**, p. 149). In so far as this theory and Poynting's lead to Maxwell's equations, I would regard them as special forms of "Maxwell's theory," although their conceptions are undoubtedly not Maxwell's.

36. [XIV. p. 267.]

This does not necessarily imply an error in the theory, though it does necessarily imply a lack of completeness in it. Moreover, it seems to be at the very root of our view, for it can be understood without using the equations. Let us suppose a magnetised steel sphere to rotate in free space about an axis which does not coincide with the direction of magnetisation. It continually sends out (p. 278) electromagnetic waves; it therefore gives out energy and must gradually come to rest. Now let us take an iron sphere at rest and excite in it a rotary magnetisation by varying electric forces; it will easily be seen that the iron sphere must, conversely, begin to rotate. Such conclusions scarcely seem probable. But in connection with these matters, we have scarcely any right to speak of probability, — so complete is our ignorance as to possible motions of the ether.

## ANEXO C

### EL MOVIMIENTO RELATIVO DE LA TIERRA Y EL ÉTER.\*

H. A. LORENTZ

Para explicar la aberración de la luz, Fresnel supuso que el éter no comparte el movimiento anual de la Tierra, lo que, por supuesto, requiere que nuestro planeta sea completamente permeable para ese medio. Más tarde, Stokes buscó una explicación sobre la base de la suposición de que el éter es arrastrado por la Tierra y así, en cada punto de la superficie terrestre, la velocidad del éter es la misma que la de la Tierra.

Sobre esas teorías, trabajé extensamente hace algunos años <sup>[1]</sup>. Me pareció que podía haber otros modos de explicación que se encuentran en el medio de las mencionadas más arriba y, por lo tanto, al no ser tan simples, merecen más atención. De las dos opiniones extremas, pensé que era necesario rechazar la de Stokes, debido a que el movimiento del éter requiere la existencia de una velocidad potencial, lo que es incompatible con la igualdad entre las velocidades de la Tierra y del éter adyacente.

Por otro lado, era posible explicar casi todos los fenómenos considerados por la teoría de Fresnel, si suponemos que el “coeficiente de arrastre” para sustancias transparentes ponderables dado por Fresnel y cuyos valores los derivé recientemente a partir de la teoría electromagnética de la luz. <sup>[2]</sup>

A fin de decidir entre las dos teorías, Michelson <sup>[3]</sup> realizó un experimento de interferencia que presentó grandes dificultades.

Maxwell hizo notar que, si el éter permanece en reposo, entonces, el movimiento de la Tierra debe tener influencia sobre el tiempo requerido por la luz para viajar y volver entre dos puntos de la Tierra, considerados como fijos. Si  $l$  es la distancia entre los puntos,  $V$  la velocidad de la luz, y  $p$  la velocidad de la Tierra y si la línea que une a los puntos es paralela a la dirección del movimiento de la Tierra, entonces el tiempo empleado en ir y volver estará dado por

$$2 \frac{l}{V} \left( 1 + \frac{p^2}{V^2} \right) \quad (1)$$

---

\*\*\*De relatieve beweging van de aarde en den aether. *Amsterdam, Zittingsverlag Akad. v. Wet.*, 1892, 1, p. 74.

Y si es perpendicular a la dirección del movimiento de la Tierra

$$2 \frac{l}{V} \left( 1 + \frac{p^2}{2V^2} \right) \quad (2)$$

estableciendo una diferencia

$$\frac{lp^2}{V^3} \quad (3)$$

Michelson usó un dispositivo de dos brazos horizontales de igual longitud y perpendiculares entre sí, con espejos en las terminales y perpendiculares a sus direcciones. Cuando un rayo viaja a lo largo de un brazo y regresa y otro rayo va y regresa por el otro brazo, cuando se cruzan, se produce un fenómeno de interferencia. Todo el dispositivo — incluyendo la fuente de luz y el telescopio de observación, pueden ser rotados alrededor de un eje vertical y el tiempo de observación fue elegido de manera que uno pueda tener, tanto como sea posible, un brazo o el otro en la dirección del movimiento de la Tierra. Por conveniencia, supongamos que ese es realmente el caso, entonces — si la teoría de Fresnel es correcta, — debido al movimiento de la Tierra, los rayos que viajan hacia adelante y hacia atrás en la dirección del movimiento de la Tierra, deben sufrir un cierto retraso determinado por (3) respecto del otro rayo. Cuando el dispositivo se hace rotar 90° todos los cambios de fase deben alterarse por una cantidad que, expresada en la unidad de tiempo, pueda estar dada por el doble de la magnitud (3). Pero no se observará un desplazamiento de las líneas de interferencia.

Uno puede argüir contra este experimento, que la longitud de los brazos es demasiado pequeña para obtener un desplazamiento de las líneas de interferencia que sea observable. Pero Michelson conjuntamente con Morley repitieron el experimento a una escala mucho más grande.<sup>[4][4][4]</sup> Los rayos de luz viajaban, varias veces, hacia adelante y hacia atrás en direcciones mutuamente perpendiculares, porque cada vez, ellos eran reflejados por espejos. Los espejos, al igual que todas las otras partes del dispositivo, estaban montados sobre una placa de piedra que flotaba sobre mercurio que le permitía ser rotado en la dirección horizontal. Sin embargo, el desplazamiento requerido por la teoría de Fresnel no pudo observarse.

Dediqué mucho tiempo tratando de explicar los resultados de este experimento, pero sin lograrlo y, eventualmente, encontré una sola manera de conciliar su resultado con la teoría de Fresnel. Ella consiste en aplicar la suposición de que la línea que une dos puntos de un cuerpo sólido, no conserva su longitud, cuando se encuentra en movimiento paralelo a la dirección del movimiento de la Tierra y después es llevado a un movimiento normal a esa dirección. Si, por ejemplo, en el último caso la

---

<sup>[4][4][4]</sup> *American Journal of Science*, 3d Ser. Vol. XXXIV, p. 383. 1887

distancia que recorre es  $l$  y en el primer caso es  $l(1 - \alpha)$ , entonces las primeras expresiones (1) y (2) deben ser multiplicadas por  $1 - \alpha$ . Despreciando  $\alpha p^2/V^2$  se obtiene

$$2 \frac{l}{V} \left( 1 + \frac{p^2}{2V^2} - \alpha \right) \quad (4)$$

La diferencia respecto de (2) — y toda objeción — se anularía cuando

$$\alpha = \frac{p^2}{2V^2} \quad (5)$$

Me parece que tal cambio en la longitud de los brazos, en el primer experimento de Michelson, y en el tamaño de la placa de piedra, no resulta inconcebible.

Ciertamente, ¿Qué es lo que determina el tamaño y la forma de un cuerpo sólido? Aparentemente, la intensidad de las fuerzas moleculares; cualquier causa que las modifique, podría modificar el contorno y el tamaño también. Actualmente, podemos suponer que en el éter intervienen fuerzas eléctricas y magnéticas actuando sobre él. No es innatural suponer que también actúan sobre las fuerzas moleculares, pero entonces se puede establecer una diferencia, si la línea que conecta a dos partículas que se mueven juntas a través del éter lo hacen en una dirección paralela a la dirección del movimiento de la Tierra o de forma perpendicular a él. Se puede ver fácilmente que un efecto  $p/V$  no es de esperar, pero un efecto del orden de  $p^2/V^2$  no está excluido y eso es exactamente lo que necesitamos.

Dado que no conocemos nada acerca de la naturaleza de las fuerzas moleculares, es imposible verificar la hipótesis. Lo único que podemos hacer — por supuesto, introduciendo más suposiciones más o menos plausibles, — es calcular la influencia del movimiento de materia ponderable sobre fuerzas eléctricas y magnéticas. Quizás valga mencionar que, cuando el resultado obtenido por las fuerzas eléctricas es transferido a las fuerzas moleculares, se obtiene exactamente el valor de  $\alpha$  dado más arriba.

Sea  $A$  un sistema de puntos materiales, que llevan ciertas cargas eléctricas y que se encuentran en reposo relativo respecto del éter y  $B$  el sistema de los mismos puntos, cuando se mueven en la dirección de un eje  $x$  a través del éter a una velocidad colectiva  $p$ . A partir de las ecuaciones que desarrollé<sup>[5]</sup>[5][5], uno puede deducir con qué fuerzas las partículas en el sistema actúan entre sí. El resultado puede ser expresado en la forma más simple, si uno introduce un tercer sistema  $C$  que está en reposo como  $A$  pero que difiere del último sistema por las mutuas posiciones de los puntos. El sistema  $C$  puede obtenerse a partir del  $A$  por una mutua expansión, por la cual todas las dimensiones en la

---

<sup>[5]</sup>[5]<sup>[5]</sup>Archives néerlandaises, T. XXV. p. 498.

dirección del eje  $x$  son  $1 + p^2/2V^2$  veces más largas mientras que las dimensiones perpendiculares permanecen sin cambios.

En lo concerniente a la relación entre las fuerzas en  $B$  y  $C$  se sigue que las componentes en la dirección del eje  $x$  son las mismas que en  $C$ , mientras que las componentes perpendiculares al eje  $x$  son  $1 - p^2/2V^2$  más grandes que en  $C$ .

Queremos transferir esto a las fuerzas moleculares, e imaginamos un cuerpo sólido como un sistema de puntos materiales, en equilibrio debido a la influencia de sus mutuas atracciones y repulsiones. El sistema  $B$  será un cuerpo moviéndose a través del éter. Las fuerzas que actúan sobre sus puntos materiales se anulan entre sí. Se sigue que este no puede ser el caso en  $A$ , sin embargo, en el sistema  $C$ , todas las fuerzas componentes perpendiculares al eje  $x$  cambia si uno pasa de  $B$  a  $C$ , pero el equilibrio no se altera si ellos cambian en la misma proporción. De este modo se puede ver que cuando  $B$  es el estado de equilibrio del cuerpo durante el desplazamiento a través del éter,  $C$  es el estado de equilibrio cuando el desplazamiento no existe. Por lo tanto, uno llega exactamente a la influencia del movimiento sobre las dimensiones, el cual se ha mostrado antes que es necesario para explicar el resultado del experimento de Michelson.

Por supuesto, no podemos atribuir gran importancia a este resultado; la transferencia a fuerzas moleculares de lo que hemos encontrado para las fuerzas eléctricas, puede ser muy riesgosa para algunos. Más aún, si queremos hacerlo, queda sin decisión si el movimiento de la Tierra acorta las dimensiones en una dirección — como se ha supuesto antes, — o elonga la longitud en la dirección perpendicular a aquella, suposición por la cual podría alcanzarse el mismo resultado.

De cualquier forma, resulta innegable que los cambios en las fuerzas moleculares, y consecuentemente el tamaño del cuerpo del orden de  $1 - p^2/2V^2$  son posibles. El experimento de Michelson pierde así su poder de verificación de la cuestión por el cual fue realizado. Si uno admite la teoría de Fresnel, entonces su significado radica más en el hecho que podemos aprender algo acerca del cambio de dimensiones con el movimiento.

Si  $p/V = 1/10000$ , entonces  $p^2/2V^2$  es del orden de doscientos millonésimos. Una contracción del diámetro de la Tierra por esta relación sería de alrededor de 6 cm. No podemos hablar sobre la observación de un cambio en la longitud de doscientos millonésimos cuando comparamos las longitudes de dos varillas de medición, y aun si el método de observación lo permitiera, entonces ese método tendría que ser por la yuxtaposición de dos varillas de medición. Pero nunca podríamos detectar los cambios en discusión, cuando ambas varillas están orientadas en la misma dirección. El único remedio es comparar la longitud de las varillas cuando están orientadas perpendicularmente entre sí. Si quisiéramos lograrlo por la observación de un fenómeno de interferencia (con un rayo de luz que viaja ida y vuelta a lo largo de la primera varilla y otro rayo luminoso que hace lo mismo a lo largo de la segunda varilla, estaríamos volviendo al experimento de Michelson. Sin embargo, la influencia

del cambio de longitud buscada, volvería a estar compensada por el cambio de las diferencias de fase determinadas por la expresión (3)

**SOBRE LA INFLUENCIA DEL MAGNETISMO SOBRE LA NATURALEZA DE LA  
LUZ EMITIDA POR UNA SUSTANCIA**

**POR  
DR. P. ZEEMAN**

*(Philosophical Magazine, Series 5, 43, p. 226, 1897\*)*

**CONTENT**

<b>Aparatos</b> .....	<b>68</b>
.....	
<b>Experimentos</b> .....	<b>68</b>
.....	
<b>Espectros de Emisión</b> .....	<b>68</b>
.....	
<b>Espectros de absorción</b> .....	<b>69</b>
.....	
<b>Naturaleza de los efectos</b> .....	<b>70</b>
.....	

---

\*\*\* §§ 1-10 Leídos ante la Academia de Ciencias at Ámsterdam, octubre 31, 1896, y los §§ 11-25, Noviembre 28, 1896.

<b><i>Espectros de banda</i></b> ..... ..	<b>71</b>
<b><i>Cambio de período</i></b> ..... ..	<b>72</b>
<b><i>Teoría de Lorentz</i></b> .. .. . .	<b>73</b>
<b><i>Solución de la ecuación de movimiento</i></b> .. .. . ..	<b>74</b>
<b><i>Verificación experimental</i></b> .. .. . .....	<b>76</b>
<b>Apéndice (Histórico)</b> .. .. . .....	<b>79</b>

## SOBRE LA INFLUENCIA DEL MAGNETISMO SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ EMITIDA POR UNA SUSTANCIA

POR  
DR. P. ZEEMAN

1. Hace varios años, en el curso de mis investigaciones sobre los fenómenos de Kerr, se me ocurrió averiguar si la luz de una llama que se somete a la acción del magnetismo podría sufrir algún cambio. El tren de razonamiento por el cual intenté ilustrarme a mí mismo la posibilidad de esto ocurra es de menor importancia en la actualidad,<sup>†</sup> en cualquier caso, me indujo a probar el experimento. Con un aparato antiguo, observé el espectro de una llama, coloreada con sodio, colocada entre los polos de un electroimán Ruhmkorff. El resultado fue negativo. Probablemente no debería haber intentado este experimento nuevamente, pero hace unos dos años, me llamó la atención la siguiente cita del bosquejo de Maxwell sobre la vida de Faraday. Allí (Maxwell, *Collected Works*, ii. P. 790) leemos: “Antes de describir este resultado, debemos mencionar que, en 1862, Faraday hizo de la relación entre el magnetismo y la luz el tema de su último trabajo experimental. Se esforzó, pero en vano, por detectar cualquier cambio en las líneas del espectro de una llama cuando un poderoso imán actuaba sobre la llama”. Si un Faraday<sup>‡</sup> pensara en la posibilidad de la relación mencionada anteriormente, tal vez podría valer la pena volver a intentar el experimento con los excelentes auxiliares de la espectroscopía que hay en la actualidad, ya que no estoy al tanto de que lo hayan hecho otros.<sup>\*\*\*\*\*</sup> Me tomaré la libertad de decir brevemente a los lectores de la revista *Philosophical Magazine* los resultados que he obtenido hasta la actualidad.

2. El electroimán utilizado fue uno fabricado por Ruhmkorff, de tamaño mediano. La corriente magnetizante suministrada por los acumuladores fue, en la mayoría de los casos de 27 amperios pero podría elevarse hasta 35 amperios. La luz utilizada fue analizada mediante una rejilla Rowland, con un radio de 10 pies, y con 14,438 líneas por pulgada. Se utilizó el primer espectro, y se observó con

---

<sup>†††</sup> Cf. §15 y §16

<sup>‡‡‡</sup> Ver Apéndice, la propia descripción que hace Faraday del experimento.

<sup>\*\*\*\*\*</sup> Ver Apéndice.



un ocular micrométrico con un cable transversal vertical. Una hendidura ajustable con precisión estaba colocada cerca de la fuente de luz bajo la influencia del magnetismo.

3. Entre los polos parabólicos de un electroimán, se colocó la parte media de la llama de un mechero Bunsen. Un pedazo de asbesto impregnado con sal común se colocó en la llama de tal manera que las dos líneas D se vieron como líneas estrechas y definidas sobre el fondo oscuro. La distancia entre los polos era de unos 7 mm. Al accionar la corriente, las dos líneas D se ampliaban claramente. Si se cortaba la corriente, volvían a su posición original. La aparición y la desaparición de la ampliación fueron simultáneas con el encendido y apagado de la corriente. El experimento podría repetirse un número indefinido de veces.

La llama del Bunsen se cambió luego por una llama de gas de carbón alimentado con oxígeno. De la misma manera que en el § 3, el asbesto empapado con sal común se introdujo en la llama. La llama ascendía verticalmente entre los polos. Si se volvía a poner la corriente, las líneas D se ensanchaban, convirtiéndose quizás tres o cuatro veces su ancho anterior.

Con las líneas rojas de litio, utilizado como carbonato, se observaron fenómenos totalmente análogos.

Posiblemente el fenómeno observado (§§ 3, 4, 5) no debería considerarse como algo sin importancia. Se puede razonar de la siguiente manera: el ensanchamiento de las líneas del espectro de un vapor incandescente se produce al aumentar la intensidad de la energía radiante y al aumentar la temperatura.\* Ahora, bajo la influencia del imán, el contorno de la llama indudablemente cambia (como se observa fácilmente), por lo tanto, la temperatura, y posiblemente también la densidad del vapor, cambia. Por lo tanto, uno podría estar inclinado a explicar de esta manera el fenómeno.

7. Otro experimento no se explica tan fácilmente. Un tubo de porcelana, esmaltado por dentro y por fuera, se coloca horizontalmente entre los polos, con su eje perpendicular a la línea que une los polos. El diámetro interno del tubo es de 18 mm, El externo de 22 mm. La longitud del tubo es de 15 cm. Las tapas se atornillan en cada extremo del tubo;† estas tapas están cerradas por placas de vidrio paralelas en un extremo y están rodeadas de pequeñas chaquetas de agua. De esta manera, por medio de una corriente de agua, las tapas de cobre y las placas de vidrio pueden mantenerse suficientemente frías mientras el tubo de porcelana se vuelve incandescente. En la vecindad de las placas de vidrio, los tubos laterales provistos de grifos están sujetos a las tapas de cobre. Con un gran mechero Bunsen, el tubo podría hacerse incandescente en una longitud de 8 cm. La luz de una lámpara eléctrica, colocada de lado a unos dos metros del electroimán, para evitar una acción perturbadora en el arco, se hizo pasar a través del tubo por medio de un espejo metálico. El espectro del arco se formó por medio de la rejilla. Con el ocular, están enfocadas las líneas D. Esto puede hacerse con mucha precisión, ya

---

\* Cf. también Pringsheim (*Wied. Ann.* XLV. P- 457, 1892).

† Pringsheim usó tubos similares en sus investigaciones relativas a la radiación en gases, *l.c.*, p. 430.

que en el centro de las líneas D brillantes se ven a menudo las líneas estrechas invertidas. Ahora se introdujo un trozo de sodio en el tubo. La llama de Bunsen se enciende y la temperatura comienza a subir. Un vapor coloreado pronto comienza a llenar el tubo, siendo primero violeta, luego de color verde y finalmente prácticamente invisible a simple vista. La absorción pronto disminuye a medida que aumenta la temperatura. La absorción es especialmente grande en el vecindario de las líneas D. Por fin, las dos líneas D oscuras son visibles. En este momento, los polos del electroimán se empujan cerca del tubo, su distancia ahora es de unos 24 mm. Las líneas de absorción ahora son bastante agudas en la mayor parte de su longitud. En la parte superior son más gruesos, donde se observó el espectro de los vapores más bajos y más densos. Inmediatamente después del cierre de la corriente, las líneas se ensanchan y parecen más negras; Si se corta la corriente, recuperan inmediatamente su agudeza inicial. El experimento podría repetirse varias veces, hasta que todo el sodio hubiera desaparecido. La desaparición del sodio se atribuye principalmente a la acción química entre este y el acristalamiento del tubo. Para otros experimentos, por lo tanto, se utilizaron tubos sin esmaltar.

8. Tal vez se pueda tratar de explicar el último experimento (§ 7) de esta manera: es cierto que el tubo utilizado no tenía la misma temperatura en la parte superior e inferior; Además, de la forma de las líneas D (§ 7) parece que la densidad del vapor de sodio es diferente a diferentes alturas. Por lo tanto, ciertamente las corrientes de convección causadas por la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior estaban presentes. Bajo ciertas suposiciones plausibles, uno puede calcular que, al ponerse el electroimán, las diferencias de presión se originan en el tubo del mismo orden de magnitud que las causadas por la diferencia de temperatura. Por lo tanto, la magnetización empujará, e. g., la capa más densa en la parte inferior en la dirección del eje del tubo. Las líneas se ensanchan; porque su ancho a una altura dada está determinado principalmente por el número de partículas incandescentes a esa altura en la dirección del eje del tubo. Aunque esta explicación todavía deja algunas dificultades, ciertamente se puede decir algo al respecto.

9. La explicación del ensanchamiento de las líneas intentadas en el § 8 ya no es aplicable a la siguiente variación del experimento, en el que se utilizó un tubo sin esmaltar. El diámetro interno del tubo, aproximadamente 1 mm de espesor, era de 10 mm. Los polos del electroimán se podían mover hasta una distancia de 14 mm El tubo se calentó ahora con el soplete en lugar de con el mechero Bunsen, y en la parte media se puso al rojo vivo. El soplete y el diámetro más pequeño del tubo hicieron que sea más fácil llevar las partes superior e inferior a la misma temperatura. Esto ahora es más alto que antes (§ 7), y las líneas de sodio permanecen visibles continuamente.<sup>§</sup> Ahora se puede esperar hasta que la densidad del vapor de sodio sea la misma en varias alturas. Al girar el tubo continuamente alrededor de su eje, he promovido esto aún más. Las líneas de absorción ahora son igualmente amplias de arriba a abajo. Cuando se puso el electroimán, las líneas de absorción se ampliaron inmediatamente a lo largo de toda su longitud. Ahora la explicación a la manera del § 8 falla.

---

<sup>§</sup> Pringsheim, *l.c.*, p. 456.

10. Me gustaría haber estudiado la influencia del magnetismo en el espectro de un sólido. El óxido de sodio tiene, como descubrieron Bunsen o Bahr, la notable propiedad de dar por incandescencia un espectro con líneas brillantes. Con la dispersión utilizada, sin embargo, los bordes de estas líneas eran demasiado confusos para cumplir mi propósito.

11. Los diferentes experimentos de los §§ 3 a 9 hacen cada vez más probable que la absorción y, por lo tanto, también las líneas de emisión de un vapor incandescente se amplíen por la acción del magnetismo. Ahora bien, si este es realmente el caso, entonces, por la acción del magnetismo sobre las vibraciones libres de los átomos, que son la causa del espectro lineal, se deben superponer otras vibraciones de período cambiado. Creo que es realmente inevitable admitir esta acción específica del magnetismo, creo, en el resto del presente trabajo.

12. A partir de la representación que me había formado de la naturaleza de las fuerzas que actúan en el campo magnético sobre los átomos, me pareció seguir eso con un espectro de banda y con fuerzas magnéticas externas, los fenómenos que había encontrado con una línea El espectro no ocurriría.

Es muy probable que la diferencia entre un espectro de bandas y uno lineal no sea de tipo cuantitativo sino cualitativo.<sup>¶</sup> En el caso de un espectro de bandas, las moléculas son complicadas; en el caso de un espectro lineal, las moléculas ampliamente separadas contienen solo unos pocos átomos. Investigaciones posteriores han demostrado que la representación que había formado de la causa del ensanchamiento en el caso de un espectro de líneas en general era realmente cierta.

13. Se colocó un tubo de vidrio, cerrado en ambos extremos por placas de vidrio con caras paralelas y que contenía un trozo de yodo, entre los polos del electroimán Ruhmkorff de la misma manera que el tubo de porcelana en el § 7. Una pequeña llama debajo del tubo vaporizó el yodo, el vapor violeta llenó el tubo.

Mediante luz eléctrica se pudo examinar el espectro de absorción. Como la temperatura es baja, este es el espectro de banda. Con la alta dispersión utilizada, se ven en las bandas un gran número de líneas oscuras finas. Si la corriente alrededor del imán está cerrada, no se observan cambios en las líneas oscuras, lo que es contrario al resultado de los experimentos con vapor de sodio.

La ausencia del fenómeno en este caso respalda la explicación de que, incluso en el primer experimento, con vapor de sodio (§ 7), las corrientes de convección no tuvieron influencia. Porque en el caso que ahora se considera la convección, las corrientes originadas por el magnetismo, que creo que es posible en ese caso, aparentemente son insuficientes para causar un cambio en el espectro; sin

---

<sup>¶</sup> Kayser en Winkelmann's *Handbuch*, ii. 1, p. 421.

embargo, aunque no podía verlo en la apariencia de las líneas de absorción (cf. § 7), el espectro de banda es, como el espectro de línea, muy sensible a los cambios de densidad y temperatura.

14. Aunque los medios a mi disposición no me permitieron ejecutar más que una medición aproximada preliminar, aun así, me pareció importante determinar aproximadamente el valor del cambio magnético del período.

El ensanchamiento de las líneas de sodio a ambos lados ascendió a aproximadamente  $1/40$  de la distancia entre dichas líneas, siendo la intensidad del campo magnético de aproximadamente 104 unidades C. G. S. Por lo tanto, de aquí se sigue un cambio magnético positivo y negativo de  $1/40000$  del período.

15. El tren de razonamiento mencionado en (1), por el cual me indujeron a buscar una influencia del magnetismo, fue al principio el siguiente: si la hipótesis es cierta de que en un campo magnético está ocurriendo un movimiento rotatorio del éter, el eje de rotación está en la dirección de las fuerzas magnéticas (Kelvin y Maxwell), y si la radiación de la luz se puede imaginar cómo causada por el movimiento de los átomos, en relación al centro de masa de la molécula, girando en todo tipos de órbitas, supongamos círculos, por simplicidad, entonces el período, o, lo que termina siendo lo mismo, el tiempo de describir la circunferencia de estos círculos, estará determinado por las fuerzas que actúan entre los átomos, y luego se producirán desviaciones del período a ambos lados a través de la influencia de las fuerzas perturbadoras entre el éter y los átomos. Por supuesto, el signo de la desviación estará determinado por la dirección del movimiento, como se ve a lo largo de las líneas de fuerza. La dirección será mayor cuanto más se aproxime el plano del círculo a una posición perpendicular a las líneas de fuerza.

16. Algo más tarde aclaré el tema al representarme a mí mismo la influencia ejercida en el período de un sistema vibratorio, si este está vinculado con otro en un movimiento giratorio rápido. Lord Kelvin (ya hace 40 años)<sup>‡</sup> dio la solución del siguiente problema: dejar que los dos extremos de una cuerda de cualquier longitud se unan a dos puntos en los extremos de un brazo horizontal hecho para girar alrededor de un eje vertical a través de su punto medio a una velocidad angular constante, y dejar que un segundo cable que tenga un punto de material se una al centro del primer cable. El movimiento ahora se investiga en el caso en que el punto está infinitamente perturbado desde su posición de equilibrio. Con una gran velocidad angular, la solución se vuelve bastante simple. Las vibraciones circulares del punto en direcciones contrarias tienen períodos ligeramente diferentes. Si para el péndulo doble sustituimos un átomo aluminífero, y para el brazo giratorio el movimiento de rotación sobre las líneas de fuerza magnéticas, la relación del problema mecánico con nuestro caso será clara.

---

<sup>‡</sup> *Proc. Roy. Soc.* 1856.

No es necesario demostrar que las consideraciones antes mencionadas son, como mucho, de algún valor como indicaciones de casos algo análogos. Sin embargo, los comunico porque fueron el primer motivo de mis experimentos.

17. Una explicación real de los cambios magnéticos del período me pareció seguir de la teoría del Prof. Lorentz.<sup>†</sup>

En esta teoría se supone que en todos los cuerpos están presentes pequeñas partículas cargadas eléctricamente con una masa definida, que todos los fenómenos eléctricos dependen de la configuración y el movimiento de estos "iones", y que las vibraciones de luz son vibraciones de estos iones. Luego, la carga, la configuración y el movimiento de los iones determinan completamente el estado del éter. Un dado ion, moviéndose en un campo magnético, experimenta fuerzas mecánicas del tipo mencionado anteriormente, y estas deben explicar la variación del período. El Prof. Lorentz, a quien comuniqué estas consideraciones, de inmediato me informó amablemente de la manera en que, según su teoría, debe calcularse el movimiento de un ion en un campo magnético, y me señaló que, si la explicación que surge de su teoría es correcta, los bordes de las líneas del espectro deben estar polarizados circularmente. La magnitud del ensanchamiento podría usarse para determinar la relación entre carga y masa, que se atribuirá en esta teoría a una partícula que emite las vibraciones de la luz.

La conclusión del Prof. Lorentz, extremadamente notable, mencionada anteriormente en relación con el estado de polarización en las líneas magnéticamente ensanchadas ha sido confirmada completamente por los experimentos (§ 20).

18. Ahora procederemos a establecer las ecuaciones de movimiento de un ion vibratorio, cuando se mueve en el plano  $(x, y)$  en un campo magnético uniforme en el que la fuerza magnética es paralela en todas partes al eje de  $z$  e igual a  $H$ . Los ejes se eligen de modo que, si  $x$  se dibuja hacia el este, y hacia el norte,  $z$  está orientado hacia arriba.

Sea  $e$  la carga (en unidades electromagnéticas) del ion cargado positivamente,  $m$  su masa. Las ecuaciones de movimiento relativo son:

---

<sup>†</sup> Lorentz, *La Théorie électromagnétique de Maxwell*. Leyden, 1892; y *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegenten Körpern*. Leyden, 1895.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 x + eH \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k^2 y + eH \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1)^\ddagger$$

Los primeros términos del segundo miembro expresan las fuerzas elásticas que retraen a los iones a sus posiciones de equilibrio; Los segundos términos dan las fuerzas mecánicas debidas al campo magnético. Están satisfechos por

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha e^{st} \\ y &= \beta e^{st} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ya que

$$\left. \begin{aligned} ms^2 \alpha &= k^2 \alpha + eH s \beta \\ ms^2 \beta &= k^2 \beta + eH s \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

cuando  $m$ ,  $k$  y  $e$  son magnitudes conocidas.

Para nosotros, el período  $T$  es particularmente interesante. Si  $H$  es 0, de la (3) se sigue (aproximadamente) que

$$s = i \frac{k}{\sqrt{m}} = i \frac{2\pi}{T}$$

o

$$T = \frac{2\pi\sqrt{m}}{k} \quad (4)$$

Si  $H$  no es 0, de la (3) se obtiene, en forma aproximada

$$s = i \frac{k}{\sqrt{m}} \left( 1 \mp \frac{eH}{2k\sqrt{m}} \right)$$

En este caso, llamando  $T'$  al período, tenemos

---

\*\*\* Estas ecuaciones son similares a las del péndulo de Foucault y, por supuesto, conducen a resultados similares.

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{m}}{k} \left( 1 \pm \frac{eH}{2k\sqrt{m}} \right) \quad (5)$$

Por lo tanto, la relación entre el cambio de período y el período original se convierte en

$$\frac{eH}{2k\sqrt{m}} = \frac{e}{m} \frac{HT}{4\pi} \quad (6)$$

Una solución particular de (1) es la que representa el movimiento de los iones como circular. Si giran en la dirección positiva (es decir, en la dirección de las manecillas de un reloj, para un observador parado al lado hacia el cual corren las líneas de fuerza), el período es algo menor que si gira en la dirección negativa. El período en el primer caso está determinado por el valor de (5) con el signo menos, en el segundo con el signo más.

La solución general de (1) muestra que, además de círculos, los iones también describen órbitas elípticas que giran lentamente. En el caso general, el movimiento original del ion, que tiene una posición arbitraria en el espacio, es perfectamente claro que la proyección del movimiento en el plano de  $(x, y)$  tiene el mismo carácter. El movimiento resuelto en la dirección del eje de  $z$  es un movimiento armónico simple, independiente y que no perturba al que está en el plano de  $(x, y)$  y, por lo tanto, no está influenciado por las fuerzas magnéticas. Por supuesto, la consideración del movimiento de un ion dado ahora solo debe considerarse como el primer esbozo de la teoría de los movimientos lumínicos.

19. Imagine a un observador mirando una llama colocada en un campo magnético en una dirección tal que las líneas de fuerza se dirigen hacia él o desde él.

Supongamos que dicho observador pudiera ver los iones mismos del § 18 mientras giran; entonces se observará lo siguiente: hay algunos iones que se mueven en círculos y, por lo tanto, emiten luz polarizada circularmente; si el movimiento gira en la dirección positiva, el período será, por ejemplo, más largo que sin campo magnético; si gira en la dirección negativa, será más corto. También habrá iones con movimiento aparentemente estacionarios que realmente se mueven paralelos a las líneas de fuerza con un período inalterado. En tercer lugar, habrá iones que parecen moverse en órbitas elípticas.

Si se desea conocer el estado del éter que producen los iones en movimiento, se puede usar la siguiente regla, deducida por el Prof. Lorentz de la teoría general: supongamos que hay un ion P, cuya posición de equilibrio es P0: tiene dos o más movimientos al mismo tiempo, a saber, deje que el vector POP siempre se obtenga agregando los vectores POP que deberían ocurrir en cada uno de los movimientos componentes en ese momento; entonces el estado en el éter a una distancia muy grande

en comparación con POP se obtendrá superponiendo los estados que ocurrirían en los dos casos tomados por separado.

Por lo tanto, se deduce en primer lugar que un movimiento circular de un ion proporciona luz polarizada circularmente en puntos del eje del círculo.

Además, podemos elegir, en vez de las órbitas elípticas consideradas anteriormente, un modo de giro más adecuado para nuestro propósito. Uno puede resolver el movimiento del ion, existente antes de la aplicación de la fuerza magnética, en un movimiento armónico rectilíneo paralelo al eje de  $z$  y dos movimientos circulares (en sentidos opuestos) en el plano de  $(x, y)$ .

El primer tipo de movimiento permanece sin cambios bajo la influencia de la fuerza magnética. En cambio, los períodos de los movimientos circulares cambian.

Por la acción de la rejilla, las vibraciones originadas por el movimiento de los iones se clasifican según el período, y por lo tanto, el movimiento completo se divide en tres grupos. La línea será un triplete. En cualquier caso, uno puede esperar que la línea del espectro sea más ancha que en ausencia del campo magnético, y que los bordes emitirán luz polarizada circularmente.\*

20. Una confirmación de la última conclusión puede tomarse ciertamente como una confirmación de la idea rectora de la teoría del profesor Lorentz. Para decidir este punto por experimento, se colocó el electroimán del § 2, pero ahora con los polos perforados, de modo que los ejes de los polos estuvieran en línea recta con el centro de la rejilla. En el espectro, las líneas de sodio se observaron con un ocular con un cable transversal vertical. Entre la rejilla y el ocular se colocó la placa de cuarto de ondulación y Nicol que utilicé anteriormente en mi investigación de la luz que normalmente se refleja en un espejo de hierro polarizado.†

La placa y el Nicol se colocaron relativamente de tal manera que la luz polarizada circularmente en sentido horario, se apagase. Ahora, de acuerdo con lo anterior, en un extremo, la línea ensanchada debería estar polarizada circularmente en sentido horario y en el otro extremo en sentido antihorario. Rotación el analizador a más de  $90^\circ$ , se transmitirá la luz que se extinguió por primera vez, y viceversa. O, si al principio el borde derecho de la línea es visible en el aparato, una inversión de la dirección de la corriente hace visible el borde izquierdo. El alambre cruzado del ocular se colocó en

---

\* Posteriormente, me enteré que Stoney, *Trans. Roy. Soc. Dublin*, iv., intentó explicar la existencia de dobletes y tripletes en un espectro debido a la rotación de los “electrones” en órbitas elípticas bajo la influencia de fuerzas perturbadoras.

† Zeeman, “Communications of the Leyden Laboratory”, n° 15.



la línea brillante. Se comprobó que ¡En la inversión de la corriente, la línea visible se movió! Este experimento puede repetirse varias veces.

21. Una pequeña variación del experimento anterior es la siguiente. Manteniendo sin cambios la posición de la placa de cuarto de onda, se invierte la posición del analizador. Se observa que, durante una revolución, la línea ensanchada cambia de dos veces más ancha a dos veces más fina.

22. Desde la posición del § 20, el electroimán se giró 90° en un plano horizontal. Las líneas de fuerza ahora son perpendiculares a la línea que une la ranura con la rejilla. Los bordes de la línea ensanchada ahora parecían estar polarizados planarmente. Al menos, en la medida en que el aparato usado permitía ver, el plano de polarización era perpendicular a la línea espectral. Este fenómeno resulta inmediatamente evidente a partir de las consideraciones del § 19. Las órbitas circulares de los iones, siendo perpendiculares a las líneas de fuerza, ahora se ven en sus bordes.

23. Los experimentos en los §§ 20 a 22 pueden considerarse como una prueba de que las vibraciones de la luz son causadas por el movimiento de iones, tal como lo introdujo el Prof. Lorentz en su teoría de la electricidad. A partir del ensanchamiento medido (§ 14) por medio de la relación (6), ahora se puede deducir la relación  $e/m$ . Parece que  $e/m$  es del orden de magnitud  $10^7$  unidades CGS electromagnéticas. Por supuesto, este resultado es solo para ser considerado como una primera aproximación.

24. Del experimento del § 20 se puede deducir si el ion que gira es positivo o negativo.

Si las líneas de fuerza están dirigidas hacia la rejilla, los rayos polarizados circularmente en sentido horario parecían tener el período más largo. Por lo tanto, en relación con el § 18, se deduce que los iones negativos\* giran, o al menos describen la órbita mayor.

25. Ahora que la magnetización de las líneas de un espectro puede interpretarse a la luz de la teoría del Prof. Lorentz, las consideraciones adicionales se vuelven especialmente atractivas. Se presenta una serie de cuestiones adicionales. Parecen muy prometedoras las investigaciones de los movimientos de los iones de diversas sustancias, bajo diferentes condiciones de temperatura y presión, con diferentes intensidades de magnetización. La investigación adicional también deberá decidir en qué medida las fuertes fuerzas magnéticas existentes, según algunos, en la superficie del sol pueden cambiar su espectro.

Los experimentos descritos se han realizado en el Laboratorio de Física de Leyden, a cuyo Director, el Prof. Kamerlingh - Onnes, quiero agradecerle su continuo interés en el presente tema.

Ámsterdam, enero de 1897.



## **ANEXO E.**

### **Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento**

#### **A. Einstein**

Se sabe que cuando la electrodinámica de Maxwell – tal como se suele entender actualmente – se aplica a cuerpos en movimiento, aparecen asimetrías que no parecen estar en correspondencia con los fenómenos observados. Pensemos, por ejemplo, en la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. En este caso, el fenómeno que se observa depende solamente del movimiento relativo

entre el conductor y el imán, mientras que de acuerdo a la interpretación común se deben distinguir claramente dos casos muy diferentes, dependiendo de cuál de los dos cuerpos se mueva. Si se mueve el imán mientras que el conductor se encuentra en reposo, alrededor del imán aparece un campo eléctrico con cierto valor para su energía. Este campo eléctrico genera una corriente en el lugar donde se encuentre el conductor. Pero si el imán está en reposo y el conductor se mueve, alrededor del imán no aparece ningún campo eléctrico, sino que en el conductor se produce una fuerza electromotriz que en sí no corresponde a ninguna energía, pero da lugar a corrientes eléctricas que coinciden en magnitud y dirección con las del primer caso, suponiendo que el movimiento relativo es igual en cada uno de los casos bajo consideración.

Otros ejemplos de esta índole, así como los intentos infructuosos para constatar un movimiento de la Tierra con respecto al “medio de propagación de la luz” permiten suponer que no solamente en Mecánica sino también en Electrodinámica ninguna de las propiedades de los fenómenos corresponde al concepto de reposo absoluto. Más bien debemos suponer que para todos los sistemas de coordenadas, en los cuales son válidas las ecuaciones mecánicas, también tienen validez las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, tal como ya se ha demostrado para las magnitudes de primer orden. Queremos llevar esta suposición (cuyo contenido será llamado de ahora en adelante “principio de la relatividad”) al nivel de hipótesis y además introducir una hipótesis adicional que solamente a primera vista parece ser incompatible con el principio de la relatividad. Dicha hipótesis adicional sostiene que la luz en el espacio vacío siempre se propaga con cierta velocidad  $V$  que no depende del estado de movimiento del emisor. Basándonos en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo, estas dos hipótesis son suficientes para derivar una electrodinámica de cuerpos en movimiento que resulta ser sencilla y libre de contradicciones. La introducción de un “éter” resultaría ser superflua puesto que de acuerdo a los conceptos a desarrollar no es necesario introducir un “espacio en reposo absoluto”, ni tampoco se asocia un vector de velocidad a ninguno de los puntos del espacio vacío en los que se llevan a cabo procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se basa – como cualquier otra electrodinámica – en la cinemática del cuerpo rígido porque las afirmaciones de cualquier teoría involucran relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. El que estas circunstancias no hayan sido consideradas en forma apropiada es la raíz de las dificultades con las que actualmente debe luchar la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

## **I. Cinemática**

### **§ 1. Definición de simultaneidad**

Supongamos un sistema de coordenadas en el cual se valen las ecuaciones mecánicas de Newton. A este sistema de coordenadas lo llamaremos “sistema en reposo” a fin de distinguirlo de otros sistemas que se introducirán más adelante y para precisar la presentación.

Si un punto material se encuentra en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición se puede determinar y expresar en coordenadas cartesianas mediante escalas rígidas, utilizando la geometría euclidiana. Cuando queremos describir el movimiento de un punto material, especificamos los valores de sus coordenadas en función del tiempo. Será necesario tener en cuenta que una descripción matemática de esta índole tiene un sentido físico solamente cuando con anterioridad se ha aclarado lo que en este contexto se ha de entender bajo “tiempo”. Debemos tener en cuenta que todas nuestras afirmaciones en las cuales el tiempo juega algún papel, siempre son afirmaciones sobre eventos simultáneos. Por ejemplo, cuando digo “Ese tren llega aquí a las 7,” esto significa algo así como: “El momento en que la manecilla pequeña de mi reloj marca las 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos.”<sup>1</sup>

Podría parecer que todas las dificultades relacionadas con la definición del “tiempo” se superarían si en lugar de “tiempo” utilizara “la posición de la manecilla pequeña de mi reloj.” De hecho, una definición de este tipo sería suficiente en caso de que se trate de definir un tiempo exclusivamente para el lugar en el cual se encuentra el reloj; no obstante, esta definición ya no sería suficiente en cuanto se trate de relacionar cronológicamente series de eventos que ocurren en lugares diferentes, o – lo que implica lo mismo – evaluar cronológicamente eventos que ocurren en lugares distantes del reloj. No obstante, podríamos sentirnos satisfechos si evaluáramos cronológicamente los eventos mediante el reloj de un observador que se encuentra en el origen de coordenadas y le asigna la posición correspondiente de la manecilla del reloj a cada uno de los eventos a evaluar, en el momento en que recibe una señal de luz que proviene del evento y se propaga en el espacio vacío. Sin embargo, como lo demuestra la experiencia, una asignación de esta índole tiene el inconveniente de no ser independiente del observador equipado con el reloj. Mediante la siguiente observación llegaremos a una especificación mucha más práctica.

Si en el punto  $A$  del espacio se encuentra un reloj, un observador que se encuentre en  $A$  puede evaluar cronológicamente los eventos en la vecindad inmediata de  $A$ , buscando las posiciones de la manecilla del reloj que correspondan simultáneamente a estos eventos. Si en el punto  $B$  del espacio también se encuentra un reloj – queremos añadir “un reloj de exactamente la misma naturaleza como el que se encuentra en  $A$ ” – también es posible realizar una evaluación cronológica de los eventos en la vecindad inmediata de  $B$  mediante un observador que se encuentra en  $B$ . Sin embargo, sin especificaciones adicionales no es posible comparar cronológicamente el evento en  $A$  con el evento en  $B$ ; hasta ahora hemos definido un “tiempo  $A$ ” y un “tiempo  $B$ ”, pero no un “tiempo” común para  $A$  y  $B$ .

---

<sup>1</sup> Aquí no se discutirá la imprecisión que se encuentra implícita en el concepto de simultaneidad de dos eventos en (aproximadamente) el mismo lugar y que de igual manera se debe conciliar mediante una abstracción.

Este último tiempo se puede definir estableciendo por definición que el “tiempo” que necesite la luz para viajar de  $A$  hasta  $B$  sea igual al “tiempo” para pasar de  $B$  hasta  $A$ . Supongamos que una señal de luz parte de  $A$  hacia  $B$  en el “tiempo  $A$ ”  $t_A$ , llega a  $B$  y se refleja de regreso hacia  $A$  en el “tiempo  $B$ ”  $t_B$  y finalmente arriba al punto  $A$  en el “tiempo  $A$ ”  $t'_A$ . De acuerdo a la definición, los dos relojes estarán sincronizados si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \quad (1)$$

Supongamos que es posible formular sin contradicciones esta definición de sincronización para un número arbitrario de puntos, y que en general las siguientes relaciones son válidas:

1. Si el reloj en  $B$  está sincronizado con el reloj en  $A$ , entonces el reloj en  $A$  está sincronizado con el reloj en  $B$ .

2. Si el reloj en  $A$  está sincronizado con los relojes en  $B$  y en  $C$ , entonces los relojes en  $B$  y  $C$  también estarán sincronizados entre sí. De esta manera con ayuda de ciertos experimentos físicos (imaginarios) hemos establecido lo que se debe entender bajo relojes sincronizados que se encuentran en reposo en diferentes lugares y, por ende, obviamente hemos obtenido una definición de “simultáneo” y de “tiempo”. El “tiempo” de un evento es el dato de un reloj que se encuentra en reposo en el mismo lugar y el mismo momento del evento; dicho reloj debe estar sincronizado, para todas las determinaciones del tiempo, con un reloj específico que se encuentre en reposo.

Además, basándonos en el experimento asumimos que la magnitud

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V \quad (2)$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Lo importante es que hemos definido el tiempo mediante un reloj que se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo; debido a su correspondencia con un sistema en reposo, al tiempo que acabamos de definir le llamaremos “el tiempo del sistema en reposo”.

## § 2. Sobre la relatividad de la longitud y el tiempo

Las siguientes reflexiones se basan en el principio de la relatividad y el principio de la constancia de la velocidad de la luz, los cuales formularemos de la siguiente manera.

1. Las leyes de acuerdo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos no dependen de si estos cambios de estado se refieren a uno u otro de dos sistemas de coordenadas que se encuentran en movimiento relativo de traslación uniforme.

2. Cualquier rayo de luz se propaga en un sistema de coordenadas en “reposo” con cierta velocidad  $V$ , independientemente de si este rayo de luz ha sido emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. En este caso

$$\text{velocidad} = \frac{\text{trayectoria de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}, \quad (3)$$

donde el concepto de “intervalo de tiempo” se debe entender en el contexto de la definición presentada en § 1.

Consideremos una varilla rígida en reposo de longitud  $l$ , la cual se determina igualmente mediante una escala de medición en reposo. Imaginémonos ahora el eje de la varilla situado sobre el eje  $X$  del sistema de coordenadas en reposo y supongamos que la varilla se traslada uniformemente (con velocidad  $v$ ) y de forma paralela al eje  $X$  en la dirección de crecimiento de la coordenada  $x$ . Ahora nos preguntamos cuál será la longitud de la varilla en *movimiento*, suponiendo que esta longitud se determina mediante las siguientes dos operaciones:

a) El observador se desplaza junto con la escala mencionada anteriormente y la varilla bajo consideración y efectúa la medición de la longitud superponiendo directamente la escala sobre la varilla, justamente de la misma manera como si la varilla, la escala y el observador se encontraran en reposo.

b) El observador determina los puntos del sistema en reposo en los cuales se encuentran los extremos de la varilla en determinado tiempo  $t$ , utilizando para ello relojes que no se mueven con respecto al sistema en reposo y han sido sincronizados de acuerdo al procedimiento del § 1. La distancia entre estos dos puntos, determinada mediante la escala en reposo que ya hemos utilizado en este caso, también es una longitud que se puede designar como la “longitud de la varilla”. De acuerdo al principio de la relatividad, la longitud a determinar en la operación a), que llamaremos “longitud de la varilla en el sistema en movimiento”, debe ser igual a la longitud  $l$  de la varilla en reposo.

La longitud a especificar en la operación b), que llamaremos “longitud de la varilla (en movimiento) en el sistema en reposo”, será determinada en base a nuestros dos principios y se demostrará que su valor es diferente de  $l$ .

La cinemática de uso general asume tácitamente que las longitudes determinadas mediante las operaciones arriba mencionadas son exactamente iguales o, en otras palabras, desde el punto de vista geométrico un cuerpo rígido en movimiento en el momento  $t$  se puede reemplazar completamente por el mismo cuerpo cuando se encuentra en reposo en alguna posición.

Supongamos además que en los extremos ( $A$  y  $B$ ) de la varilla se colocan relojes sincronizados con los relojes del sistema en reposo, es decir, en un instante dado sus indicaciones corresponden al

“tiempo del sistema en reposo” en las posiciones donde resulte que se encuentren. Por lo tanto, estos relojes están “sincronizados en el sistema en reposo”.

5 Supongamos además, que con cada reloj se mueve un observador y que estos observadores aplican a cada uno de los relojes el criterio establecido en § 1 para la sincronización de dos relojes. En el instante de tiempo<sup>2</sup>  $t_A$  un rayo de luz parte de  $A$ , luego se refleja en el punto  $B$  en el momento  $t_B$  y regresa al punto  $A$  al tiempo  $t'_A$ . Teniendo en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz obtenemos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad (4)$$

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}, \quad (5)$$

donde  $r_{AB}$  representa la longitud de la varilla en movimiento, medida en el sistema en reposo. Por lo tanto, los observadores que se desplazan con la varilla determinarán que los relojes no están sincronizados, mientras que los observadores en el sistema en reposo los declararían como sincronizados. De esta manera vemos que no podemos asignar un significado absoluto al concepto de simultaneidad, y que dos eventos simultáneos desde el punto de vista de un sistema de coordenadas ya no se pueden interpretar como simultáneos desde un sistema de coordenadas que se mueve relativamente con respecto al sistema en reposo.

### § 3. Teoría de la transformación de coordenadas y del tiempo de un sistema en reposo a otro sistema que se encuentra en movimiento traslacional uniforme con respecto al primero.

Consideremos dos sistemas de coordenadas en el espacio “en reposo”, es decir, dos sistemas cada uno con tres líneas materiales rígidas que parten de un punto y son perpendiculares entre sí. Supongamos que los ejes  $X$  de ambos sistemas coinciden y los ejes  $Y$  y  $Z$  son respectivamente paralelos. Consideremos una escala rígida y un número de relojes en cada uno de los sistemas y supongamos

---

<sup>2</sup> En este caso “tiempo” significa “tiempo del sistema en reposo” y simultáneamente “indicación del reloj en movimiento que se encuentra en la posición que estamos considerando”.



que tanto las escalas como también los relojes de ambos sistemas son, de manera respectiva, exactamente iguales.

Al punto de origen de uno de los sistemas de coordenadas ( $k$ ) se le confiere una velocidad (constante)  $v$  en la dirección de crecimiento de la coordenada  $x$  del otro sistema ( $K$ ) que se encuentra en reposo. Igualmente, la velocidad se transfiere a los ejes de coordenadas, la escala en cuestión y a los relojes. A cada tiempo  $t$  del sistema en reposo  $K$  le corresponde una posición determinada de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría estamos facultados para suponer que el movimiento de  $k$  puede ser tal que los ejes del sistema en movimiento en el momento  $t$  (siempre se designa con “ $t$ ” el tiempo del sistema en reposo) son paralelos a los ejes del sistema en reposo.

Ahora imaginémonos que el espacio del sistema en reposo  $K$  se mide mediante la escala en reposo, e igualmente el del sistema en movimiento  $k$  mediante la escala que se mueve junto con él, y de esta manera se determinan las coordenadas  $x, y, z$  y  $\xi, \eta, \zeta$ , respectivamente. El tiempo  $t$  del sistema en reposo se determina para todos los puntos del sistema mediante los relojes que se encuentran en reposo en dicho sistema y con la ayuda de señales de luz tal como se describió en § 1; de igual forma el tiempo  $\tau$  del sistema en movimiento se determina para todos los puntos del sistema, en el cual se hallan relojes en reposo relativo con respecto al mismo sistema, utilizando el método mencionado en § 1 de señales de luz entre los puntos donde se encuentran dichos relojes.

Para cada sistema de valores  $x, y, z, t$ , el cual determina completamente la posición y el tiempo de un evento en el sistema en reposo, corresponde un sistema de valores  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  que fija dicho evento con respecto al sistema  $k$ . Ahora el problema a resolver consiste en encontrar el sistema de ecuaciones que relaciona estas magnitudes.

En primer lugar, es claro que las ecuaciones deben ser lineales debido a las propiedades de homogeneidad que le asignamos al espacio y al tiempo.

Si fijamos que  $x' = x - vt$ , es claro que a un punto en reposo en el sistema  $k$  le corresponde cierto sistema de valores  $x', y, z$  que es independiente del tiempo. Primero determinaremos  $\tau$  como función de  $x', y, z$  y  $t$ . A tal fin debemos expresar en forma de ecuaciones el hecho de que  $\tau$  no es nada más que el compendio de los datos de los relojes en reposo en el sistema  $k$ , los cuales han sido sincronizados de acuerdo a la regla especificada en § 1.

Supongamos que desde el origen del sistema  $k$  se emite un rayo de luz en el momento  $\tau_0$  a lo largo del eje  $X$  hacia  $x'$  y desde allí en el momento  $\tau_1$  se refleja hacia el origen de coordenadas a donde llega en el momento  $\tau_2$ . Entonces se debe cumplir que

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \quad (6)$$

o incluyendo los argumentos de la función  $\tau$  y aplicando el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el sistema en reposo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \tau(0, 0, 0, t) + \tau \left( 0, 0, 0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] \\ = \tau \left( x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v} \right) \end{aligned}$$

Toando a  $x'$  infinitamente pequeño, de esta última ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (7)$$

o

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Debemos anotar que en lugar del origen de coordenadas podríamos haber seleccionado cualquier otro punto como punto de salida del rayo de luz y, por lo tanto, la ecuación recién obtenida se cumple para todos los valores de  $x'$ ,  $y$ ,  $z$ .

Considerando que desde el punto de vista del sistema en reposo la luz siempre se propaga con la velocidad  $\sqrt{V^2 - v^2}$  a lo largo de los ejes  $Y$  y  $Z$ , un análisis similar aplicado a estos ejes nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\tau$  es una función lineal, de estas ecuaciones obtenemos

$$\tau = a \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right), \quad (9)$$

donde  $a$  es, por el momento, una función desconocida  $\phi(v)$  y por brevedad suponemos que, en el origen de  $k$ ,  $\tau = 0$  cuando  $t = 0$ .

Con ayuda de estos resultados es fácil determinar las magnitudes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , expresando mediante ecuaciones que la luz (tal como lo exige el principio de constancia de la velocidad de la luz en conexión con el principio de la relatividad) también se propaga en el sistema en movimiento con velocidad  $V$ . Para un rayo de luz que en el momento  $\tau = 0$  se emite en la dirección de crecimiento de  $\xi$  tenemos que:

$$\xi = V\tau, \quad (10)$$

o

$$\xi = aV \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right). \quad (11)$$

Pero con respecto al origen de  $k$  el rayo de luz se desplaza con la velocidad  $V - v$ , cuando se mide en el sistema en reposo, de tal manera que:

$$\frac{x'}{V - v} = t. \quad (12)$$

Si reemplazamos este valor de  $t$  en la ecuación para  $\xi$ , obtenemos

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'. \quad (13)$$

Si consideramos rayos de luz propagándose a lo largo de los otros ejes, de forma análoga encontramos

$$\eta = V\tau = aV \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right), \quad (14)$$

donde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0; \quad (15)$$

es decir,

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y \quad (16)$$

y

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z. \quad (17)$$

Introduciendo el valor de  $x'$ , resulta

$$\begin{aligned} \tau &= \varphi(v)\beta \left( t - \frac{v}{V^2}x \right), \\ \xi &= \varphi(v)\beta(x - vt), \\ \eta &= \varphi(v)y, \\ \zeta &= \varphi(v)z, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \quad (18)$$

y  $\varphi$  es por ahora una función desconocida de  $v$ . Si no se impone ninguna condición sobre la posición inicial del sistema en movimiento ni sobre el punto cero de  $\tau$ , se debe agregar una constante aditiva en la parte derecha de estas ecuaciones.

Ahora debemos demostrar que desde el punto de vista del sistema en movimiento todo rayo de luz se propaga con la velocidad  $V$ , si este es el caso en el sistema en reposo, como lo hemos supuesto. Esto es necesario debido a que aún no hemos demostrado que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de la relatividad.

En el tiempo  $t = \tau = 0$ , cuando ambos sistemas de coordenadas poseen un origen común, se emite una onda esférica que se propaga en el sistema  $K$  con velocidad  $V$ . Si  $(x, y, z)$  representa un punto abarcado por esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2. \quad (19)$$

A esta expresión le aplicamos nuestras ecuaciones de transformación y tras un cálculo sencillo obtenemos:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2. \quad (20)$$

Por lo tanto, en el sistema en movimiento la onda bajo consideración también es una onda esférica con velocidad de propagación  $V$ . De esta manera se demuestra que nuestros dos principios básicos son compatibles entre sí. En las ecuaciones de transformación que hemos derivado aparece una función desconocida  $\varphi$  de  $v$  que determinaremos ahora.

A tal fin introducimos un tercer sistema de coordenadas  $K'$  que con respecto al sistema  $k$  se encuentra en un estado de movimiento traslacional paralelamente al eje  $\Xi$ , de tal manera que su origen de coordenadas se desplaza con velocidad  $-v$  a lo largo del eje  $\Xi$ . Supongamos que en el momento  $t = 0$  todos los tres orígenes de coordenadas coinciden y que para  $t = x = y = z = 0$  el tiempo  $t'$  del sistema  $K'$  es igual a cero. Sean  $x', y', z'$ , las coordenadas medidas en el sistema  $K'$ . Utilizando dos veces nuestro sistema de ecuaciones de transformación obtenemos:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(-v)\beta(-v) \left\{ \tau + \frac{v}{V^2}\xi \right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t, \\ x' &= \varphi(-v)\beta(-v) \{ \xi + v\tau \} = \varphi(v)\varphi(-v)x, \\ y' &= \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y, \\ z' &= \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z. \end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre  $x', y', z'$  y  $x, y, z$  no contienen el tiempo  $t$ , los sistemas  $K$  y  $K'$  se encuentran en reposo uno con respecto al otro y es claro que la transformación de  $K$  a  $K'$  debe ser la transformación idéntica. Por lo tanto:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1. \quad (21)$$

Ahora nos preguntamos cuál es el significado de  $\varphi(v)$ . Consideremos el intervalo del eje  $H$  localizado entre  $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$  y  $\xi = 0, \eta = 1, \zeta = 0$ . Este intervalo del eje  $H$  corresponde a una varilla que se mueve perpendicularmente a su eje con la velocidad  $v$  con respecto al sistema  $K$ . Los extremos de la varilla en el sistema  $K$  tienen las coordenadas:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0 \quad (22)$$

y

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0. \quad (23)$$

Por lo tanto, la longitud de la varilla medida en  $K$  es  $l/\varphi(v)$ ; de esta forma hemos hallado el significado de la función  $\varphi$ . Por razones de simetría es evidente que la longitud de una varilla, medida en el sistema en reposo, que se mueve perpendicularmente a su eje depende solamente de la velocidad y

no de la dirección y el sentido del movimiento. Entonces, la longitud, medida en el sistema en reposo, de la varilla en movimiento no varía si se intercambia  $v$  por  $-v$ . En consecuencia, tenemos:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}, \quad (24)$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v). \quad (25)$$

A partir de esta relación y de la encontrada anteriormente se deriva que  $\varphi(v) = 1$  y, consecuentemente, las ecuaciones de transformación se convierten en

$$\begin{aligned} \tau &= \beta \left( t - \frac{v}{V^2} x \right), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (26)$$

#### § 4. Significado físico de las ecuaciones obtenidas en lo referente a cuerpos rígidos y relojes en movimiento

Consideremos una esfera rígida<sup>3</sup> de radio  $R$  que está en reposo con respecto al sistema  $k$  y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas de  $k$ . La ecuación para la superficie de esta esfera que se mueve con velocidad  $v$  con respecto a  $K$  es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2. \quad (27)$$

Al tiempo  $t = 0$  la ecuación de esta superficie en coordenadas  $x, y, z$  se expresa como:

---

<sup>3</sup> Es decir, un cuerpo que posee forma de esfera cuando se examina en reposo.

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2. \quad (28)$$

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad R, \quad R. \quad (29)$$

Mientras que las dimensiones  $Y$  y  $Z$  de la esfera (y por lo tanto también de cualquier cuerpo rígido de forma arbitraria) no resultan afectadas por el movimiento, la dimensión  $X$  aparece reducida en la relación <sup>1</sup>:  $\sqrt{1 - (v/V)^2}$ , es decir, se hace mayor a medida que aumenta  $v$ . En el caso  $v = V$  todos los objetos en movimiento, vistos desde un sistema en reposo, se transforman en figuras planas. A velocidades superiores a la de la luz nuestro análisis pierde todo sentido. Por lo demás, en los siguientes análisis veremos que físicamente la velocidad de la luz en nuestra teoría juega el papel de las velocidades infinitamente grandes.

Es claro que los mismos resultados son válidos para cuerpos en reposo en el sistema de “reposo”, vistos desde un sistema en movimiento uniforme.

Además, imaginémonos uno de los relojes que están en la capacidad de indicar el tiempo  $t$  cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo, y el tiempo  $\tau$  cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en movimiento. Supongamos que dicho reloj está localizado en el origen de coordenadas de  $k$  y está ajustado de tal manera que indica el tiempo  $\tau$ . ¿Qué tan rápido marcará el tiempo este reloj, si se observa desde el sistema en reposo?

Entre las cantidades  $x$ ,  $t$  y  $\tau$  que se refieren a la posición de este reloj tenemos, obviamente, las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \quad (30)$$

y

$$x = v\tau \quad (31)$$

Por lo tanto

$$\tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t, \quad (32)$$

de donde se deduce que la indicación del reloj (vista desde el sistema en reposo) por cada segundo se retrasa  $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$  segundos, es decir,  $\frac{1}{2}(v/V)^2$  segundos, si nos olvidamos de las correcciones iguales o superiores al cuarto orden.

De lo anterior se deriva la siguiente consecuencia particular. Si en los puntos  $A$  y  $B$  de  $K$  existen relojes sincronizados, que se encuentran en reposo con respecto al sistema en reposo, y movemos el reloj de  $A$  con velocidad  $v$  a lo largo de la línea que une  $A$  con  $B$ , al llegar al punto  $B$  los relojes ya no estarán sincronizados, sino que el reloj desplazado de  $A$  hasta  $B$  mostrará, con respecto al reloj que desde el principio se encontraba en  $B$ , un retraso de  $\frac{1}{2}tv^2/V^2$  segundos, donde  $t$  es el tiempo que necesita el reloj para pasar de  $A$  a  $B$ .

Inmediatamente se ve que este resultado también es válido cuando el reloj se desplaza desde  $A$  hasta  $B$  a lo largo de una línea poligonal arbitraria, incluso cuando los puntos  $A$  y  $B$  coinciden. Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es válido también para una curva de curvatura continua, obtenemos la siguiente conclusión: Si en  $A$  se encuentran dos relojes sincronizados y movemos uno de ellos con velocidad constante a lo largo de una curva cerrada hasta regresar al punto  $A$ , utilizando para ello un tiempo de  $t$  segundos, entonces al arribar al punto  $A$  el reloj desplazado mostrará un retraso de  $\frac{1}{2}t(v/V)^2$  segundos, con respecto al reloj que ha permanecido inmóvil. De aquí concluimos que un reloj de balance situado en el ecuador de la Tierra debe andar más despacio, por una cantidad muy pequeña, que un reloj similar situado en uno de los polos y sujeto a las mismas condiciones.

## § 5. Teorema de adición de velocidades

Consideremos en el sistema  $k$ , que se mueve con velocidad  $v$  a lo largo del eje  $X$  del sistema  $K$ , un punto en movimiento de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau, \\ \eta &= w_\eta \tau, \\ \zeta &= 0, \end{aligned}$$

donde  $w_\xi$  y  $w_\eta$  son constantes.



Se pretende describir el movimiento del punto con respecto al sistema  $K$ . Si introducimos en las ecuaciones de movimiento del punto las magnitudes  $x, y, z, t$  mediante las ecuaciones de transformación derivadas en § 3, obtenemos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{w_{\xi} + v}{1 + \frac{vw_{\xi}}{V^2}}t, \\y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw_{\xi}}{V^2}}w_{\eta}t, \\z &= 0.\end{aligned}$$

Consecuentemente, en nuestra teoría la ley del paralelogramo para las velocidades es válida únicamente a primer orden de aproximación. Sea

$$\begin{aligned}U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\w^2 &= w_{\xi}^2 + w_{\eta}^2\end{aligned}$$

y

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x}; \quad (33)$$

entonces,  $\alpha$  se debe considerar como el ángulo entre las velocidades  $v$  y  $w$ . Un cálculo sencillo genera

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha) - \left(\frac{vw \sin \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw \cos \alpha}{V^2}}. \quad (34)$$

Es interesante anotar que  $v$  y  $w$  aparecen de forma simétrica en la expresión para la velocidad resultante. Si  $w$  también tiene la dirección del eje  $X$  (eje  $\Xi$ ), obtenemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \quad (35)$$

De esta ecuación se deriva que de la combinación de dos velocidades, ambas menores que  $V$ , siempre resulta una velocidad menor que  $V$ . En efecto, si tomamos  $v = V - \kappa$  y  $w = V - \lambda$ , donde  $\kappa$  y  $\lambda$  son positivas y menores que  $V$ , entonces:

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V. \quad (36)$$

Además, se deriva que la velocidad de la luz  $V$  no se puede alterar al combinarla con una “velocidad menor que la de la luz”. En este caso se obtiene

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V. \quad (37)$$

Para el caso en que  $v$  y  $w$  tengan la misma dirección también hubiéramos podido obtener la fórmula para  $U$  aplicando dos de las transformaciones descritas en § 3. Si además de los sistemas  $K$  y  $k$  utilizados en § 3 introducimos un tercer sistema de coordenadas  $k'$  que se desplaza paralelamente al sistema  $k$  y cuyo origen se mueve con velocidad  $w$  sobre el eje  $\Xi$ , obtenemos ecuaciones que relacionan a  $x, y, z, t$  con las cantidades correspondientes en  $k'$  y que se diferencian de las encontradas en § 3 solamente porque en lugar de “ $v$ ” aparece la magnitud

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \quad (38)$$

De aquí se deduce que, como debe ser, dichas transformaciones paralelas forman un grupo. Hemos derivado las dos leyes necesarias de la cinemática que corresponden a nuestros dos principios y ahora procederemos a mostrar su aplicación en electrodinámica.

## II. Electrodinámica.

§ 6. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de la fuerza electromotriz que aparece con el movimiento en un campo magnético.

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema en reposo  $K$  de forma tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde  $(X, Y, Z)$  representa el vector de la fuerza eléctrica y  $(L, M, N)$  el de la fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, refiriendo los efectos electromagnéticos al sistema de coordenadas que se mueve con velocidad  $v$ , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left( N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left( M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta \left( N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \xi}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left( M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \eta}, \quad (39) \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left( M + \frac{v}{V} Z \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial \beta \left( N - \frac{v}{V} Y \right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right)}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{V} \right)^2}}, \quad (40)$$

El principio de la relatividad exige ahora que las ecuaciones de Maxwell - Hertz en el espacio vacío también se cumplan en el sistema  $k$ , si se cumplen en el sistema  $K$ , es decir, que los vectores de la fuerza eléctrica y magnética  $(X', Y', Z')$  y  $(L', M', N')$  del sistema en movimiento  $k$ , que se definen respectivamente mediante sus efectos pondero-motrices sobre la masa eléctrica y magnética, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V} \frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Evidentemente, los dos sistemas de ecuaciones derivados para el sistema  $k$  deben representar lo mismo debido a que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema  $K$ . Además, puesto que las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, con la excepción de los símbolos que representan los vectores, deducimos que las funciones que aparecen en las posiciones correspondientes en las ecuaciones deben coincidir, con la excepción de un factor  $\psi(v)$  que es común para todas las funciones de uno de los sistemas y es independiente de  $\xi, \eta, \zeta$ , pero eventualmente dependiente de  $v$ . Por lo tanto, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\
Y' &= \psi(v)\beta \left( Y - \frac{v}{V}N \right), & M' &= \psi(v)\beta \left( M + \frac{v}{V}Z \right), \\
Z' &= \psi(v)\beta \left( Z + \frac{v}{V}M \right), & N' &= \psi(v)\beta \left( N - \frac{v}{V}Y \right).
\end{aligned} \quad (41)$$

Si calculamos el inverso de este sistema de ecuaciones, primero resolviendo el sistema recién obtenido y, segundo, aplicando las ecuaciones a la transformación inversa (de  $k$  a  $K$ ), caracterizada mediante la velocidad  $-v$ , y consideramos que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos de esta manera deben ser idénticos, obtenemos:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1. \quad (42)$$

Además, por razones de simetría tenemos <sup>4</sup>

$$\varphi(v) = \varphi(-v); \quad (43)$$

por lo que

---

<sup>4</sup> Por ejemplo, si  $X = Y = Z = L = M = 0$  y  $N \neq 0$ , es claro, por razones de simetría que, cuando  $v$  cambia su signo sin alterar su valor numérico, entonces  $Y'$  también debe cambiar su signo sin alterar su valor numérico.

$$\varphi(v) = 1, \quad (44)$$

y nuestras ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right), & M' &= \beta \left( M + \frac{v}{V} Z \right), \\ Z' &= \beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right), & N' &= \beta \left( N - \frac{v}{V} Y \right). \end{aligned}$$

Para interpretar estas ecuaciones notemos lo siguiente: Supongamos que una carga eléctrica puntual tiene el valor “uno” en el sistema en reposo  $K$ , es decir, cuando se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo ejerce una fuerza de una *dina* sobre una cantidad de electricidad igual que se encuentra a una distancia de un *cm*. De acuerdo al principio de la relatividad, esta carga eléctrica también tiene el valor “uno” en el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo, de acuerdo a la definición, el vector  $(X, Y, Z)$  es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento (por lo menos en el momento relevante), entonces la fuerza que actúa sobre ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector  $(X', Y', Z')$ . Consecuentemente, las primeras tres de las ecuaciones presentadas arriba se pueden expresar mediante palabras de las siguientes dos maneras:

1. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, además de la fuerza eléctrica sobre ella actúa una “fuerza electromotriz” que, si despreciamos los términos multiplicados por las potencias de  $v/V$  de orden dos y superiores, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga unitaria por la fuerza magnética, dividido por la velocidad de la luz (modo de expresión antiguo).

2. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella es igual a la fuerza eléctrica presente en la posición de la carga, la cual se obtiene mediante una transformación del campo a un sistema de coordenadas en reposo con respecto a la carga eléctrica (modo de expresión moderno).

La analogía es válida para “fuerzas magnetomotrices”. Vemos que en la teoría desarrollada la fuerza electromotriz juega solamente el papel de concepto auxiliar cuya introducción se debe al hecho de que las fuerzas eléctricas y magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas. Además, es claro que ahora deja de existir la asimetría mencionada en la introducción que aparecía cuando considerábamos corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor. Adicionalmente, las cuestiones relaciones con el “sitio” de las fuerzas electrodinámicas electromotrices (máquinas unipolares) no tienen ningún sentido.

## § 7. Teoría del principio de Doppler y de la aberración

Supongamos que muy lejos del origen de coordenadas del sistema  $K$  se encuentra una fuente de ondas electrodinámicas, las cuales en la parte del espacio que contiene el origen se representan con un grado suficiente de aproximación mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega \left( t - \frac{ax + by + cz}{V} \right), \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Las magnitudes  $(X_0, Y_0, Z_0)$  y  $(L_0, M_0, N_0)$  son los vectores que determinan la amplitud de la onda y  $a, b, c$ , son los cosenos direccionales de las normales de la onda. Queremos investigar la constitución de estas ondas cuando son examinadas por un observador que se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento  $k$ . Aplicando las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctricas y magnéticas derivadas en § 6 y las ecuaciones de transformación para las coordenadas y el tiempo halladas en § 3, encontramos directamente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta \left( Y_0 - \frac{v}{V} N_0 \right) \sin \Phi', & M' &= \beta \left( M_0 + \frac{v}{V} Z_0 \right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta \left( Z_0 + \frac{v}{V} M_0 \right) \sin \Phi', & N' &= \beta \left( N_0 - \frac{v}{V} Y_0 \right) \sin \Phi', \\ \Phi' &= \omega' \left( \tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

donde hemos utilizado que

$$\omega' = \omega \beta \left( 1 - a \frac{v}{V} \right), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}}, \\ b' &= \frac{b}{\beta \left( 1 - a \frac{v}{V} \right)}, \\ c' &= \frac{c}{\beta \left( 1 - a \frac{v}{V} \right)} \end{aligned}$$

De la ecuación para  $w'$  se deriva lo siguiente: Si con respecto a una fuente de luz de frecuencia  $\nu$  situada a una distancia infinita, un observador se mueve con velocidad  $v$  de forma tal que la línea de conexión “fuente de luz - observador” forma el ángulo  $\varphi$  con la velocidad de un observador asociado con un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto a la fuente de luz, la frecuencia  $\nu'$  de la luz percibida por el observador está dada mediante la ecuación:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (47)$$

Este es el principio de Doppler para velocidades arbitrarias. Para  $\varphi = 0$  la ecuación toma la forma clara

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}. \quad (48)$$

Vemos que – a diferencia de la opinión común – para  $v = -\infty$  corresponde  $\nu = \infty$ . Si denominamos como  $\varphi'$  el ángulo entre la normal de la onda (dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea de conexión “fuente de luz – observador”, la ecuación para  $a'$  toma la forma

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}. \quad (49)$$

Esta ecuación representa la ley de la aberración en su forma más general. Si  $\varphi = \pi/2$ , la ecuación toma la forma sencilla

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}. \quad (50)$$

Todavía debemos encontrar la amplitud de la onda tal como aparece en el sistema en movimiento. Si denominamos como  $A$  y  $A'$  a la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética medida en el sistema en reposo y en movimiento, respectivamente, obtenemos la ecuación

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (51)$$

Que, para  $\varphi = 0$  se simplifica y toma la forma

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}. \quad (52)$$

De las ecuaciones desarrolladas se deriva que para un observador que se aproxima con velocidad  $V$  hacia una fuente de luz, dicha fuente debería mostrar una intensidad infinita.

### § 8. Transformación de la energía de rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre un espejo perfecto.

Puesto que  $A^2/8\pi$  es la energía de la luz por unidad de volumen, de acuerdo al principio de la relatividad debemos considerar a  $A'^2/8\pi$  como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Por lo tanto  $A'^2/A^2$  sería la relación entre la energía de cierto complejo de luz “medida en movimiento” y la “medida en reposo”, si el volumen del complejo de luz medido en  $K$  fuera el mismo que el medido en  $k$ . Sin embargo, este no es el caso. Si  $a, b, c$  son los cosenos direccionales de la normal de la onda de luz en el sistema en reposo, a través de los elementos de superficie de la esfera

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 \quad (53)$$

que se desplaza con la velocidad de la luz no pasa ninguna energía. Por consiguiente, podemos decir que esta superficie encierra permanentemente el mismo complejo de luz. Nos preguntamos cuál es la cantidad de energía que encierra esta superficie desde el punto de vista del sistema  $k$ , es decir, la energía del complejo de luz con respecto al sistema  $k$ .

Desde el punto de vista del sistema en movimiento la superficie esférica es una superficie elipsoidal cuya ecuación para el tiempo  $\tau = 0$  es

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2. \quad (54)$$

Si  $S$  es el volumen de la esfera y  $S'$  el volumen del elipsoide, un cálculo sencillo muestra que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}. \quad (55)$$

Entonces, si designamos a la energía encerrada por esta superficie como  $E$ , cuando se mide en el sistema en reposo, y como  $E'$ , cuando se mide en el sistema en movimiento, obtenemos la fórmula



$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \quad (56)$$

Que, para  $\phi = 0$ , se simplifica y transforma en

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}. \quad (57)$$

Es notable que la energía y la frecuencia de un complejo de luz varían con el estado de movimiento del observador de acuerdo a la misma ley.

Sea el plano de coordenadas  $\xi = 0$  una superficie reflectora perfecta sobre la cual se reflejan las ondas planas consideradas en el último párrafo. Nos preguntamos cuál es la presión de la luz ejercida sobre la superficie reflectora, y la dirección, frecuencia e intensidad de la luz después de la reflexión.

Supongamos que el rayo incidente está definido mediante las magnitudes  $A$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\nu$  (con respecto al sistema  $K$ ). Desde el punto de vista de  $k$  las magnitudes correspondientes son:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \quad (58)$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}, \quad (59)$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \quad (60)$$

Si relacionamos el proceso con el sistema  $k$ , para la luz reflejada obtenemos

$$\begin{aligned}
A'' &= A', \\
\cos \varphi'' &= -\cos \varphi', \\
\nu'' &= \nu'.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la transformación inversa para el sistema en reposo  $K$  para la luz reflejada encontramos que

$$A''' = A'' \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (61)$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}, \quad (62)$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}. \quad (63)$$

La energía (medida en el sistema en reposo) que incide sobre el espejo por unidad de área y unidad de tiempo está dada evidentemente por  $A^2(V \cos \varphi - v)$ . La energía que sale del espejo por unidad de área y unidad de tiempo es  $A'''^2/8\pi(-V \cos \varphi''' + v)$ . De acuerdo al principio de la energía, la diferencia entre estas dos expresiones corresponde al trabajo ejercido por la presión de la luz en una unidad de tiempo. Si igualamos este trabajo al producto  $Pv$ , donde  $P$  es la presión de la luz, obtenemos

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}. \quad (64)$$

De acuerdo con el experimento y con los resultados de otras teorías, a primer orden de aproximación obtenemos

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi. \quad (65)$$

Todos los problemas sobre óptica de cuerpos en movimiento se pueden resolver aplicando el método utilizado aquí. Lo importante es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, la cual resulta influenciada por un cuerpo en movimiento, se transforman a un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto al cuerpo. De esta manera cualquier problema relacionado con óptica de cuerpos en movimiento se reduce a una serie de problemas sobre óptica de cuerpos en reposo.

### § 9. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las corrientes de convección.

Comenzamos con las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_y \rho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_z \rho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},\end{aligned}$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (66)$$

representa  $4\pi$  veces la densidad eléctrica y  $(u_x, u_y, u_z)$  es el vector de velocidad de la carga eléctrica. Si nos imaginamos las cargas eléctricas acopladas de forma invariable a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), estas ecuaciones representan el fundamento electromagnético de la electrodinámica de Lorentz y de la óptica de cuerpos en movimiento.

Si estas ecuaciones son válidas en el sistema  $K$  y las transformamos al sistema  $k$  con la ayuda de las ecuaciones de transformación derivadas en § 3 y § 6, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{V} \left\{ u_\xi \rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\eta \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\ \frac{1}{V} \left\{ u_\zeta \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},\end{aligned}$$

donde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi$$

$$\frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right) \rho$$

$$\frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

Puesto que – como se deduce del teorema de adición de velocidades (§ 5) – el vector  $(u_\xi, u_\eta, u_\zeta)$  no es nada más que la velocidad de las cargas eléctricas en el sistema  $k$ , de esta forma se demuestra que, en base a nuestros principios cinemáticos, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz para la electrodinámica de cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de la relatividad.

Además, quisiéramos anotar brevemente que de las ecuaciones desarrolladas se puede derivar con facilidad la siguiente ley importante: Si un cuerpo cargado eléctricamente se mueve de forma arbitraria en el espacio sin alterar su carga, cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se desplaza junto con el cuerpo, entonces su carga también permanecerá constante cuando se observa desde el sistema en “reposo”  $K$ .

### § 10. Dinámica de un electrón (acelerado lentamente).

Una partícula puntual (que llamaremos electrón) se mueve en un campo electromagnético provista de una carga eléctrica  $\varepsilon$  y sobre su movimiento suponemos lo siguiente:

Si el electrón se encuentra en reposo en un momento dado, en los instantes de tiempo subsiguientes el movimiento se desarrolla de acuerdo a las ecuaciones

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

donde  $x, y, z$  son las coordenadas del electrón y  $\mu$  es su masa, siempre y cuando el movimiento sea lento.

En segundo lugar, supongamos que en cierto momento el electrón posee la velocidad  $v$ . Buscamos la ley de acuerdo a la cual se mueve el electrón en los instantes de tiempo inmediatos.

Sin alterar la generalidad del análisis podemos y queremos asumir que el electrón, en los momentos en que lo observamos, se encuentra en el origen de coordenadas y se mueve a lo largo del eje  $X$  del sistema  $K$  con velocidad  $v$ . Entonces es claro que en un momento dado ( $t = 0$ ) el electrón se encuentra en reposo con respecto a un sistema de coordenadas que se desplaza paralelamente a lo largo del eje  $X$  con velocidad  $v$ . De la suposición descrita arriba en relación con el principio de la relatividad es claro que desde el punto de vista del sistema  $k$  y para los momentos de tiempo subsiguientes (valores pequeños de  $t$ ) el movimiento del electrón se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= \varepsilon X' \\ \mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= \varepsilon Y' \\ \mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} &= \varepsilon Z',\end{aligned}$$

donde las magnitudes  $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$  se refieren al sistema  $k$ . Si además fijamos que para  $t = x = y = z = 0$  deba ser  $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ , entonces tienen validez las ecuaciones de transformación de §§ 3 y 6 de forma tal que obtenemos

$$\begin{aligned}\tau &= \beta \left( t - \frac{v}{V^2} x \right), \\ \xi &= \beta (x - vt), & X' &= X, \\ \eta &= y, & Y' &= \beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \zeta &= z, & Z' &= \beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right).\end{aligned}$$

Con ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones de movimiento del sistema  $k$  al sistema  $K$  y obtenemos como resultado

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^2} X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left( Y - \frac{v}{V} N \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left( Z + \frac{v}{V} M \right). \end{cases}$$

Asumiendo el punto de vista común nos preguntamos cuál es la masa “longitudinal” y “transversal” del electrón en movimiento. Primero escribimos las ecuaciones (A) en la forma

$$\begin{aligned} \mu\beta^2 \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ \mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta \left( Y - \frac{v}{V} N \right) = \varepsilon Y', \\ \mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta \left( Z + \frac{v}{V} M \right) = \varepsilon Z', \end{aligned}$$

y luego notamos que  $\varepsilon X'$ ,  $\varepsilon Y'$ ,  $\varepsilon Z'$  son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, vistas desde un sistema que en ese momento se mueve junto con el electrón a la misma velocidad. (Esta fuerza se podría medir, por ejemplo, mediante una balanza de resorte que se encuentre en reposo en este último sistema.) Si ahora llamamos a esta fuerza simplemente “la fuerza que actúa sobre el electrón” y mantenemos la ecuación

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{fuerza} \tag{67}$$

y, además, decidimos que las aceleraciones deben ser medidas en el sistema en reposo  $K$ , de las ecuaciones mencionadas arriba obtenemos

$$\begin{aligned} \text{masa longitudinal} &= \frac{\mu}{\left( \sqrt{1 - \left( \frac{v}{V} \right)^2} \right)^3}, \\ \text{masa transversal} &= \frac{\mu}{1 - \left( \frac{v}{V} \right)^2}. \end{aligned}$$

Naturalmente, si se utilizaran otras definiciones para la fuerza y la aceleración, encontraríamos otros valores para las masas. De aquí vemos que se debe ser muy cuidadoso cuando se comparan diferentes teorías del movimiento del electrón.

Nótese que estos resultados sobre la masa también son válidos para puntos materiales ponderables, porque un punto material ponderable se puede convertir en un electrón (en nuestro sentido), adicionándole una carga eléctrica *tan pequeña como se quiera*.

Ahora determinaremos la energía cinética del electrón. Si un electrón se mueve partiendo del reposo desde el origen de coordenadas del sistema  $K$  a lo largo del eje  $X$  bajo la acción de una fuerza electrostática  $X$ , es claro que la energía extraída del campo electrostático tiene el valor de  $\int \varepsilon X dx$ . Puesto que el electrón se debe acelerar lentamente y, por lo tanto, no debe emanar energía en forma de radiación, la energía extraída del campo electrostático se debe igualar a la energía de movimiento  $W$  del electrón. Teniendo en cuenta que durante todo el proceso de movimiento bajo consideración se puede aplicar la primera de las ecuaciones (A), obtenemos

$$W = \int \varepsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}. \quad (68)$$

Para  $v = V$  la energía  $W$  crece infinitamente. Como en nuestros resultados anteriores, velocidades superiores a la de la luz no tienen ninguna posibilidad de existencia.

En virtud del argumento mencionado arriba, esta expresión para la energía cinética también debe ser válida para masas ponderables.

Ahora enumeraremos las propiedades del movimiento del electrón que se derivan del sistema de ecuaciones (A) y que podrían ser sometidas a experimentos:

1 De la segunda ecuación del sistema (A) se deduce que una fuerza eléctrica  $Y$  y una fuerza magnética  $N$  actúan con la misma intensidad de deflexión sobre un electrón que se mueve con velocidad  $v$ , cuando se cumple que  $Y = Nv/V$ . Entonces vemos que de acuerdo a nuestra teoría es posible determinar la velocidad del electrón a partir de la relación entre la deflexión magnética  $A_m$  y la deflexión eléctrica  $A_e$ , utilizando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}. \quad (69)$$

Esta relación puede ser probada en el experimento porque la velocidad del electrón también se puede medir directamente, por ejemplo, mediante campos eléctricos y magnéticos que oscilan rápidamente.

2. De la derivación de la energía cinética para el electrón se deduce que entre la diferencia continua de potencial y la velocidad adquirida por el electrón  $v$  debe existir una relación de la forma

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}. \quad (70)$$

3. Calculemos el radio de curvatura  $R$  de la trayectoria cuando existe (como única fuerza de deflexión) una fuerza magnética  $N$  que actúa de forma perpendicular a la velocidad del electrón. De la segunda de las ecuaciones (A) obtenemos

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \quad (71)$$

o

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}. \quad (72)$$

Estas tres relaciones representan una expresión completa para las leyes que debe cumplir el movimiento de un electrón, de acuerdo a la teoría presentada aquí. Finalmente quisiera anotar que durante el trabajo realizado para analizar los problemas aquí presentados he contado con la fiel asistencia de mi amigo y colega M. Besso a quien agradezco por algunas sugerencias valiosas.

Berna, junio de 1905.

(Recibido el 30 de junio de 1905.)

Sobre esta edición: La versión aquí presente es una traducción del artículo original publicado por Albert Einstein en idioma alemán bajo el título “ Zur Elektrodynamik bewegter Körper” en la revista *Annalen der Physik*, 17, 891–921 (1905). Esta traducción y su versión electrónica en PDF han sido elaboradas por Hernando Quevedo (ICN-UNAM, quevedo@nucleares.unam.mx) en abril de 2005. Por tratarse de una traducción de material de dominio público, esta versión puede ser reproducida y utilizada para fines no lucrativos de cualquier forma y sin restricción alguna.



## **Anexo F.**

### **ALBERT EINSTEIN. LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL**

El presente libro pretende, en la medida de lo posible, dar una visión exacta de la teoría de la Relatividad a aquellos lectores que, desde un punto de vista científico y filosófico general, estén interesados en la teoría, pero que no estén versados en los aparatos matemáticos<sup>1</sup> de la Física teórica. La obra supone un nivel de educación correspondiente al de un examen de matriculación universitaria y, a pesar de la brevedad del libro, una buena cantidad de paciencia y fuerza de voluntad por parte del lector. El autor no se ha escatimado esfuerzos en su esfuerzo por presentar las ideas principales en la forma más simple e inteligible y, en conjunto, en la secuencia y conexión en que realmente se ha originado. En aras de la claridad, me pareció inevitable que me repitiera con frecuencia, sin prestar la menor atención a la elegancia de la presentación. Me adhiero escrupulosamente al precepto de ese brillante físico teórico, L. Boltzmann, según el cual las cuestiones de elegancia deben dejarse al sastre y al zapatero. No pretendo haber ocultado al lector las dificultades inherentes al tema. Por otro lado, he tratado deliberadamente los fundamentos físicos empíricos de la teoría de una manera "madrastra", para que los lectores que no estén familiarizados con la física no se sientan como el vagabundo que

---

<sup>111</sup> Los fundamentos matemáticos de la teoría especial de la relatividad se encuentran en los artículos originales de H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski publicados con el título *Das Relativitätsprinzip* (El principio de la relatividad) en la colección de monografías de B. G. Teubner *Fortschritte der mathematischen Wissenschaften* (Avances en las Ciencias Matemáticas), también en el exhaustivo libro de Max von Laue, *Das Relativitätsprinzip*, publicado por Friedr. Vieweg & Son, Braunschweig. La teoría general de la relatividad, junto con las partes necesarias de la teoría de las invariantes, se trata en el libro del autor *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* (Los fundamentos de la teoría general de la relatividad) — Johann. A. Barth, 1916; este libro supone cierta familiaridad con la teoría especial de la relatividad.

no pudo ver los árboles en el bosque. ¡Que el libro traiga a alguien unas cuantas horas felices de pensamiento sugerente!

Albert Einstein

### NOTA A LA TERCERA EDICIÓN

En el presente año (1918) fue publicado por la firma Julius Springer (Berlín) un excelente y detallado manual sobre la teoría general de la relatividad, escrito por H. Weyl. Este libro, titulado *Raum - Zeit - Materie* (Espacio - Tiempo - Materia), puede recomendarse calurosamente a matemáticos y físicos.

## **PARTE I.**

### **LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD**

**I. Significado físico de las proposiciones geométricas**

**II. El sistema de coordenadas**

**III. Espacio y tiempo en la Mecánica Clásica**

**IV. E V. El principio de relatividad (en sentido restringido)**

**VI. El Teorema de la Suma de Velocidades empleado en Mecánica Clásica**

**VIII. La aparente incompatibilidad de la Ley de Propagación de la Luz con el Principio de Relatividad**

**VIII. Sobre la idea del tiempo en la Física**

**IX. La relatividad de la simultaneidad**

**X. Sobre la relatividad del concepto de distancia**

**XI. La transformación de Lorentz**

**XII. El Comportamiento de Varillas para Medir y Relojes en Movimiento**

**XIII. Teorema de la Suma de Velocidades. El experimento de Fizeau**

**XIV. El valor heurístico de la Teoría de la relatividad**

**XV. Resultados generales de la Teoría**

**XVI. La experiencia y la teoría especial de la relatividad**

**XVII. El espacio de cuatro dimensiones de Minkowski**

## **PARTE II**

### **LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

**XVIII. Principio especial y general de la relatividad**

**XIX. El campo gravitatorio**

**XX. La igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria como argumento a favor del postulado general de la relatividad**

**XXI. ¿En qué aspectos son insatisfactorios los fundamentos de la Mecánica Clásica y de la Teoría especial de la relatividad?**

**XXII. Algunas inferencias del Principio general de la relatividad**

**XXIII. Comportamiento de relojes y varillas de medición en un cuerpo de referencia giratorio**

**XXIV. Continuo euclidiano y no euclidiano**

**XXV. Coordenadas gaussianas**

**XXVI. El Continuo Espacio-Tiempo de la Teoría Especial de la Relatividad considerado como un Continuo Euclidiano**

**XXVIII. El Continuo Espacio-Tiempo de la Teoría General de la Relatividad no es un Continuo Euclidiano**

**XXVIII. Formulación exacta del Principio general de la relatividad**

**XXIX. La solución del problema de la gravitación sobre la base del Principio general de la relatividad**

## **PARTE III**

## **CONSIDERACIONES SOBRE EL UNIVERSO COMO UN TODO**

**XXX. Dificultades cosmológicas de la teoría de Newton**

**XXXI. La posibilidad de un universo “finito” y sin embargo “ilimitado”**

**XXXIII. La Estructura del Espacio según la Teoría General de la Relatividad**

## **ANEXOS**

**I. Derivación simple de la transformación de Lorentz**

**II. Espacio de cuatro dimensiones de Minkowski ("Mundo") [Complementario a la Sección XVII.]**

**III. La confirmación experimental de la teoría general de la relatividad**

**(a) Movimiento del Perihelio de Mercurio**

**(b) Desviación de la luz por un campo gravitacional**

**(c) Desplazamiento de Líneas Espectrales hacia el Rojo**

## **BIBLIOGRAFÍA**

## **RELATIVIDAD**

### **PARTE I**

#### **LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD**

##### **I**

#### **SIGNIFICADO FÍSICO DE LAS PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS**

En vuestro paso por la escuela, la mayoría de ustedes leyeron un libro o se familiarizaron con el noble edificio de la Geometría de Euclides, y, quizás recuerden, quizás con más respeto que amor, la magnífica estructura, donde fueron perseguidos durante incontables horas por concienzudos maestros. En razón de vuestra experiencia pasada, ciertamente mirarían con desdén a cualquiera que declarara que incluso la proposición más sencilla de esta ciencia es falsa. Pero tal vez este sentimiento de orgullosa certeza los abandonaría inmediatamente si alguien les preguntara: "¿Qué quieres decir entonces con la afirmación de que estas proposiciones son verdaderas?" Procedamos a considerar un poco esta cuestión.

La Geometría parte de ciertas concepciones como "plano", "punto" y "línea recta", a las que podemos asociar ideas más o menos definidas, y de ciertas proposiciones simples (axiomas) que, en virtud de estas ideas, nos inclinamos a aceptar como "verdaderas".

Entonces, sobre la base de un proceso lógico, cuya justificación nos sentimos obligados a admitir, se muestra que todas las proposiciones restantes se siguen de esos axiomas, es decir, se prueban. Una proposición es entonces correcta ("verdadera") cuando se ha derivado de los axiomas de la manera reconocida. La cuestión de la "verdad" de las proposiciones geométricas individuales se reduce así a la "verdad" de los axiomas. Ahora bien, desde hace tiempo se sabe que hay una última pregunta que no sólo no puede ser respondida por los métodos de la Geometría, sino que en sí misma carece por completo de significado. No podemos preguntar si es cierto que sólo una línea recta pasa por dos puntos. Sólo podemos decir que la geometría euclidiana trata de cosas llamadas "líneas rectas", a cada una de las cuales se le atribuye la propiedad de estar únicamente determinadas por dos puntos situados en ella. El concepto "verdadero" no concuerda con las afirmaciones de la Geometría pura, ya que con la palabra "verdadero" tenemos el hábito de designar siempre la correspondencia con un objeto "real";

pero la Geometría, no se ocupa de la relación de las ideas involucradas en ella con los objetos de la experiencia, sino sólo de la conexión lógica de esas ideas entre sí.

No es difícil comprender por qué, a pesar de esto, nos sentimos obligados a llamar "verdaderas" a las proposiciones de la Geometría. Las ideas geométricas corresponden a objetos más o menos exactos de la naturaleza, y estos últimos son sin duda la causa exclusiva de la génesis de esas ideas. La Geometría debería abstenerse de tal curso, para dar a su estructura la mayor unidad lógica posible. La práctica, por ejemplo, de ver "a lo lejos" dos posiciones marcadas sobre un cuerpo prácticamente rígido es algo que está profundamente arraigado en nuestro hábito de pensamiento. Además, estamos acostumbrados a considerar tres puntos como si estuvieran situados en una línea recta, si sus posiciones aparentes se pueden hacer coincidir cuando se los observa a ojo desnudo, eligiendo adecuadamente nuestro lugar de observación.

Si, en cumplimiento de nuestro hábito de pensamiento, ahora complementamos las proposiciones de la Geometría euclidiana con la sola proposición de que dos puntos en un cuerpo prácticamente rígido siempre corresponden a la misma distancia (intervalo de línea), independientemente de cualquier cambio de posición a la que podemos colocar el cuerpo, las proposiciones de la geometría euclidiana se resuelven entonces en proposiciones sobre la posible posición relativa de cuerpos prácticamente rígidos<sup>1</sup>. La geometría que ha sido complementada de esta manera debe ser tratada como una rama de la Física. Ahora podemos preguntar legítimamente sobre la "verdad" de las proposiciones geométricas interpretadas de esta manera, ya que tenemos el derecho a preguntar si estas proposiciones se satisfacen para aquellas cosas reales que hemos asociado con las ideas geométricas. En términos menos exactos podemos expresar esto diciendo que por la "verdad" de una proposición geométrica en este sentido entendemos su validez comprobable con regla y compás.

Por supuesto, la convicción de la "verdad" de las proposiciones geométricas en este sentido se basa exclusivamente en una experiencia que es bastante incompleta. Por ahora, supondremos la "verdad" de las proposiciones geométricas. Luego, en una etapa posterior, (en la teoría general de la relatividad) comprobaremos que esta "verdad" es limitada, y consideraremos el alcance de su limitación.

## II

---

<sup>111</sup> De ello se deduce que un objeto natural puede también estar asociado con una línea recta. Así, tres puntos A, B y C de un cuerpo rígido están en línea recta cuando, dados los puntos A y C, se elige B de modo que la suma de las distancias AB y BC sea lo más corta posible. Esta sugerencia incompleta será suficiente para nuestro propósito actual.



## EL SISTEMA DE COORDENADAS

Sobre la base de la interpretación física que hemos indicado para la distancia, podemos establecer la distancia entre dos puntos en un cuerpo rígido por medio de medidas. Para este propósito, necesitamos una "distancia" (, por ejemplo, la longitud de una varilla S) que emplearemos como medida estándar. Ahora bien, si A y B son dos puntos de un cuerpo rígido, podemos construir la recta que los une según las reglas de la geometría; luego, partiendo de A, podemos marcar la distancia S una y otra vez hasta llegar a B. El número de estas operaciones requeridas es la medida numérica de la distancia AB. Esta es la base de toda medida de longitud.<sup>1</sup>

Toda descripción de un evento o de la posición de un objeto en el espacio se basa sobre la especificación del punto de un cuerpo rígido (cuerpo de referencia) con el que ese evento u objeto coincide. Esto se aplica no solo a la descripción científica, sino también a la vida cotidiana. Si analizo la especificación del lugar llego al siguiente resultado. La tierra es el cuerpo rígido a que se refiere la especificación de lugar; "Potsdamer Platz, Berlín"<sup>2</sup> es un punto bien definido, al que se le ha asignado un nombre, y con el que el evento coincide en el espacio.<sup>3</sup>

Este método primitivo de especificación de lugares sirve solo para lugares en la superficie de cuerpos rígidos y depende de la existencia de puntos en esta superficie que puedan distinguirse entre sí. Sin embargo, podemos liberarnos de ambas limitaciones sin alterar la naturaleza de nuestra especificación de la posición. Si, por ejemplo, una nube se cierne sobre la Plaza de Potsdam, en Berlín, entonces podemos determinar su posición relativa a la superficie de la Tierra levantando un poste perpendicularmente en la Plaza, de modo que llegue hasta la nube. La longitud del poste medida con la vara de medir estándar, combinada con la especificación de la posición del pie del poste, nos proporciona una especificación completa del lugar. Sobre la base de esta ilustración, podemos ver la manera en que se ha desarrollado un refinamiento de la concepción de la posición.

a) Imaginamos el cuerpo rígido, al que se refiere la especificación de lugar, suplementado de tal manera que el objeto cuya posición necesitamos sea alcanzado por todo el cuerpo rígido.

---

<sup>111</sup> Aquí hemos supuesto que al medir no sobra nada, es decir, que la medida da un número entero. Esta dificultad se supera mediante el uso de varillas de medir más pequeñas, cuya introducción no exige ningún método fundamentalmente nuevo.

<sup>222</sup> La Plaza de Potsdam es una importante plaza pública en el centro de Berlín y se cuenta como uno de los lugares más destacados de esta ciudad. Allí se instaló por primera vez, un semáforo en esa ciudad.

<sup>333</sup> Aquí no es necesaria una mayor investigación del significado de la expresión "coincidencia en el espacio". Esta concepción es lo suficientemente obvia como para asegurar que es poco probable que surjan diferencias de opinión en cuanto a su aplicabilidad en la práctica.

b) Al ubicar la posición del objeto, hacemos uso de un número (en nuestro caso la longitud del poste medido con la vara estándar de medir) en vez de puntos de referencia designados.

c) Podemos hablar de la altura de la nube aun cuando el poste que alcanza la nube no ha-

ya sido erigido. Mediante observaciones ópticas de la nube desde diferentes posiciones en el suelo, y teniendo en cuenta las propiedades de propagación de la luz, se puede determinar la longitud del poste que deberíamos haber requerido para llegar a la nube.

De estas consideraciones observamos que será ventajoso si, al describir la posición, fuera posible hacerlo por medidas numéricas e independizarnos de la existencia de posiciones marcadas en el cuerpo rígido de referencia. En la Física de la medida esto se logra mediante la aplicación del sistema cartesiano de coordenadas.

Este sistema consta de tres superficies planas perpendiculares entre sí y unidas rígidamente a un cuerpo rígido. Referida a un sistema de coordenadas, la escena de cualquier evento estará determinada (en su mayor parte) por la especificación de las longitudes de las tres perpendiculares o *coordenadas* ( $x, y, z$ ) que pueden ser eliminadas de la escena del evento. Las longitudes de estas tres perpendiculares pueden determinarse mediante una serie de manipulaciones con varillas de medición rígidas realizadas de acuerdo con las reglas y métodos establecidos por la geometría euclidiana.

En la práctica, las superficies rígidas que constituyen el sistema de coordenadas no se utilizan y las magnitudes de las coordenadas no se determinan realmente mediante construcciones con varillas rígidas, sino por medios indirectos. Para que los resultados de la Física y de la Astronomía mantengan su claridad, el significado físico de las especificaciones de posición debe buscarse siempre de acuerdo con las consideraciones anteriores.<sup>1</sup>

Obtenemos así el siguiente resultado: toda descripción de eventos en el espacio implica el uso de un cuerpo rígido al que deben referirse tales eventos. La relación resultante da por sentado que las leyes de la geometría euclidiana se cumplen para las "distancias", siendo representada físicamente la "distancia" por medio de la convención de dos marcas en un cuerpo rígido.

### III.

---

<sup>111</sup> No se hace necesario un refinamiento y modificación de estos puntos de vista hasta que lleguemos a tratar con la teoría general de la relatividad, que desarrollaremos en la segunda parte de este libro.

## ESPACIO Y TIEMPO EN LA MECÁNICA CLÁSICA

“El propósito de la Mecánica es describir cómo los cuerpos cambian su posición en el espacio con el tiempo”. Cargaría mi conciencia con graves pecados contra el espíritu sagrado de la lucidez si formulara de esta manera los fines de la Mecánica, sin una reflexión seria y explicaciones detalladas. Procedamos a revelar estos pecados.

No está claro qué debe entenderse aquí por "posición" y "espacio". Si estoy parado junto a la ventana de un vagón de ferrocarril que viaja uniformemente y dejo caer una piedra sobre el terraplén, sin tirarla. Entonces, sin tener en cuenta la influencia de la resistencia del aire, veo que la piedra desciende en línea recta. Un peatón que observa la fechoría desde la acera nota que la piedra cae a tierra describiendo una curva parabólica. Ahora pregunto: ¿las “posiciones” atravesadas por la piedra se encuentran “en realidad” en una línea recta o en una parábola? Además, ¿qué se entiende aquí por movimiento “en el espacio”? De las consideraciones del apartado anterior la respuesta es evidente. En primer lugar, evitamos por completo la vaga palabra “espacio”, de la cual, debemos reconocerlo honestamente, no podemos formarnos la más mínima concepción, y la reemplazamos por “movimiento relativo a un cuerpo de referencia prácticamente rígido”. Las posiciones relativas al cuerpo de referencia (vagón de ferrocarril o terraplén) ya han sido definidas con detalle en el apartado anterior. Si en lugar de "cuerpo de referencia" insertamos "sistema de coordenadas", que es una idea útil para la descripción matemática, estamos en condiciones de decir: la piedra atraviesa una línea recta en relación con un sistema de coordenadas rígidamente unido a el vagón, pero en relación con un sistema de coordenadas fijadas rígidamente al suelo (terraplén) describe una parábola. Con la ayuda de este ejemplo, se ve claramente que no existe tal cosa como una trayectoria existente de forma independiente (literalmente, "curva de trayectoria"<sup>11</sup>), sino solo una trayectoria relativa a un cuerpo de referencia particular

Para tener una descripción completa del movimiento, debemos especificar cómo el cuerpo va alterando su posición con el tiempo; es decir, para cada punto de la trayectoria se debe indicar en qué momento se encuentra allí el cuerpo. Estos datos deben complementarse con una definición de tiempo tal que, en virtud de esta definición, estos valores de tiempo puedan considerarse esencialmente como magnitudes (resultados de mediciones) susceptibles de observación. Si tomamos nuestra posición sobre la base de la mecánica clásica, podemos satisfacer este requisito para nuestra ilustración de la siguiente manera. Imaginamos dos relojes de idéntica construcción; uno de ellos lo sostiene el hombre en la ventanilla del vagón y el hombre en la acera sostiene el otro. Cada uno de los observadores determina la posición en su propio cuerpo de referencia que ocupa la piedra en cada tictac del reloj que tiene en la mano. A este respecto no hemos tenido en cuenta la imprecisión que implica la finitud

---

<sup>11</sup> Es decir, una curva a lo largo de la cual el cuerpo se mueve.

de la velocidad de propagación de la luz. De esto y de una segunda dificultad que prevalece aquí tendremos que tratar en detalle más adelante.

## V

### EL SISTEMA DE COORDENADAS DE GALILEO

Como es bien sabido, la ley fundamental de la Mecánica de Galileo - Newton, que se conoce como ley de la inercia,\* puede enunciarse así: Un cuerpo alejado suficientemente de otros cuerpos continúa en estado de reposo o de movimiento uniforme en una línea recta. Esta ley no sólo dice algo sobre el movimiento de los cuerpos, sino que también indica los cuerpos de referencia o sistemas de coordenadas, permisibles en Mecánica, que pueden usarse en la descripción mecánica. Las estrellas fijas visibles son cuerpos para los que la ley de inercia ciertamente se cumple en un alto grado de aproximación. Ahora bien, si usamos un sistema de coordenadas que está rígidamente unido a la tierra, entonces, en relación con este sistema, cada estrella fija describe un círculo de inmenso radio en el curso de un día astronómico, resultado que se opone a la afirmación de la ley de la inercia. De modo que, si nos adherimos a esta ley, debemos referir estos movimientos sólo a sistemas de coordenadas con respecto a los cuales las estrellas fijas no se mueven en un círculo. Un sistema de coordenadas cuyo estado de movimiento es tal que la ley de inercia se cumple en relación con él se denomina "sistema de coordenadas de Galileo". Las leyes de la Mecánica de Galileo-Newton pueden considerarse válidas sólo para un sistema de coordenadas galileano.

## V

### EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD (EN SENTIDO RESTRINGIDO)

Para lograr la mayor claridad posible, volvamos a nuestro ejemplo del vagón de ferrocarril que se supone que viaja uniformemente. Llamamos a su movimiento una traslación uniforme ("uniforme" porque tiene velocidad y dirección constantes, "traslación" porque, aunque el vagón cambia su posición en relación con el terraplén, no gira al hacerlo). Imaginemos un cuervo volando por el aire de tal manera que su movimiento, observado desde el terraplén, sea uniforme y rectilíneo. Si tuviéramos que observar el vuelo del cuervo desde el vagón de tren en movimiento, encontraríamos que el movimiento del cuervo sería de diferente velocidad y dirección, pero que seguiría siendo uniforme y en línea recta. Expresado de manera abstracta podemos decir: Si una masa  $m$  se mueve uniformemente en línea recta con respecto a un sistema de coordenadas  $K$ , entonces también se moverá uniformemente y en línea recta con respecto a un segundo sistema de coordenadas  $K'$ , siempre que éste esté

---

\* El Principio de inercia, no es de Galileo ni de Newton, sino que fue publicado por Des Cartes en 1644 (N. del T.)

ejecutando un movimiento de traslación uniforme con respecto a  $K$ . De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, se sigue que:

Si  $K$  es un sistema de coordenadas de Galileo, entonces cualquier otro sistema de coordenadas  $K'$  es un sistema de coordenadas de Galileo, cuando, en relación con  $K$ , está en una condición de movimiento uniforme de traslación. Con respecto a  $K'$ , las leyes mecánicas de Galileo - Newton se cumplen exactamente igual que con respecto a  $K$ .

Avanzamos un paso más en nuestra generalización cuando expresamos el principio así: si, en relación con  $K$ ,  $K'$  es un sistema de coordenadas que se mueve uniformemente sin rotación, entonces los fenómenos naturales siguen su curso con respecto a  $K'$  de acuerdo exactamente, con las mismas leyes generales, que con respecto a  $K$ . Este enunciado se denomina *principio de relatividad* (en sentido restringido).

Mientras uno estuviera convencido de que todos los fenómenos naturales eran susceptibles de representación con la ayuda de la mecánica clásica, no había necesidad de dudar de la validez de este principio de relatividad. Pero en vista del desarrollo más reciente de la electrodinámica y la óptica, se hizo cada vez más evidente que la mecánica clásica proporciona una base insuficiente para la descripción física de todos los fenómenos naturales. En esta coyuntura, la cuestión de la validez del principio de la relatividad llegó a estar madura para la discusión, y no parecía imposible que la respuesta a esta pregunta pudiera ser negativa.

Sin embargo, hay dos hechos generales que de entrada hablan mucho a favor de la validez del principio de relatividad. Aunque la Mecánica Clásica no nos proporciona una base suficientemente amplia para la presentación teórica de todos los fenómenos físicos, debemos concederle una medida considerable de "verdad", ya que nos proporciona los movimientos reales de los cuerpos celestes con una delicadeza, de detalle poco menos que maravilloso. Por lo tanto, el principio de relatividad debe aplicarse con gran precisión en el dominio de la Mecánica. Pero que un principio de tan amplia generalidad se cumpla con tanta exactitud en un dominio de fenómenos y, sin embargo, sea inválido para otro, *a priori* no es muy probable.

Pasamos ahora al segundo argumento, al que, además, volveremos más adelante. Si el principio de la relatividad (en el sentido restringido) no se cumple, entonces los sistemas de coordenadas galileanos  $K, K', K''$ , etc., que se mueven uniformemente entre sí, no serán equivalentes para la descripción de fenómenos naturales. En este caso, nos veríamos obligados a creer que las leyes naturales pueden formularse de una manera particularmente simple y, por supuesto, solo a condición de que, entre todos los sistemas de coordenadas galileanos posibles, deberíamos haber elegido uno ( $K_0$ ) de un estado particular de movimiento como nuestro cuerpo de referencia. Entonces deberíamos estar justificados (debido a sus méritos para la descripción de los fenómenos naturales) al llamar a este sistema "absolutamente en reposo" y a todos los demás sistemas galileanos  $K$  "en movimiento". Si, por ejemplo, nuestro terraplén fuera el sistema  $K_0$ , entonces nuestro vagón de ferrocarril sería un

sistema  $K$ , respecto del cual se mantendrían leyes menos simples que respecto de  $K_0$ . Esta simplificación disminuida se debería a que el vagón estaría en movimiento (es decir, “realmente”) con respecto a  $K_0$ . En las leyes generales de la naturaleza que se han formulado con referencia a  $K$ , la magnitud y la dirección de la velocidad del vagón jugarían necesariamente un papel. Deberíamos esperar, por ejemplo, que la nota emitida por un tubo de órgano colocado con su eje paralelo a la dirección de desplazamiento fuera diferente de la emitida si el eje del tubo estuviera colocado perpendicularmente a esta dirección. Ahora bien, en virtud de su movimiento en una órbita alrededor del sol, nuestra Tierra es comparable a un vagón de tren que viaja a una velocidad de unos 30 kilómetros por segundo. Si el principio de la relatividad no fuera válido, deberíamos esperar que la dirección del movimiento de la Tierra en cualquier momento entraría en las leyes de la naturaleza, y también que los sistemas físicos en su comportamiento dependerían de la orientación en el espacio con respecto a la Tierra. Porque debido a la alteración en la dirección de la velocidad de revolución de la Tierra en el transcurso de un año, la Tierra no puede estar en reposo en relación con el sistema hipotético  $K_0$  durante todo el año. Sin embargo, las observaciones más cuidadosas nunca han revelado tales propiedades anisotrópicas en el espacio físico terrestre, es decir, una no equivalencia física de diferentes direcciones. Este es un argumento muy poderoso a favor del principio de relatividad.

## VI

### EL TEOREMA DE LA ADICIÓN DE VELOCIDADES EMPLEADO EN MECÁNICA CLÁSICA

Supongamos que nuestro viejo amigo, el vagón de ferrocarril, viaja a lo largo de los rieles con una velocidad constante  $v$ , y que un hombre recorre la longitud del vagón en la dirección de viaje con una velocidad  $w$ . ¿Qué tan rápido o, en otras palabras, con qué velocidad  $W$  avanza el hombre con respecto al terraplén durante el proceso? La única respuesta posible parece resultar de la siguiente consideración: si el hombre se detuviera un segundo, avanzaría con respecto al terraplén una distancia  $v$  igual numéricamente a la velocidad del vagón. Sin embargo, como consecuencia de su caminar, recorre una distancia adicional  $w$  con respecto al vagón, y por lo tanto también con respecto al terraplén, siendo en este segundo la distancia  $w$  numéricamente igual a la velocidad con la que camina. Así, en total recorre la distancia  $W = v + w$  relativa al terraplén en el segundo considerado. Veremos más adelante que este resultado, que expresa el teorema de la suma de velocidades empleado en la Mecánica Clásica, no puede mantenerse; en otras palabras, la ley que acabamos de escribir no se cumple en la realidad. Por el momento, sin embargo, asumiremos su corrección.

## VII

## LA APARENTE INCOMPATIBILIDAD DE LA LEY DE PROPAGACIÓN DE LA LUZ CON EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Difícilmente exista una ley más simple en la Física que aquella según la cual la luz se propaga en el espacio vacío. Todo niño en la escuela sabe, o cree saber, que esta propagación se realiza en línea recta con una velocidad  $c = 300\,000\text{ km/s}$ . De todos modos, sabemos con gran exactitud que esta velocidad es la misma para todos los colores, porque si no fuera así, no se observaría el mínimo de emisión simultáneamente para diferentes colores durante el eclipse de una estrella fija por su vecina oscura. Por medio de consideraciones similares basadas en observaciones de estrellas dobles, el astrónomo holandés De Sitter también pudo demostrar que la velocidad de propagación de la luz no puede depender de la velocidad de movimiento del cuerpo que emite la luz. La suposición de que esta velocidad de propagación depende de la dirección "en el espacio" es, en sí misma, improbable.

En resumen, supongamos que el niño en la escuela cree justificadamente en la simple ley de la constancia de la velocidad de la luz  $c$  (en el vacío). ¿Quién imaginaría que esta simple ley ha sumido al físico concienzudamente reflexivo en las mayores dificultades intelectuales? Consideremos cómo surgen estas dificultades.

Por supuesto, debemos referir el proceso de propagación de la luz (y de hecho cualquier otro proceso) a un cuerpo de referencia rígido (sistema de coordenadas). Como tal sistema, escojamos nuevamente nuestro terraplén. Imaginaremos que se ha eliminado el aire de encima. Si se envía un rayo de luz a lo largo del terraplén, vemos de lo anterior que la punta del rayo se transmitirá con la velocidad  $c$  relativa al terraplén. Supongamos ahora que nuestro vagón de ferrocarril viaja nuevamente a lo largo de las vías del tren con la velocidad  $v$ , y que su dirección es la misma que la del rayo de luz, pero su velocidad, por supuesto, mucho menor. Indaguemos sobre la velocidad de propagación del rayo de luz con respecto al vagón. Es evidente que aquí podemos aplicar la consideración del apartado anterior, ya que el rayo de luz hace el papel del hombre que camina con relación al vagón. La velocidad  $w$  del hombre con respecto al terraplén se reemplaza aquí por la velocidad de la luz con respecto al terraplén.  $w$  es la velocidad requerida de la luz con respecto al vagón y tenemos

$$w = c - v$$

La velocidad de propagación de un rayo de luz con respecto al vagón resulta menor que  $c$ .

Pero este resultado entra en conflicto con el principio de relatividad expuesto en la Sección V. Porque, como cualquier otra ley general de la naturaleza, la ley de transmisión de la luz en el vacío debe, según el principio de relatividad, ser la misma para el vagón de ferrocarril como cuerpo de referencia como cuando los rieles son el cuerpo de referencia. Pero, a partir de nuestra consideración anterior, esto parecería ser imposible. Si cada rayo de luz se propaga con respecto al terraplén con la velocidad  $c$ , entonces, por esta razón, parecería que necesariamente debe cumplirse otra ley de propagación de la luz con respecto al vagón, resultado que contradice el principio de relatividad.

En vista de este dilema, no parece haber otra cosa que abandonar o el principio de relatividad o la simple ley de la propagación de la luz en el vacío. Aquellos de ustedes que hayan seguido con atención la discusión anterior seguramente esperarán que retengamos el principio de la relatividad, que apela tan convincentemente al intelecto porque es muy natural y simple. La ley de la propagación de la luz en el vacío tendría entonces que ser reemplazada por una ley más complicada conforme al principio de la relatividad. El desarrollo de la física teórica muestra, sin embargo, que no podemos seguir este camino. Las investigaciones teóricas históricas de H. A. Lorentz sobre los fenómenos electrodinámicos y ópticos relacionados con los cuerpos en movimiento muestran que la experiencia en este dominio conduce de manera concluyente a una teoría de los fenómenos electromagnéticos, de los cuales la ley de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío es una consecuencia necesaria. Por lo tanto, destacados físicos teóricos se inclinaron más a rechazar el principio de relatividad, a pesar de que no se habían encontrado datos empíricos que contradijeran este principio.

En esta coyuntura entró en escena la teoría de la relatividad. Como resultado de un análisis de las concepciones físicas del tiempo y el espacio, se hizo evidente que en realidad no existe la menor incompatibilidad entre el principio de la relatividad y la ley de propagación de la luz, y que al aferrarse sistemáticamente a ambas leyes se podría llegar a una teoría lógicamente rígida. Esta teoría ha sido llamada teoría especial de la relatividad para distinguirla de la teoría extendida, de la que nos ocuparemos más adelante. En las siguientes páginas presentaremos las ideas fundamentales de la teoría especial de la relatividad.

## VIII

### **SOBRE LA IDEA DEL TIEMPO EN FÍSICA**

Dos rayos han caído sobre los rieles de nuestro terraplén ferroviario en dos lugares, A y B, muy distantes entre sí. Hago la afirmación adicional de que estos dos rayos ocurrieron simultáneamente. Si le pregunto si esta afirmación tiene sentido, responderá a mi pregunta con un decidido "Sí". Pero si ahora me acerco a usted con la solicitud de que me explique el sentido de la declaración con mayor precisión, encontrará después de algunas consideraciones que la respuesta a esta pregunta no es tan fácil como parece a primera vista.

Después de algún tiempo quizás se le ocurra la siguiente respuesta: "El significado de la declaración es claro en sí mismo y no necesita mayor explicación; por supuesto, requeriría alguna consideración si se me encargara determinar mediante observaciones si en el caso real los dos eventos ocurrieron simultáneamente o no". No puedo estar satisfecho con esta respuesta por la siguiente razón. Suponiendo que, como resultado de ingeniosas consideraciones, un hábil meteorólogo descubriera que los rayos siempre deben caer en los lugares A y B simultáneamente, entonces deberíamos enfrentarnos a la tarea de probar si este resultado teórico está o no de acuerdo con la realidad. Encontramos



la misma dificultad con todos los enunciados físicos en los que juega un papel el concepto "simultáneo". El concepto no existe para el físico hasta que no tiene la posibilidad de descubrir si se cumple o no en un caso real. Por lo tanto, necesitamos una definición de simultaneidad tal que esta definición nos proporcione el método por medio del cual, en el presente caso, puede decidir experimentalmente si ambos rayos ocurrieron o no simultáneamente. Mientras no se satisfaga este requisito, me dejo engañar como físico (y, por supuesto, lo mismo se aplica si no soy físico), cuando imagino que puedo atribuir un significado al enunciado de simultaneidad. (Le pediría al lector que no continúe hasta que esté completamente convencido de este punto).

Después de reflexionar sobre el asunto durante algún tiempo, ofrece la siguiente sugerencia con la cual probar la simultaneidad. Al medir a lo largo de los rieles, se debe medir la línea de conexión AB y colocar un observador en el punto medio M de la distancia AB. Este observador debe contar con una disposición (por ejemplo, dos espejos inclinados a  $90^\circ$ ) que le permita observar visualmente ambos lugares A y B al mismo tiempo. Si el observador percibe los dos rayos al mismo tiempo, entonces son simultáneos.

Estoy muy complacido con esta sugerencia, pero a pesar de todo eso, no puedo dar por resuelto el asunto, porque me siento obligado a formular la siguiente objeción: el observador en M percibe que los rayos recorren la longitud A —M. con la misma velocidad que a lo largo de la longitud B — M. Pero un examen de esta suposición sólo sería posible si tuviéramos ya a nuestra disposición los medios para medir el tiempo. Por lo tanto, parecería como si nos estuviéramos moviendo aquí en un círculo lógico

Después de una mayor consideración, me lanzas una mirada un tanto desdeñosa —y con razón— y declaras: “Sin embargo, mantengo mi definición anterior, porque en realidad no supone absolutamente nada sobre la luz. Sólo se puede exigir una cosa a la definición de simultaneidad, a saber, que en todo caso real nos proporcione una decisión empírica sobre si se cumple o no la concepción que se ha de definir. Que mi definición satisface esta demanda es indiscutible. Que la luz requiera el mismo tiempo para recorrer el camino A — M que para el camino B — M no es en realidad ni una suposición ni una hipótesis sobre la naturaleza física de la luz, sino una estipulación que puedo hacer por mi propia voluntad para llegar a una definición de simultaneidad.”

Es claro que esta definición puede usarse para dar un significado exacto no solo a dos eventos, sino a tantos eventos como queramos elegir, e independientemente de las posiciones de las escenas de los eventos con respecto al cuerpo de referencia<sup>1 1 1</sup> (en nuestro caso, el terraplén del tren).

---

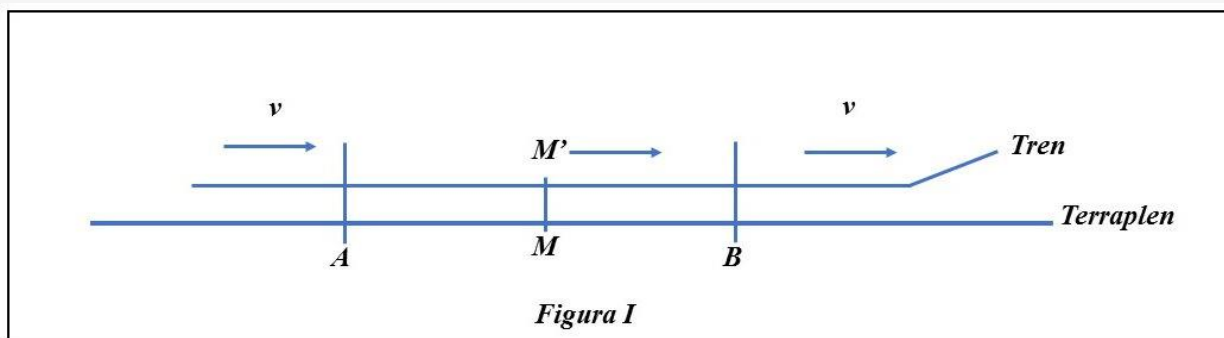
<sup>1 1 1</sup> Suponemos además que, cuando tres eventos A, B y C ocurren en diferentes lugares de tal manera que, si A es simultáneo con B, y B es simultáneo con C (simultáneo en el sentido de la definición anterior), entonces también se cumple el criterio de simultaneidad del par de eventos A, C. Esta suposición es una hipótesis física sobre la ley de

Estamos así llevados también a una definición, en la Física, del concepto de “tiempo”. Para este propósito. supongamos que relojes de idéntica construcción están colocados en los puntos A, B y C de la vía férrea (un sistema de coordenadas), y que los relojes están ajustados de tal manera que las posiciones de sus agujas son simultáneas (en el sentido anterior). Bajo estas condiciones entendemos por “tiempo” de un evento la lectura (posición de las manecillas) de aquel de estos relojes que se encuentra en las inmediaciones (en el espacio) del evento. De esta manera, se asocia un valor de tiempo con cada evento que es esencialmente susceptible de observación.

Esta estipulación contiene una hipótesis física adicional, cuya validez difícilmente será puesta en duda sin evidencia empírica en contrario. Se ha supuesto que todos estos relojes funcionan a la misma velocidad si son de construcción idéntica. Expresado de manera más exacta: cuando dos relojes colocados en reposo en diferentes lugares de un cuerpo de referencia se ajustan de tal manera que una posición particular de las agujas de un reloj es simultánea (en el sentido anterior) con la misma posición de las agujas del otro reloj, entonces los “ajustes” idénticos son siempre simultáneos (en el sentido de la definición anterior).

## IX

### RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD



Hasta ahora nuestras consideraciones se han referido a un determinado cuerpo de referencia, al que hemos denominado “terrapién ferroviario”. Supongamos un tren muy largo que viaja a lo largo de los rieles con velocidad constante  $v$  y en la dirección indicada en la figura 1. Las personas que viajan en este tren utilizarán ventajosamente el tren como un cuerpo de referencia rígido (sistema de coordenadas); ellos consideran todos los eventos en referencia al tren. Entonces, cada evento que ocurre a lo largo de la línea también ocurre en un punto particular del tren. Además, la definición de

---

propagación de la luz; ciertamente debe cumplirse si queremos mantener la ley de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío.

simultaneidad se puede dar con respecto al tren exactamente de la misma manera que con respecto al terraplén. Como consecuencia natural, sin embargo, surge la siguiente pregunta:

Hasta ahora nuestras consideraciones se han referido a un determinado cuerpo de referencia, al que hemos denominado “terraplén ferroviario”. Supongamos un tren muy largo que viaja a lo largo de los rieles con velocidad constante  $v$  y en la dirección indicada en la figura 1. Las personas que viajan en este tren utilizarán ventajosamente el tren como un cuerpo de referencia rígido (sistema de coordenadas); ellos consideran todos los eventos en referencia al tren. Entonces, cada evento que ocurre a lo largo de la línea también ocurre en un punto particular del tren. Además, la definición de simultaneidad se puede dar con respecto al tren exactamente de la misma manera que con respecto al terraplén. Como consecuencia natural, sin embargo, surge la siguiente pregunta:

Dos eventos (por ejemplo, los dos rayos A y B) que son simultáneos con respecto al terraplén del ferrocarril, ¿son también simultáneos con respecto al tren? Mostraremos directamente que la respuesta debe ser negativa.

Cuando decimos que los rayos A y B son simultáneos con respecto al terraplén, queremos decir: los rayos de luz emitidos en los lugares A y B, donde ocurre el rayo, se encuentran en el punto medio M de la longitud A — B del terraplén. Pero los eventos A y B también corresponden a las posiciones A y B del tren. Sea M' el punto medio de la distancia A — B en el tren en movimiento. Justo cuando se producen los dos eventos<sup>1</sup>, este punto M' coincide naturalmente con el punto M, pero, con la velocidad  $v$  del tren, se desplaza hacia la derecha (en el diagrama). Si un observador ubicado en la posición M' en el tren no poseyera esta velocidad, permanecería permanentemente en M, y los rayos de luz emitidos en los eventos A y B le alcanzarían simultáneamente, es decir, se encontrarían justo donde se encuentra. Ahora bien, en realidad (considerado con referencia al terraplén del ferrocarril) se está acercando hacia el haz de luz procedente de B, mientras que va delante del haz de luz procedente de A. Por lo tanto, el observador verá el haz de luz emitido por B antes que él verá el emitido por A. Los observadores que toman el tren como su cuerpo de referencia deben, por lo tanto, llegar a la conclusión de que el evento B tuvo lugar antes que el evento A. Llegamos así al importante resultado:

Sucesos que se consideran simultáneos con respecto al terraplén no lo son con respecto al tren, y viceversa (relatividad de la simultaneidad). Cada cuerpo de referencia (sistema de coordenadas) tiene su propio tiempo particular; a menos que se nos explique el cuerpo de referencia al que se refiere el enunciado del tiempo, el enunciado del tiempo de un acontecimiento no tiene significado.

Ahora bien, antes del advenimiento de la teoría de la relatividad, siempre se había asumido tácitamente en la Física que la determinación del intervalo de tiempo tenía un significado absoluto, es

---

<sup>111</sup> Considerado desde el terraplén.

decir, que es independiente del estado de movimiento del cuerpo de referencia. Pero acabamos de ver que este supuesto es incompatible con la definición más natural de simultaneidad; si descartamos esta suposición, entonces desaparece el conflicto entre la ley de propagación de la luz en el vacío y el principio de relatividad (desarrollado en la Sección VII).

Fuimos llevados a ese conflicto por las consideraciones dadas en la Sección VI, las que ahora ya no son sostenibles. En esa Sección concluimos que el hombre en el vagón, que recorre la distancia  $w$  por segundo con respecto al vagón, recorre, también, la misma distancia con respecto al terraplén en cada segundo de tiempo. Pero, de acuerdo con las consideraciones anteriores, el tiempo requerido por un determinado suceso con respecto al vagón no debe ser considerado igual a la duración del mismo suceso juzgado desde el terraplén (tomado como cuerpo de referencia). Por lo tanto, no se puede afirmar que el hombre al caminar recorre la distancia  $w$  relativa a la vía férrea en un tiempo que es igual a un segundo, si es juzgado desde el terraplén.

Además, las consideraciones de la Sección VI se basan sobre una segunda suposición que, a la luz de un análisis estricto, parece ser arbitraria, aunque siempre se hizo tácitamente, incluso antes de la introducción de la teoría de la relatividad.

## X

### **SOBRE LA RELATIVIDAD DE LA CONCEPCIÓN DE DISTANCIA**

Consideremos dos puntos particulares en el tren<sup>1</sup> que viaja a lo largo del terraplén con la velocidad  $v$ , y averigüemos cuál es la distancia que los separa. Ya sabemos que, para la medida de una distancia, es necesario tener un cuerpo de referencia. ¿Con respecto a qué cuerpo se puede medir la distancia? El plan más simple es utilizar el propio tren como cuerpo de referencia (o sistema de coordenadas). En el tren, un observador mide el intervalo marcando con su vara de medir en línea recta (por ejemplo, a lo largo del piso del vagón) tantas veces como sea necesario para llevarlo de un punto marcado al otro. Entonces, el número que nos dice con qué frecuencia se debe colocar la varilla es la distancia requerida.

Es un asunto diferente cuando la distancia tiene que ser juzgada desde la línea férrea. Aquí se sugiere el siguiente método. Si llamamos A' y B' a los dos puntos en el tren cuya distancia se requiere conocer y que ambos puntos se mueven con la velocidad  $v$  a lo largo del terraplén. En primer lugar,

---

<sup>1</sup> Por ejemplo, las posiciones del punto medio de la longitud del primer vagón y la del punto medio de la longitud del centésimo vagón.

necesitamos determinar los puntos A y B del terraplén que están siendo pasados por los dos puntos A' y B' en un momento particular  $t$ , juzgado desde el terraplén.

Estos puntos A y B del terraplén se pueden determinar aplicando la definición de tiempo dada en la Sección VIII. La distancia entre estos puntos A y B se mide luego aplicando repetidamente la vara de medir a lo largo del terraplén desde A hasta B.

*A priori* no es en modo alguno seguro que esta última medida nos proporcione el mismo resultado que la primera. Así, la longitud del tren medida desde el terraplén puede ser diferente de la obtenida midiéndola en el propio tren. Esta circunstancia nos lleva a una segunda objeción que debe oponerse a la consideración aparentemente obvia de la Sección VI. Es decir, si el hombre en el vagón recorre la distancia  $w$  en una unidad de tiempo, medida desde el tren, entonces esta distancia, medida desde el terraplén, no es necesariamente igual a  $w$ .

## XI

### LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Los resultados de las tres últimas secciones muestran que la aparente incompatibilidad de la ley de propagación de la luz con el principio de la relatividad (Sección VII) ha sido deducida mediante una consideración que tomó prestadas dos hipótesis injustificables de la Mecánica Clásica; estas son las siguientes:

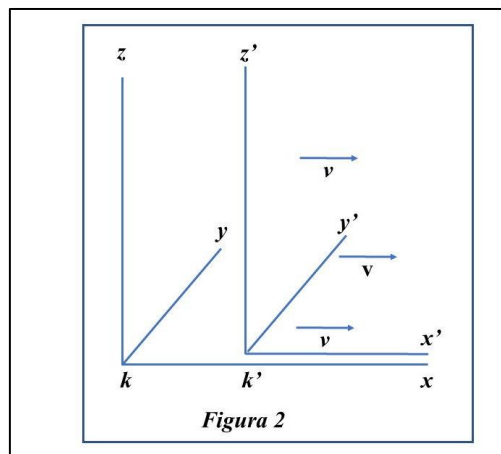
(1) El intervalo de tiempo (tiempo) entre dos eventos es independiente de la condición de movimiento del cuerpo de referencia.

(2) El intervalo de espacio (distancia) entre dos puntos de un cuerpo rígido es independiente de la condición de movimiento del cuerpo de referencia.

Si descartamos estas hipótesis, entonces el dilema de la Sección VII desaparece, porque el teorema de la suma de velocidades derivado de la Sección VI se vuelve inválido. Se presenta la posibilidad de que la ley de propagación de la luz en el vacío sea compatible con el principio de relatividad, y surge la pregunta: ¿Cómo hemos de modificar las consideraciones de la Sección VI para eliminar el aparente desacuerdo entre estos dos resultados fundamentales de la experiencia? Esta pregunta lleva a una general. En la discusión de la Sección VI tenemos que tratar con lugares y tiempos relativos tanto para el tren como para el terraplén. ¿Cómo podemos encontrar el lugar y la hora de un evento en relación con el tren, cuando conocemos el lugar y la hora del evento con respecto al terraplén ferroviario? ¿Existe una respuesta pensable a esta pregunta de tal naturaleza que la ley de transmisión de la luz en el vacío no contradiga el principio de la relatividad? En otras palabras: ¿Podemos concebir

una relación entre el lugar y el tiempo de los eventos individuales relativa a ambos cuerpos de referencia, tal que cada rayo de luz posea la velocidad de transmisión  $c$  relativa al terraplén y relativa al tren? Esta pregunta conduce a una respuesta positiva bastante definida ya que se ha planteado una ley de transformación perfectamente definida para las magnitudes espacio-temporales de un evento cuando se cambia de un cuerpo de referencia a otro.

Antes de ocuparnos de esto, introduciremos la siguiente consideración incidental. Hasta ahora



sólo hemos considerado los acontecimientos que tienen lugar a lo largo del terraplén, que matemáticamente tenía que asumir la función de una línea recta. De la manera indicada en la Sección II, podemos imaginar este cuerpo de referencia complementado lateralmente y en dirección vertical por medio de un entramado de varillas, de modo que un evento que ocurre en cualquier lugar puede ser localizado con referencia a este entramado. De manera similar, podemos imaginar que el tren que viaja con la velocidad  $v$  continúa a través de todo el espacio, de modo que cada evento, por muy lejano que esté, también podría localizarse con respecto al segundo marco. Sin cometer ningún error fundamental, po-

demos ignorar el hecho de que, en realidad, estos marcos se interferirían continuamente entre sí, debido a la impenetrabilidad de los cuerpos sólidos. En cada uno de estos marcos, imaginamos tres superficies perpendiculares entre sí marcadas y designadas como "planos de coordenadas" ("sistema de coordenadas"). Un sistema de coordenadas  $K$  corresponde entonces al terraplén y un sistema de coordenadas  $K'$  al tren. Un evento, dondequiera que haya tenido lugar, estaría fijo en el espacio con respecto a  $K$  por las tres perpendiculares  $x, y, z$  en los planos de coordenadas, y con respecto al tiempo por un valor de tiempo  $t$ . Con relación a  $K'$ , el mismo evento estaría fijado con respecto al espacio y al tiempo por los valores correspondientes  $x', y', z', t'$ , que, por supuesto, no son idénticos a  $x, y, z, t$ . Ya se ha expuesto en detalle cómo estas magnitudes deben considerarse como resultados de mediciones físicas. Obviamente, nuestro problema puede ser formulado con exactitud de la siguiente manera. ¿Cuáles son los valores de  $x', y', z', t'$  de un evento con respecto a  $K'$  cuando, para el mismo evento, están dados los valores de las magnitudes  $x, y, z, t$ , con respecto a  $K$ ? Las relaciones deben ser elegidas de tal manera que se satisfaga la ley de la transmisión de la luz en el vacío para uno y el mismo rayo de luz (y, por supuesto para cualquier rayo de luz) con respecto a  $K$  y a  $K'$ . Para una orientación en el espacio de un sistema de coordenadas como el indicado en el diagrama de la Figura 2, el problema se resuelve mediante las ecuaciones:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Este sistema de ecuaciones es conocido como “Transformación de Lorentz”<sup>1</sup>.

Si en vez de la ley de la transmisión de la luz, hubiésemos tomado como nuestra base las suposiciones tácitas de la vieja Mecánica, sobre el carácter absoluto del tiempo y la longitud, entonces, en vez de las ecuaciones dadas más arriba, hubiésemos obtenido las siguientes ecuaciones:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Este sistema de ecuaciones es, a menudo, llamado “Transformación de Galileo”. La Transformación de Galileo puede ser obtenida de la transformación de Lorentz para aquellos valores de las velocidades tan pequeños respecto a  $c$  que hagan el denominador de la primera ecuación de Lorentz prácticamente igual a 1.

Con la ayuda de la ilustración (Figura 2) podemos, rápidamente, entender que, de acuerdo con la transformación de Lorentz, la ley de transmisión de la luz en el vacío es satisfecha tanto por el cuerpo

---

<sup>1</sup> Una simple deducción de la transformación de Lorentz está dada en el Anexo I.

de referencia  $K$  como por el cuerpo de referencia  $K'$ . Si se envía una señal luminosa a lo largo del eje positivo de las  $x$  y ese estímulo luminoso avanza de acuerdo con la ecuación

$$x = ct,$$

es decir, con la velocidad  $c$ . De acuerdo con las ecuaciones de la transformación de Lorentz, esta relación simple entre  $x$  y  $t$ , implica una relación entre  $x'$  y  $t'$ . Si en la primera y cuarta ecuaciones de Lorentz, sustituimos  $x$  por  $ct$ , obtenemos:

$$x' = \frac{(c - v)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t' = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De la cual, por simple división, inmediatamente surge la expresión:

$$x' = ct'.$$

Referida al sistema  $K'$ , la propagación de la luz ocurre de acuerdo a esta ecuación. De esta manera observamos que la velocidad de propagación de la luz relativa al cuerpo de referencia  $K'$  es también igual a  $c$ . El mismo resultado se obtiene para los rayos de luz que avanzan en cualquier otra dirección. Por supuesto, esto no sorprende, ya que las ecuaciones de la Transformación de Lorentz fueron deducidas de acuerdo con este punto de vista.

## XII

### EL COMPORTAMIENTO DE LAS VARILLAS DE MEDICIÓN Y DE LOS RELOJES EN LOS MOVIMIENTOS.



Coloqué una varilla de medición de un metro sobre el eje  $x'$  de  $K'$  de manera tal que un extremo (el inicio) coincida con el punto  $x' = 0$ , mientras que el otro extremo (el final de la varilla) coincida con el punto  $x' = 1$ . ¿Cuál es la longitud de la varilla de medición relativa al sistema  $K$ ? A fin de entender esto, sólo necesitamos preguntarnos dónde están el comienzo y el final de la varilla de medición respecto a  $K$  a un tiempo particular del sistema  $K$ . Mediante la primera ecuación de la Transformación de Lorentz, los valores de esos dos puntos al tiempo  $t = 0$ , son

$$x(\text{inicio de la varilla}) = 0 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$x(\text{final de la varilla}) = 1 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Puede demostrarse que la distancia entre esos dos puntos es  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Pero la varilla de medición de un metro se mueve con una velocidad  $v$  relativa al sistema  $K$ . De donde se sigue que la longitud de una varilla rígida, moviéndose en la dirección de su longitud con una velocidad  $v$  es  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  por metro. La varilla rígida es así más corta cuando está en movimiento que cuando está en reposo y cuánto más rápido es el movimiento, tanto más corta es la varilla. Para la velocidad  $v = c$  tendríamos  $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0$  y, para velocidades aún más grandes, la raíz cuadrada se vuelve imaginaria. De esto, concluimos que, en la teoría de la relatividad, la velocidad  $c$  cumple el papel de una velocidad limitante, que ni puede alcanzarse ni excederse por ningún cuerpo real.

Por supuesto, esta característica de la velocidad  $c$  como una velocidad limitante, se obtiene, claramente, también de las ecuaciones de la transformación de Lorentz, por eso, carece de sentido elegir valores de  $v$  mayores que  $c$ .

Si, por el contrario, hubiéramos considerado una varilla de medición en reposo, en el eje  $x$ , con respecto al sistema  $K$ , entonces habríamos encontrado que la longitud de la varilla juzgada desde el sistema  $K'$  habría sido  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ; esto está plenamente de acuerdo con el principio de la relatividad que forma la base de nuestras consideraciones.

*A priori*, queda claro que tenemos que ser capaces de aprender algo del comportamiento físico de las varillas de mediciones y de los relojes. En las ecuaciones de transformación, para las magnitudes  $x, y, z, t$ , no hay nada ni más ni menos importante, que los resultados de las mediciones, obtenibles mediante varillas de medición y de relojes.

Si nosotros hubiésemos basado nuestras consideraciones sobre la transformación de Galileo, no hubiésemos obtenido una contracción de la longitud de la varilla de medición como una consecuencia del movimiento.

Consideremos, ahora, un reloj segundero, que esté situado permanentemente en el origen ( $x' = 0$ ) de  $K'$ .  $t' = 0$  y  $t' = 1$ , son dos tics sucesivos de este reloj. Para esos dos tics, las ecuaciones primera y cuarta de la transformación de Lorentz dan:

$$t = 0$$

y

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Considerado desde  $K$ , el reloj se mueve con velocidad  $v$ ; al ser juzgado desde este cuerpo de referencia, el que transcurre entre dos tics no es un segundo, sino  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  segundos, esto es, un tiempo algo más largo. Como consecuencia de su movimiento, el reloj marcha más lentamente que cuando está en reposo. Aquí también la velocidad  $c$  cumple el papel de velocidad limitante e inalcanzable.

### XIII

#### TEOREMA DE LA ADICIÓN DE VELOCIDADES. EL EXPERIMENTO DE FIZEAU

Encontramos que sólo podemos controlar el tiempo y utilizar varillas de medición cuando las velocidades son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz; por lo tanto, difícilmente seríamos capaces de comparar directamente los resultados de las secciones previas de manera empírica. Por otra parte, estos resultados deben impactarlo por ser muy singulares y, por esta razón, voy a alcanzar otra conclusión de la teoría, una que fácilmente puede ser derivada de las consideraciones ya expresadas y la cual hay sido muy elegantemente confirmada por experimentos.

En la Sección VI, hemos derivado el teorema de la adición de las velocidades en una dirección, en la forma que también resulta de las hipótesis de la Mecánica Clásica. Este teorema también puede ser deducido fácilmente de la transformación de Galileo (Sección XI). En vez del hombre caminando en el interior del vagón, introduciremos un punto moviéndose en relación al sistema de coordenadas  $K'$  de acuerdo con la ecuación

$$x' = wt'$$

Mediante la primera y la cuarta ecuaciones de la transformación de Galileo, podemos expresar  $x'$  y  $t'$  en términos de  $x$  y  $t$  y así obtener

$$x = (v + w)t.$$

Esta ecuación expresa nada más que la ley del movimiento del punto con referencia al sistema  $K$  (como en el caso del hombre moviendo con referencia al terraplén). Denotaremos a esta velocidad mediante el símbolo  $W$ , y entonces obtenemos, como en la Sección VI,

$$W = v + w \tag{A}$$

Pero, también podemos llevar a cabo esta consideración, sobre la base de la teoría de la relatividad. En la ecuación

$$x' = wt'$$

debemos expresar  $x'$  y  $t'$  en términos de  $x$  y  $t$ , haciendo uso de la primera y la cuarta ecuaciones de las ecuaciones primera y cuarta de la *transformación de Lorentz*. En vez de la ecuación (A), obtendremos la ecuación

$$W = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} \tag{B}$$

la cual corresponde al teorema de la adición de velocidad de acuerdo con la teoría de la relatividad. La cuestión que ahora surge es: cuál de esos dos teoremas concuerda mejor con la experiencia. En

este punto, estamos instruidos por un experimento muy importante que realizó el brillante físico Hippolyte Louis Fizeau hace más de medio siglo y que, desde entonces, ha sido repetido por algunos de los mejores físicos experimentales, de modo que no cabe duda sobre su resultado. El experimento trata la siguiente cuestión, La luz viaja en un líquido inmóvil con una velocidad particular  $w$ , ¿Cuán rápido viaja en la dirección de la flecha en el tubo  $T$  (ver el diagrama acompañante, Figura 3) cuando el líquido antes mencionado fluye a través del tubo con una velocidad  $v$ ?

¿Con qué velocidad se propaga la luz en el tubo  $R$  de la figura

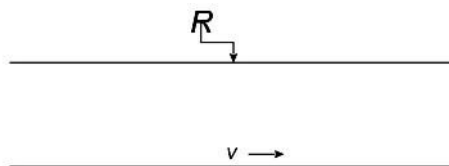


Figura 3

De acuerdo con el principio de la relatividad, debemos aceptar que la propagación de la luz siempre tiene lugar con la misma velocidad  $w$  *con respecto al líquido*, tanto si el líquido está en movimiento relativo a otros cuerpos o no. La velocidad de la luz relativa al líquido y la velocidad del líquido relativa al tubo, son conocidas, lo que requerimos es la velocidad de la luz relativa al tubo.

Está claro que tenemos, ante nosotros, el problema de la Sección VI. El tubo cumple el papel del terraplén o del sistema de coordenadas  $K$ , el líquido cumple el papel del vagón o del sistema de coordenadas  $K'$  y, finalmente, la luz cumple el papel del hombre caminando a lo largo del vagón, o del punto móvil en la presente sección. Si indicamos la velocidad de la luz relativa al tubo mediante la letra  $W$ , entonces esto estará dado por la ecuación (A) o la (B) de acuerdo con la transformación de Galileo o la de Lorentz que corresponda a los hechos. El resultado del experimento<sup>1</sup> decidió a favor de la ecuación (B), derivada de la teoría de la relatividad, y la concordancia es, realmente, muy exacta. De acuerdo con recientes y las más excelentes mediciones de Zeeman, la influencia de la velocidad de flujo  $v$  sobre la propagación de la luz, está representada por la fórmula (B) con una diferencia del uno por ciento.

No obstante, debemos llamar la atención al hecho de que una hipótesis sobre este fenómeno fue dada por H. A. Lorentz mucho antes del enunciado de la teoría de la relatividad. Esta teoría fue de naturaleza puramente electrodinámica y fue obtenida a partir del uso de hipótesis particulares referidas a la estructura electrodinámica de la materia. Esta circunstancia, no disminuye las conclusiones del experimento como una prueba crucial a favor de la teoría de la relatividad, para la electrodinámica de Maxwell – Lorentz, sobre la que la teoría original estaba basada y, de ninguna manera, se opone a la teoría de la relatividad. Más bien, esta última fue desarrollada a partir de la electrodinámica como una sorprendente simple combinación y generalización de hipótesis anteriormente independientes entre sí, sobre las cuales fue construida la electrodinámica.

## XIV

### EL VALOR HEURÍSTICO DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Nuestra línea de pensamiento en las páginas anteriores se puede resumir de la siguiente manera. La experiencia ha llevado a la convicción de que, por un lado, se cumple el principio de relatividad y que, por otro lado, la velocidad de transmisión de la luz en el vacío debe considerarse igual a una constante  $c$ . Uniendo estos dos postulados obtuvimos la ley de transformación para las coordenadas rectangulares  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y el tiempo  $t$  de los eventos que constituyen los procesos de la naturaleza. En este sentido no obtuvimos la transformación de Galileo, sino, a diferencia de la Mecánica clásica, la transformación de Lorentz.

---

<sup>1</sup> Fizeau encontró  $W = w + v(1 - 1/n^2)$  donde  $n = c/w$  es el índice de refracción del líquido, Por otra parte, debido a la pequeñez de  $vw/c^2$  comparada con 1, podemos reemplazar (B) por  $W = (w + v)(1 - vw/c^2)$  con el mismo orden de aproximación por  $w + v(1 - 1/n^2)$ , que está de acuerdo con los resultados de Fizeau.

La ley de propagación de la luz, cuya aceptación está justificada por nuestro conocimiento real, desempeñó un papel importante en este proceso de pensamiento. Sin embargo, una vez en posesión de la transformación de Lorentz, podemos combinar esto con el principio de relatividad y resumir la teoría así:

Toda ley general de la naturaleza debe estar expresada de modo que se transforme en una ley de exactamente la misma forma cuando, en vez de las variables espacio-temporales  $x, y, z, t$  del sistema de coordenadas original  $K$ , introducimos un nuevo espacio – con variables en el tiempo  $x', y', z', t'$  de un sistema de coordenadas  $K'$ . A este respecto, la relación entre las magnitudes ordinarias y las que llevan tilde, viene dada por la transformación de Lorentz. O, en resumen: las leyes generales de la naturaleza son covariantes con respecto a las transformaciones de Lorentz.

Esta es una condición matemática definida que la teoría de la relatividad exige de una ley natural, y en virtud de esto, la teoría se convierte en una valiosa ayuda heurística para la búsqueda de leyes generales de la naturaleza. Si se encontrase una ley general de la naturaleza que no satisficiera esta condición, entonces al menos uno de los dos supuestos fundamentales de la teoría habría sido refutado. Examinemos ahora qué resultados generales ha mostrado hasta ahora la última teoría.

## XV

### RESULTADOS GENERALES DE LA TEORÍA

A partir de nuestras consideraciones previas, ha quedado claro que la teoría (especial) de la relatividad ha surgido de la electrodinámica y la óptica. En estos campos no ha alterado apreciablemente las predicciones de la teoría anterior, pero ha simplificado considerablemente la estructura teórica, es decir, la derivación de las leyes, y — lo que es incomparablemente más importante — ha reducido considerablemente el número de hipótesis independientes que forman la base de la teoría. La teoría especial de la relatividad ha hecho tan plausible la teoría de Maxwell-Lorentz, que los físicos habrían aceptado generalmente esta última incluso si los experimentos no hubiesen dado resultados tan categóricos a su favor.

La Mecánica clásica requería ser modificada para poder alinearse con las demandas y los resultados de la teoría especial de la relatividad. Sin embargo, en la mayoría de los casos, estas modificaciones sólo afectan a las leyes de los movimientos rápidos, en los que las velocidades de la materia,  $v$ , no son muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Nuestras experiencias en tales movimientos rápidos comprenden muy pocos casos, como los movimientos de los electrones y de los iones; para otros movimientos, las variaciones de las leyes de la mecánica clásica son demasiado pequeñas para hacerse evidentes en la práctica. No consideraremos el movimiento de las estrellas

hasta que lleguemos a hablar de teoría general de la relatividad. De acuerdo con la teoría de la relatividad la energía cinética de un punto material de masa  $m$  ya no viene dada por la conocida expresión

$$m \frac{v^2}{2}$$

sino por la expresión

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Esta expresión tiende a un valor infinito cuando la velocidad  $v$  tiende a la velocidad de la luz  $c$ . Por lo tanto, la velocidad siempre permanecerá menor que  $c$ , por grandes que sean las energías utilizadas para producir la aceleración. Si desarrollamos la expresión de la energía cinética en forma de serie, obtenemos

$$mc^2 + m \frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Cuando  $v^2/c^2$  es pequeño en comparación con la unidad, el tercero de estos términos es siempre pequeño en comparación con el segundo, que es el único que se considera en la Mecánica clásica. El primer término  $mc^2$  no contiene la velocidad y no requiere consideración si solo estamos tratando la cuestión de cómo la energía de una masa puntual depende de la velocidad. Hablaremos de su significado esencial más adelante.

El resultado más importante de carácter general al que ha conducido la teoría especial de la relatividad se refiere a la concepción de la masa. Antes del advenimiento de la relatividad, la Física reconocía dos leyes de conservación de fundamental importancia, a saber, la ley de conservación de la energía y la ley de conservación de la masa; estas dos leyes fundamentales parecían ser bastante independientes entre sí. Por medio de la teoría de la relatividad se han unido en una sola ley. Ahora consideraremos brevemente cómo se produjo esta unificación y qué significado se le debe atribuir.

El principio de relatividad exige que la ley de la conservación de la energía se cumpla no sólo con referencia a un sistema de coordenadas  $K$ , sino también con respecto a todo sistema de coordenadas  $K'$  que se encuentre en un estado de movimiento uniforme de traslación relativa a  $K$ , o, brevemente, relativo a cada sistema de coordenadas "galileano". A diferencia de la Mecánica clásica, la transformación de Lorentz es el factor decisivo en la transición de un sistema a otro de este tipo.

Por medio de consideraciones comparativamente simples, de estas premisas, junto con las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica de Maxwell, llegamos a la siguiente conclusión: Un

cuerpo que se mueve con la velocidad  $v$ , que absorbe<sup>1</sup> una cantidad de energía  $E_0$  en forma de radiación sin sufrir una alteración en la velocidad del proceso, tiene, como consecuencia, su energía aumentada en una cantidad

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Considerando la expresión dada más arriba para la energía cinética del cuerpo, la energía requerida del cuerpo resulta ser

$$\frac{\left(m + \frac{E_0}{c^2}\right) c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Por lo tanto, el cuerpo tiene la misma energía que un cuerpo de masa  $(m + E_0/c^2)$  que se mueve con la velocidad  $v$ . De donde podemos decir: si un cuerpo absorbe una cantidad de energía  $E_0$ , entonces su masa inercial aumenta en una cantidad  $E_0/c^2$ . La masa inercial de un cuerpo no es una constante, sino que varía según el cambio en la energía del cuerpo. La masa de inercia de un sistema de cuerpos puede incluso considerarse como una medida de su energía. La ley de conservación de la masa de un sistema se vuelve idéntica a la ley de conservación de la energía, y sólo es válida siempre que el sistema no absorba ni emita energía.

Escribiendo la expresión de la energía en la forma

$$\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vemos que el término  $mc^2$ , que hasta ahora nos ha llamado la atención, no es otra cosa que la energía que poseía el cuerpo<sup>2</sup> antes de absorber la energía  $E_0$ .

En la actualidad no es posible una comparación directa de esta relación con el experimento, debido a que los cambios de energía  $E_0$  a los que podemos someter un sistema no son lo suficientemente grandes como para hacerse perceptibles como un cambio en la masa inercial del sistema.  $E_0/c^2$  es demasiado pequeño en comparación con la masa  $m$ , que estaba presente antes de la alteración de la

---

<sup>111</sup>  $E_0$  es la energía absorbida, considerada a partir de un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo.

<sup>222</sup> Considerada por un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo.

energía. Es debido a esta circunstancia que la Mecánica clásica pudo establecer con éxito la conservación de la masa como una ley de validez independiente.

Permítanme agregar una observación final de carácter fundamental. El éxito de la interpretación de Faraday-Maxwell de la acción electromagnética a distancia hizo que los físicos se convencieran de que no existen las acciones instantáneas. La teoría general de la relatividad hace probable que las masas eléctricas de un electrón se mantengan unidas por fuerzas gravitatorias, a una distancia (que no involucre un medio intermediario) del tipo de la ley de gravitación de Newton. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la acción a distancia con la velocidad de la luz siempre reemplaza a la acción instantánea a distancia con la acción a distancia con una velocidad de transmisión infinita. Esto está relacionado con el hecho de que la velocidad  $c$  cumple un papel fundamental en esta teoría. En la Parte II veremos de qué manera este resultado se modifica en la teoría general de la relatividad.

## XVI

### LA EXPERIENCIA Y LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

¿Hasta qué punto la teoría especial de la relatividad está respaldada por la experiencia? Esta pregunta no se responde fácilmente por la razón ya mencionada en relación con el experimento fundamental de Fizeau. La teoría especial de la relatividad ha sido cada vez más aceptada a partir de la teoría de Maxwell-Lorentz de los fenómenos electromagnéticos. Así, todos los hechos de la experiencia que apoyan la teoría electromagnética también apoyan la teoría de la relatividad. Como de particular importancia, menciono aquí el hecho de que la teoría de la relatividad nos permite predecir los efectos producidos en la luz que nos llega desde las estrellas fijas. Estos resultados se obtienen de una manera sumamente simple, y los efectos indicados, que se deben al movimiento relativo de la Tierra con referencia a esas estrellas fijas, se encuentran de acuerdo con la experiencia. Nos referimos al movimiento anual de la posición aparente de las estrellas fijas resultante del movimiento de la Tierra alrededor del Sol (aberración), y a la influencia de las componentes radiales de los movimientos relativos de las estrellas fijas con respecto a la Tierra en el color de la luz que nos llega de ellas. Este último efecto se manifiesta en un ligero desplazamiento de las líneas espectrales de la luz que nos transmite una estrella fija, en comparación con la posición de las mismas líneas espectrales cuando son producidas por una fuente de luz terrestre (principio Doppler). Los argumentos experimentales a favor de la teoría de Maxwell-Lorentz, que son al mismo tiempo argumentos a favor de la teoría de la relatividad, son demasiado numerosos para exponerlos aquí. En realidad, limitan las posibilidades teóricas hasta tal punto, que ninguna otra teoría que la de Maxwell y Lorentz ha sido capaz de sostenerse por sí misma cuando se prueba con la experiencia.



Pero hay dos clases de hechos experimentales obtenidos hasta ahora que pueden representarse en la teoría de Maxwell-Lorentz sólo mediante la introducción de una hipótesis auxiliar, que en sí misma, es decir, sin hacer uso de la teoría de la relatividad, parece extraña.

Se sabe que los rayos catódicos y los llamados rayos  $\beta$  emitidos por las sustancias radiactivas consisten en partículas electrificadas negativamente (electrones) de muy pequeña inercia y gran velocidad. Examinando la desviación de estos rayos bajo la influencia de campos eléctricos y magnéticos, podemos estudiar con mucha exactitud la ley del movimiento de estas partículas.

En el tratamiento teórico de estos electrones, nos encontramos con la dificultad de que la teoría electrodinámica por sí misma es incapaz de dar cuenta de su naturaleza. Puesto que las masas eléctricas de un signo se repelen entre sí, las masas eléctricas negativas que constituyen el electrón se dispersarían necesariamente bajo la influencia de sus repulsiones mutuas, a menos que entre ellas actúen fuerzas de otro tipo, cuya naturaleza ha permanecido hasta ahora oscura para nosotros.<sup>1</sup> Si ahora suponemos que las distancias relativas entre las masas eléctricas que constituyen el electrón permanecen sin cambios durante el movimiento del electrón (conexión rígida en el sentido de la mecánica clásica), llegamos a una ley de movimiento del electrón que no está de acuerdo con la experiencia. Guiado por puntos de vista puramente formales, H. A. Lorentz fue el primero en introducir la hipótesis de que las partículas que constituyen el electrón experimentan una contracción en la dirección del movimiento como consecuencia de ese movimiento, siendo la cantidad de esta contracción proporcional a la expresión  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ \*. Esta hipótesis, que no es justificable por ningún hecho electrodinámico, nos proporciona entonces esa ley particular del movimiento que ha sido confirmada con gran precisión en los últimos años.

La teoría de la relatividad conduce a la misma ley del movimiento, sin requerir ninguna hipótesis especial sobre la estructura y el comportamiento del electrón. A una conclusión similar llegamos en la Sección XIII en relación con el experimento de Fizeau, cuyo resultado es predicho por la teoría de la relatividad sin necesidad de basarse en hipótesis sobre la naturaleza física del líquido.

La segunda clase de hechos a los que hemos aludido se refiere a la cuestión de si el movimiento de la Tierra en el espacio puede o no hacerse perceptible en experimentos terrestres. Ya hemos señalado en la Sección V que todos los intentos de esta naturaleza llevaron a un resultado negativo. Antes de que se propusiera la teoría de la relatividad, era difícil reconciliarse con este resultado negativo, por razones que ahora se discutirán. Los prejuicios heredados sobre el tiempo y el espacio no permitían dudar de la importancia primordial de la transformación de Galileo para pasar de un cuerpo de

---

<sup>111</sup> La teoría general de la relatividad hace probable que las masas eléctricas de un electrón se mantengan unidas por fuerzas gravitatorias.

\*\*\* Esta expresión estaba mal impresa  $\sqrt{1 = v^2/c^2}$  en el original. (N. del T.)

referencia a otro. Ahora, suponiendo que las ecuaciones de Maxwell-Lorentz se cumplen para un cuerpo de referencia  $K$ , encontramos que no se cumplen para un cuerpo de referencia  $K'$  que se mueve uniformemente con respecto a  $K$ , si suponemos que las relaciones de la transformación de Galileo existen entre las coordenadas de  $K$  y  $K'$ . Por lo tanto, parece que, de todos los sistemas de coordenadas de Galileo, uno ( $K$ ) que corresponde a un estado particular de movimiento es físicamente único. Este resultado se interpretó físicamente considerando a  $K$  en reposo con respecto a un hipotético éter del espacio. Por otro lado, todos los sistemas de coordenadas  $K'$  que se mueven con respecto a  $K$  debían considerarse como en movimiento con respecto al éter. A este movimiento de  $K'$  contra el éter ("viento del éter"<sup>†</sup> con respecto a  $K'$ ) se le asignaron las leyes más complicadas que se suponía que valían en relación con  $K'$ . Estrictamente hablando, tal "viento del éter" también debe asumirse en relación con la Tierra, y durante mucho tiempo los esfuerzos de los físicos se dedicaron a intentar detectar la existencia de una "viento del éter" en la superficie de la Tierra.

En uno de los más notables de estos intentos, Michelson ideó un método que parece que debe ser decisivo. Imagine dos espejos dispuestos de tal manera sobre un cuerpo rígido que las superficies reflectantes estén una frente a la otra. Un rayo de luz requiere un tiempo  $T$  perfectamente definido para pasar de un espejo al otro y viceversa, si todo el sistema está en reposo con respecto al éter. Sin embargo, se encuentra, mediante el cálculo, que se requiere un tiempo  $T'$  ligeramente diferente para este proceso, si el cuerpo, junto con los espejos, se mueven relativamente al éter. Y todavía hay otro punto: se muestra, mediante el cálculo que, para una velocidad dada  $v$  con respecto al éter, este tiempo  $T'$  es diferente cuando el cuerpo se mueve perpendicularmente a los planos de los espejos del que resulta cuando el movimiento es paralelo a estos espejos. Aunque la diferencia estimada entre estos dos tiempos es extremadamente pequeña, Michelson y Morley realizaron un experimento con interferencia en el que esta diferencia debería haber sido claramente detectable. Pero el experimento dio un resultado negativo, un hecho muy desconcertante para los físicos. Lorentz y FitzGerald rescataron la teoría de esta dificultad al suponer que el movimiento del cuerpo relativo al éter produce una contracción del cuerpo en la dirección del movimiento, siendo la cantidad de contracción justamente suficiente para compensar la diferencia de tiempo mencionada anteriormente. La comparación con la discusión en la Sección XII muestra que, también desde el punto de vista de la teoría de la relatividad, esta solución de la dificultad era la correcta. Pero sobre la base de la teoría de la relatividad, el método de interpretación es incomparablemente más satisfactorio. De acuerdo con esta teoría, no existe tal cosa como un sistema de coordenadas "especialmente favorecido" (único) que ocasione la introducción de la idea del éter y, por lo tanto, no puede haber "viento del éter" ni ningún experimento con el que se pueda demostrar. Aquí la contracción de los cuerpos en movimiento se sigue de los dos principios fundamentales de la teoría sin la introducción de hipótesis particulares; y como factor principal que interviene en esta contracción encontramos, no el movimiento en sí mismo, al que no podemos atribuir ningún significado, sino el movimiento con respecto al cuerpo de referencia elegido en el

---

<sup>†††</sup> („Ätherwind" relativ zu  $K'$ ) en el original. (*N. del T*) Probablemente, Einstein se refería al movimiento del éter respecto de la Tierra.

caso particular en cuestión. Así, para un sistema de coordenadas que se mueve con la Tierra, el sistema de espejos de Michelson y Morley no se acorta, pero se acorta para un sistema de coordenadas que está en reposo con respecto al Sol.

## XVII

### EL ESPACIO TETRADIMENSIONAL DE MINKOVSKI

El no-matemático, cuando oye hablar de cosas “cuatridimensionales”, es asaltado por un estremecimiento misterioso y por un sentimiento que no se diferencia mucho del que despiertan los pensamientos de lo oculto.

El espacio es un continuum tridimensional. Con esto, queremos significar que es posible describir la posición de un punto (en reposo) mediante tres números (coordenadas)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y que, en sus vecindades, hay un número indefinido de puntos, la posición de cualquiera de ellos puede describirse por coordenadas tales como  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , que pueden estar tan cerca del que elegimos para los respectivos valores de las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para el primer punto. En virtud de esta última propiedad es que hablamos de un continuum y debido al hecho que hay tres coordenadas para cada punto, hablamos de ese continuum como “tridimensional”.

Similarmente, el mundo de los fenómenos físicos, que fue brevemente llamado “mundo” por Minkowski, es naturalmente “tetradimensional” en el sentido del espacio – tiempo. Ya que está compuesto de eventos individuales, cada uno de los cuales queda descrito por cuatro números, a saber: tres coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y una coordenada temporal, el valor del tiempo  $t$ . En ese sentido, el “mundo” también es un continuum, ya que para cada evento hay tantos eventos “vecinos” (realizados o, al menos, imaginables) como se nos ocurra elegir  $y$ , para alguno de ellos, sus coordenadas  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $t_1$  difieren por un monto indefinidamente pequeño de las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  del evento originalmente considerado.

Que nosotros no nos hayamos acostumbrado a considerar al mundo en el sentido de un continuum tetradimensional, se debe al hecho que, en Física, antes del advenimiento de la teoría de la relatividad, el tiempo cumplía un papel diferente y más independiente, comparado con las coordenadas espaciales.

Es por esta razón que nos habituamos a tratar al tiempo como un continuum independiente. De hecho, de acuerdo con la Mecánica clásica, el tiempo es absoluto, es decir, es independiente de la posición y de la condición de movimiento del sistema de coordenadas. Puede verse esta forma de expresar en la última ecuación de la transformación de Galileo, ( $t' = t$ ).

La consideración del “mundo” como tetradimensional, es natural en la teoría de la relatividad, ya que, de acuerdo con esta teoría, el tiempo es despojado de su independencia. Esto se muestra en la cuarta ecuación de la transformación de Lorentz:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Más aun, de acuerdo con esta ecuación la diferencia de tiempo  $\Delta t'$  entre dos eventos que ocurren respecto del sistema  $K'$  no se anula en general, aun cuando la diferencia temporal  $\Delta t$  para los mismos eventos respecto del sistema  $K$  se anula. “Espacio-distancia” pura de dos eventos respecto de  $K$  resultan en “tiempo-distancia” de los mismos eventos con respecto a  $K'$ . pero el descubrimiento de Minkowski, que fue de gran importancia para el desarrollo formal de la teoría de la relatividad, no yace aquí. Se encuentra, más bien, en el hecho de su reconocimiento de que el continuum tetradimensional espacio-tiempo de la teoría de la relatividad, en sus propiedades formales más esenciales, muestran una pronunciada relación con el continuum tridimensional del espacio geométrico euclidiano.<sup>1</sup> Sin embargo, a fin de dar la debida prominencia a esta relación, debemos reemplazar a la usual coordenada del tiempo  $t$  por una magnitud imaginaria  $\sqrt{-1} \times ct$  proporcional a ella. Bajo esas condiciones las leyes naturales que satisfacen las demandas de la teoría (especial) de la relatividad, asumen formas matemáticas, en las cuales la coordenada tiempo cumple exactamente la misma función que las tres coordenadas espaciales. Formalmente, esas cuatro coordenadas corresponden exactamente a las tres coordenadas espaciales en la geometría euclideana. Debe quedar en claro, aun para los no-matemáticos que, como consecuencia de adición puramente formal a nuestro conocimiento, inevitablemente, la teoría ganó claridad en una gran medida.

Los comentarios inadecuados pueden dar al lector sólo una vaga noción de la importante idea con la que contribuyó Minkowski. Sin su contribución, la teoría general de la relatividad, que se desarrollará en las páginas siguientes, no hubiese avanzado mucho. El trabajo de Minkowski es, indudablemente, difícil de acceder para alguien que no tenga experiencia en Matemáticas, pero como no es imprescindible tener una comprensión exacta de este trabajo para entender las ideas fundamentales de la teoría especial de la relatividad, así como de la teoría general de la relatividad, las voy a presentar aquí y volveré a ellas hacia el final de la Parte II.

---

<sup>1</sup> Cf. Una discusión algo más detallada en el Anexo II.

## PARTE II

### LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

#### XVIII

#### PRINCIPIO ESPECIAL Y GENERAL DE LA RELATIVIDAD

El principio básico, que fue el eje de todas nuestras consideraciones previas, fue el principio especial de la relatividad, es decir, el principio de la relatividad física de todo movimiento uniforme. Analicemos una vez más su significado cuidadosamente.

En todo momento estuvo claro que, desde el punto de vista de la idea que nos transmite, todo movimiento debe ser considerado sólo como un movimiento relativo. Volviendo a la ilustración que hemos usado con frecuencia del terraplén y el vagón de ferrocarril, podemos expresar el hecho de que el movimiento se produce aquí en las dos formas siguientes, ambas igualmente justificables:

- a) El vagón está en movimiento con respecto al terraplén.
- b) El terraplén está en movimiento relativo al vagón.

En (a) el terraplén y en (b) el vagón, sirven como cuerpos de referencia en nuestra exposición del movimiento que tiene lugar. Si se trata simplemente de detectar o describir el movimiento involucrado, en principio es irrelevante a qué cuerpo de referencia referimos el movimiento. Como ya se mencionó, esto es evidente, pero no debe confundirse con la declaración mucho más completa llamada "el principio de la relatividad", que hemos tomado como base de nuestras investigaciones.

El principio que hemos utilizado no sólo sostiene que es indiferente elegir al vagón o al terraplén como nuestro cuerpo de referencia para la descripción de cualquier evento. Más bien, nuestro principio afirma lo siguiente: si formulamos las leyes generales de la naturaleza tal como se obtienen de la experiencia, haciendo uso de

- (a) el terraplén como cuerpo de referencia,
- (b) el vagón de ferrocarril como cuerpo de referencia,

Llegamos a la conclusión de que las leyes generales de la naturaleza (por ejemplo, las leyes de la Mecánica o la ley de la propagación de la luz en el vacío) tienen exactamente la misma forma en ambos casos. Esto también se puede expresar de la siguiente manera: para la descripción física de los procesos naturales, ninguno de los cuerpos de referencia  $K$ ,  $K'$  es único en comparación con el otro. A diferencia de la primera, esta última afirmación no tiene por qué ser válida *a priori*; no está

contenido en los conceptos de "movimiento" ni en el de "cuerpo de referencia" ni es derivable de ellos; sólo la experiencia puede decidir sobre su corrección o incorrección.

Hasta el presente, no hemos utilizado la equivalencia de todos los cuerpos de referencia  $K$  en conexión con la formulación de leyes naturales. Nuestro razonamiento siguió las siguientes líneas. En primer término, partimos de la suposición de que existe un cuerpo de referencia  $K$ , cuya condición de movimiento es tal que la ley de Galileo se cumple con respecto a él: una partícula abandonada a sí misma y suficientemente alejada de todas las demás partículas se mueve uniformemente en línea recta. Con referencia a  $K$  (cuerpo de referencia de Galileo), las leyes de la naturaleza deberían ser lo más simples posible. Pero además de  $K$ , todos los cuerpos de referencia  $K'$  deben tener preferencia en este sentido, y deben ser exactamente equivalentes a  $K$  para la formulación de leyes naturales, siempre que se encuentren en un estado de movimiento rectilíneo uniforme y no rotatorio con respecto a  $K$ ; todos estos cuerpos de referencia deben ser considerados como cuerpos de referencia galileanos. El principio de la relatividad se asumió como válido sólo para estos cuerpos de referencia, pero no para otros (por ejemplo, aquellos que poseen un tipo diferente de movimiento). En este sentido hablamos del principio especial de la relatividad, o teoría especial de la relatividad.

En contraste con esto, queremos enunciar una de las características del "principio *general* de la relatividad" mediante la siguiente afirmación: Todos los cuerpos de referencia  $K$ ,  $K'$ , etc., son equivalentes para la descripción de los fenómenos naturales (formulación de las leyes generales de la naturaleza), cualquiera que sea su estado de movimiento. Pero antes de continuar, debemos señalar que esta formulación deberá ser sustituida más adelante por otra más abstracta, por razones que se harán evidentes en una etapa posterior.

Desde que se ha justificado la introducción del principio de la relatividad especial, todo intelecto que se esfuerce por la generalización debe sentir la tentación de aventurar el paso hacia el principio de la relatividad general. Pero una consideración simple y aparentemente bastante confiable parece sugerir que, por el momento, hay pocas esperanzas de éxito en tal intento. Imaginémonos transferidos a nuestro viejo amigo, el vagón de ferrocarril, que viaja a un ritmo uniforme. Mientras se mueve uniformemente, el ocupante del vagón no es sensible a su movimiento, y es por esta razón que puede interpretar sin reticencia los hechos del caso como que le indican que el vagón está en reposo, pero el terraplén está en movimiento. Además, según el principio especial de la relatividad, esta interpretación está bastante justificada también desde el punto de vista físico.

Ahora, si el movimiento del vagón cambia a un movimiento no uniforme, como por ejemplo mediante una fuerte aplicación de los frenos, entonces el ocupante del vagón experimentará una correspondiente y fuerte sacudida hacia adelante. El movimiento retardado se manifiesta en el comportamiento mecánico de los cuerpos que están vinculados al vagón de ferrocarril. El comportamiento mecánico es diferente al del caso considerado anteriormente, por lo que parece imposible que las mismas leyes mecánicas se cumplan con respecto al vagón en reposo o en movimiento uniforme, se cumplan para un movimiento no uniforme. Lo que sí está claro, es que, en un movimiento no

uniforme, la ley de Galileo no se cumple. Esto nos llevaría a otorgar una realidad física al movimiento no uniforme que parecería opuesta al principio general de la relatividad. Pero pronto veremos que esta conclusión no puede sostenerse.

## XIX

### EL CAMPO GRAVITACIONAL

Si tomamos una piedra y luego la soltamos, ¿por qué cae al suelo? La respuesta habitual a esta pregunta es: "Porque es atraída por la Tierra". La Física moderna formula la respuesta de manera bastante diferente por la siguiente razón. Como resultado del estudio más cuidadoso de los fenómenos electromagnéticos, hemos llegado a considerar la acción a distancia como un proceso imposible sin la intervención de algún medio que cumple la función de intermediario. Si, por ejemplo, un imán atrae un trozo de hierro, no podemos contentarnos con considerar que el imán actúa directamente sobre el hierro a través del espacio vacío intermedio, pero nos vemos obligados a imaginar, a la manera de Faraday, que el imán siempre llama a la existencia de algo físicamente real en el espacio que lo rodea, siendo ese algo lo que llamamos un "campo magnético". A su vez, este campo magnético actúa sobre la pieza de hierro, de modo que la pieza de hierro se esfuerza por moverse hacia el imán. No discutiremos aquí la justificación de esta concepción incidental, que en verdad es algo arbitraria. Sólo mencionaremos que con su ayuda los fenómenos electromagnéticos teóricamente pueden representarse mucho más satisfactoriamente que sin ella, y esto se aplica particularmente a la transmisión de ondas electromagnéticas. Los efectos de la gravitación también se consideran de manera análoga.

La acción de la Tierra sobre la piedra se produce de forma indirecta. La tierra produce en su entorno un campo gravitatorio, que actúa sobre la piedra y produce su movimiento de caída. Como sabemos por experiencia, la intensidad de la acción sobre un cuerpo disminuye según una ley bien definida, a medida que nos alejamos más y más de la Tierra. Desde nuestro punto de vista esto significa: La ley que gobierna las propiedades del campo gravitatorio en el espacio debe ser perfectamente definida, para poder representar correctamente la disminución de la acción gravitatoria con la distancia de los cuerpos sobre los que el campo actúa. Es algo así: el cuerpo (por ejemplo, la Tierra) produce directamente un campo en su vecindad inmediata; la intensidad y la dirección del campo en los puntos más alejados del cuerpo están determinadas por la ley que gobierna las propiedades en el espacio de los propios campos gravitatorios.

En contraste con los campos eléctricos y magnéticos, el campo gravitatorio exhibe una propiedad muy notable, que es de fundamental importancia para lo que sigue. Los cuerpos que se mueven bajo la sola influencia de un campo gravitatorio reciben una aceleración que no depende en lo más mínimo

ni del material ni del estado físico del cuerpo. Por ejemplo, un trozo de plomo y un trozo de madera caen exactamente de la misma manera en un campo gravitatorio (en el vacío), cuando parten del reposo o con la misma velocidad inicial. Esta ley, que se cumple con mayor precisión, puede expresarse de una forma diferente a la luz de la siguiente consideración.

De acuerdo con la segunda Ley del movimiento de Newton,<sup>‡</sup> tenemos:

$$(\text{Fuerza}) = (\text{masa inercial}) \times (\text{aceleración})$$

donde la "masa inercial" es una constante característica del cuerpo acelerado. Si ahora la gravitación es la causa de la aceleración, entonces tenemos

$$(\text{Fuerza}) = (\text{masa gravitatoria}) \times (\text{intensidad del campo gravitatorio}),$$

donde la "masa gravitatoria" es también una constante característica del cuerpo. De estas dos relaciones se sigue:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{masa gravitacional}}{\text{masa inercial}} \times \text{Intensidad del campo gravitacional}$$

Si queremos que, para un campo gravitatorio dado, la aceleración sea siempre la misma, independientemente de la naturaleza y del estado del cuerpo, tal como lo demuestra la experiencia, la relación entre la masa gravitatoria y la masa inercial tiene que ser también igual para todos los cuerpos. Mediante una adecuada elección de las unidades se puede lograr que esta relación sea igual a 1. Entonces, será válido el siguiente teorema: la masa *gravitatoria* y la masa *inercial* de un cuerpo son iguales.

---

<sup>‡‡‡</sup> Isaac Newton jamás escribió esto. Redactó el segundo axioma del movimiento como que el cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo, provocado por un impulso, es proporcional a dicho impulso y tiene la misma dirección y sentido y lo detalló en el inicio de sus *Principia*, aplicable no sólo para los movimientos impulsados por una fuerza constante sino por cualquier fuerza que provoque un cambio en la posición de un cuerpo. Además, siendo empirista (*Hipotesis non fingo*) no se hubiese permitido escribirlo ya que, en su época, no había dispositivos capaces de generar una fuerza constante. En 1752, veinticinco años después de la muerte de Newton, Leonhard Euler creyó que había descubierto una cuarta ley de la Mecánica aplicable a cambios en el movimiento efectuados mediante fuerzas constantes sobre masas puntuales, (*Decouverte d'un nouveau principe de Mecanique, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 6, (1752), pp. 185 – 217), (Si la fuerza que actúa sobre una de esas partículas es constante, la expresión matemática del segundo Axioma, dado por Newton,  $Fdt = mdv$  podía escribirse  $F = mdv/dt = F = ma$ ). Durante varios siglos, muchos autores escribieron libros sobre Mecánica sin haber leído los *Principia*, — o, quizás, para dar a los estudiantes un enunciado más sencillo como segundo axioma de la Mecánica — lo que llevó a una creencia generalizada que Newton enunció  $F = ma$  lo que, inclusive, confundió a Einstein. (*N. del T.*)



La Mecánica clásica *registró* este importante principio, pero no *lo interpretó*. Una interpretación satisfactoria no puede surgir sino reconociendo que *la misma* cualidad del cuerpo se manifiesta como “inercia” o como “gravedad”, según las circunstancias.

En los párrafos siguientes veremos hasta qué punto es ese el caso y qué relación guarda esta cuestión con el postulado de la relatividad general.

## **XX. LA IGUALDAD ENTRE MASA INERCIAL Y MASA GRAVITATORIA COMO ARGUMENTO A FAVOR DEL POSTULADO DE LA RELATIVIDAD GENERAL**

Imaginemos amplio volumen de espacio vacío, tan alejado de estrellas y de grandes masas que podamos considerar, con suficiente exactitud, que nos encontramos ante el caso previsto en la ley fundamental de Galileo. Entonces, para esta parte del Universo, es posible elegir un cuerpo de referencia de Galileo con respecto al cual los puntos en reposo permanecen en reposo y los puntos en movimiento persisten, con el transcurso del tiempo, en movimientos rectilíneo y uniforme. Como cuerpo de referencia nos imaginamos un recinto espacioso, como si fuera una gran habitación. Supongamos que en su interior se halla un observador munido de dispositivos de observación y medición. Como es natural, para ese observador no existe la gravedad. Mediante unas cuerdas se sujeta al piso para evitar ser lanzado hacia el cielorraso si efectúa un golpe contra el piso. Supongamos que, en el exterior del recinto, en el centro del techo, hay un gancho con una cuerda, y que un ser — cuya naturaleza nos es indiferente — comienza a tirar de esa cuerda con fuerza constante. El recinto, con el observador en su interior, empezará a volar hacia “arriba” con movimiento uniformemente acelerado. Con el tiempo, su velocidad irá adquiriendo valores fantásticos... siempre que juzguemos ese movimiento desde otro cuerpo de referencia el cual no es tirado hacia “arriba” con una cuerda.

Ahora, el hombre que está en el recinto ¿cómo juzga ese proceso? El piso del recinto le transmite la aceleración haciendo presión contra sus pies, por lo que debe contrarrestar esta presión con ayuda de sus piernas si no quiere quedar “pegado” al piso con su cuerpo. Por lo tanto, estará de pie en el recinto de manera similar a como está una persona en una habitación de cualquier vivienda terrestre. Si sostenía un objeto con la mano y lo suelta que, la aceleración del recinto dejará de actuar sobre ese cuerpo el que se irá acercando al piso con un movimiento relativo acelerado. El observador se convencerá también de que *la aceleración del cuerpo respecto al suelo es siempre de la misma magnitud, independientemente del cuerpo con que realice el experimento*.

Sobre la base de sus conocimientos del campo gravitatorio, tal como los hemos comentado, el hombre llegará a la conclusión de que se encuentra, junto con el recinto, en el seno de un campo gravitatorio bastante constante.

Es muy probable que se sorprenda de que el recinto no caiga en ese campo gravitatorio, pero en algún momento descubrirá el gancho en el centro del techo y la cuerda tensa sujeta a él, por lo que inferirá que el recinto cuelga en reposo en dicho campo.

¿Es lícito reírse del hombre y decir que su concepción es errónea? Considero que, si queremos ser consecuentes, no deberíamos reírnos sino admitir que su explicación no atenta ni contra la razón ni contra las leyes de la Mecánica conocidas. Aun cuando el recinto se encuentre acelerado respecto al “espacio de Galileo” uno podría contemplarlo como inmóvil. Tenemos, pues, buenas razones para extender el principio de relatividad a cuerpos de referencia que estén acelerados unos respecto a otros, lo que constituye un argumento de peso en favor de un postulado generalizado de la relatividad.

Téngase en cuenta que la posibilidad de esta interpretación descansa en la propiedad fundamental que posee el campo gravitatorio de comunicar a todos los cuerpos la misma aceleración, o lo que viene a ser lo mismo, en el postulado de la igualdad entre masa inercial y masa gravitatoria. Si no existiera esta ley de la naturaleza, el hombre en el recinto acelerado no podría interpretar el comportamiento de los cuerpos que lo rodean sobre la base de suponer la existencia de un campo gravitatorio, y ninguna experiencia le autorizaría a suponer que su cuerpo de referencia está “en reposo”.

Imaginemos ahora que el hombre del recinto ata una cuerda en la parte interior del techo y fija un cuerpo en el extremo libre. El cuerpo hará que la cuerda cuelgue “verticalmente” en estado tenso. Preguntémosnos por la causa de la tensión. El hombre en el recinto, probablemente, dirá: “En el campo gravitatorio, el cuerpo suspendido experimenta una fuerza hacia abajo y se mantiene en equilibrio debido a la tensión de la cuerda; lo que determina la magnitud de la tensión es la masa *gravitatoria* del cuerpo suspendido”.

En cambio, un observador que flote libremente en el espacio explicará la situación así: “La cuerda se ve obligada a participar del movimiento acelerado del recinto y lo transmite al cuerpo sujeto a ella. La tensión de la cuerda es justamente suficiente para producir la aceleración del cuerpo. Lo que determina la magnitud de la tensión en la cuerda es la *masa inercial* del cuerpo”. En este ejemplo vemos que la extensión del principio *de* relatividad pone de manifiesto la *necesidad* del postulado de la igualdad entre masa inercial y gravitatoria. Con lo cual hemos conseguido una interpretación física de este postulado.

El ejemplo del recinto acelerado demuestra que una teoría de la relatividad general debe proporcionar resultados importantes en lo que hace a las leyes de la gravitación. Y, en efecto, el desarrollo consecuente de la idea de la relatividad general ha suministrado las leyes que rigen en el campo gravitatorio. Sin embargo, deben evitarse las confusiones a las que pueden inducir estas consideraciones. Para el hombre del recinto existe un campo gravitatorio, pese a no existir tal respecto al sistema de coordenadas inicialmente elegido. Por eso, la existencia de un campo gravitatorio es siempre meramente *aparente*. Podría pensarse que, independientemente del campo gravitatorio existente, siempre se podría elegir otro cuerpo de referencia de tal manera que respecto a él no existiese ningún campo

gravitatorio. Eso no es válido para cualquier campo gravitatorio, sino sólo para aquellos que poseen una estructura muy especial. Por ejemplo, es imposible elegir un cuerpo de referencia respecto al cual el campo gravitatorio de la Tierra se anule (en toda su extensión).

Ahora nos damos cuenta de por qué el argumento esgrimido contra el principio de la relatividad general no es concluyente. Sin duda es cierto que el observador que se halla en el vagón siente un tirón hacia adelante como consecuencia de la frenada súbita y es verdad que en eso el observador nota que el movimiento no es uniforme. Pero nadie lo obliga a atribuir el tirón a una aceleración “real” del vagón. Igual podría interpretar el episodio así: “Mi cuerpo de referencia (el vagón) permanece constantemente en reposo. Sin embargo, (durante el tiempo de frenada) existe respecto a él un campo gravitatorio temporalmente variable, dirigido hacia adelante. Bajo la influencia de este campo, el terraplén, junto con la Tierra, se mueve de manera no uniforme, de un modo que su velocidad inicial, dirigida hacia atrás, disminuye cada vez más. Este campo gravitatorio es también el que produce el tirón del observador”.

## **XXI. ¿EN QUÉ ASPECTOS SON INSATISFACTORIOS LOS FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CLÁSICA Y DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD?**

Como ya hemos dicho en varias ocasiones, la Mecánica clásica parte del siguiente principio: los puntos materiales que se encuentran lo suficientemente alejados de otros puntos materiales se mueven uniformemente y en línea recta o persisten en estado de reposo. También hemos subrayado repetidas veces que este principio fundamental sólo puede ser válido para cuerpos de referencia  $K$  que se encuentran en determinados estados de movimiento y que se hallan en movimiento de traslación uniforme unos respecto a otros. Hay otros cuerpos de referencia  $K'$ , para los cuales el principio no es válido.

Tanto en la Mecánica clásica como en la teoría de la relatividad especial se distingue entre cuerpos de referencia  $K$  respecto a los cuales son válidas las leyes de la naturaleza y cuerpos de referencia  $K'$  respecto a los cuales no lo son.

Ahora bien, ninguna persona que piense con un mínimo de lógica se dará por satisfecha con este estado de cosas, y preguntará: ¿Cómo es posible que s cuerpos de referencia (o bien sus estados de movimiento) sean privilegiados frente a otros (o frente a sus estados de movimiento respectivos)? *¿Cuál es la razón de ese privilegio?* Para mostrar claramente lo que quiero decir, utilizaré una comparación.

Estoy ante un hornillo de gas. Sobre él se encuentran, una al lado de la otra, dos ollas de cocina idénticas, hasta el punto de que podríamos confundirlas. Ambas están llenas de agua hasta la mitad.

Advierto que de una de ellas sale ininterrumpidamente vapor, mientras que de la otra no, lo cual me llamará la atención, aunque jamás haya visto funcionar un hornillo de gas ni calentado una olla de cocina. Lo que sí percibo es que bajo la primera olla hay algo que brilla con luz azulada, pero que no se ve bajo la segunda olla. Aun en el caso que jamás haya visto una llama de gas, mi asombro desaparecerá y razonaré que ese algo azulado es la causa, o al menos la *posible* causa de la producción de vapor. Pero si no percibo bajo ninguna de las dos ollas ese algo azulado y veo que una no cesa de producir vapor mientras que en la otra no se produce vapor, entonces no saldré del asombro y de la insatisfacción hasta que observe algún hecho al que pueda responsabilizar del comportamiento distinto de las dos ollas.

Análogamente, busco en vano en la Mecánica clásica (o en la teoría de la relatividad especial) un algo real al que poder atribuir el dispar comportamiento de los cuerpos respecto a los sistemas  $K$  y  $K'$ . Esta objeción ya la había visto Newton, quien intentó, en vano, neutralizarla. Pero fue E. Mach el que la detectó con mayor claridad, proponiendo como solución colocar la Mecánica sobre fundamentos nuevos. La objeción solamente se puede evitar en una Física que se corresponda con el principio de la relatividad general, debido a que las ecuaciones de una teoría semejante, son aplicables a cualquier cuerpo de referencia, sea cual fuere su estado de movimiento.

## XXII. ALGUNAS INFERENCIAS DEL PRINCIPIO GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Las consideraciones hechas en la sección XX muestran que el principio de la relatividad general nos permite deducir propiedades del campo gravitatorio por una vía puramente teórica. En efecto, supongamos que conocemos la evolución espaciotemporal de un proceso natural cualquiera, tal y como ocurre en el terreno galileano respecto a un cuerpo de referencia de Galileo,  $K$ . En estas condiciones es posible conocer averiguar mediante razonamientos puramente teóricos, o sea, mediante simples cálculos, cómo se comporta este proceso natural conocido respecto a un cuerpo de referencia  $K'$  que está acelerado con relación a  $K$ . Dado que, respecto a este nuevo cuerpo de referencia  $K'$  existe un campo gravitatorio, el cálculo nos informa de cómo influye el campo gravitatorio en el proceso estudiado.

Así descubrimos, por ejemplo, que un cuerpo que respecto a  $K$  ejecuta un movimiento uniforme y rectilíneo (según el principio de Galileo), respecto del cuerpo de referencia acelerado  $K'$  (recinto) ejecuta un movimiento acelerado, cuya trayectoria es, generalmente, curvada. Esta aceleración, o curvatura, se debe a la influencia que ejerce el campo gravitatorio sobre el cuerpo móvil. Que el campo gravitatorio influye de esta manera sobre el movimiento de los cuerpos, en el cuerpo de referencia  $K'$ , es ya conocido, por lo que nuestra reflexión no aporta nada fundamentalmente nuevo.

En cambio, si se hacen consideraciones equivalentes para un rayo luminoso, se obtiene un resultado nuevo y de gran importancia. Mientras que, respecto al cuerpo de referencia de Galileo,  $K$ , el

rayo luminoso se propaga en línea recta y con velocidad  $c$ , respecto al recinto acelerado (cuerpo de referencia  $K'$ ), la trayectoria del mismo rayo luminoso no es una recta, lo que deduce fácilmente. De aquí se infiere que *los rayos de luz en el seno de campos gravitatorios se propagan, generalmente, según líneas curvas*. Este resultado contradice la concepción clásica de que la luz se propaga en línea recta a través de un medio homogéneo. Y debe ser contrastado con la realidad.

Aun cuando un análisis muy preciso permite establecer que, en la teoría de relatividad general, la trayectoria de la luz es curvilínea, esa curvatura es ínfima. En el caso de los campos gravitatorios, esa curvatura es de unos 1,7 de arco para los rayos de luz que pasan muy próximos a la superficie del Sol. Este efecto debería comprobarse en el caso de las estrellas fijas, cuando su luminosidad pasa por las cercanías del Sol, y que son observables durante eclipses solares totales, aparezcan separadas del Sol en esa cantidad, comparada con la posición que ocupan para nosotros en el cielo cuando el Sol se encuentra en otro lugar de la bóveda celeste. La comprobación de la verdad o falsedad de este resultado es de máxima importancia y es de esperar que, muy pronto, los astrónomos nos den su resultado<sup>1</sup>.

La consecuencia anterior demuestra que, según la teoría de la relatividad general, la tantas veces mencionada ley de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío — que constituye uno de los dos supuestos básicos de la teoría de la relatividad especial — no puede aspirar a una validez ilimitada, pues los rayos de luz solamente pueden curvarse si la velocidad de su propagación varía con la posición.

Cabría pensar que esta consecuencia da por tierra a la teoría de la relatividad especial y a toda la teoría de la relatividad en general. Pero en realidad no es así. Tan sólo permite inferir que la teoría de la relatividad especial no puede arrogarse validez en un campo de fuerzas; sus resultados sólo son válidos en la medida en que se pueda prescindir de la influencia de los campos gravitatorios sobre los fenómenos (los luminosos, por ejemplo).

Dado de que los detractores de la teoría de la relatividad han afirmado, a menudo, que la relatividad general refuta a la teoría de la relatividad especial, voy a aclarar el verdadero estado de cosas mediante una comparación.

Antes de quedar establecida la Electrodinámica, las leyes de la Electroestática pasaban por ser las leyes de la Electricidad en general. Hoy sabemos que la Electroestática sólo puede explicar correctamente los campos eléctricos en el caso — que, en rigor, jamás se da — de que las masas eléctricas estén estrictamente en reposo unas respecto a otras y en relación al sistema de coordenadas. ¿Eso significa que las ecuaciones de Maxwell sobre Electrodinámica han hecho inservible a la

---

<sup>111</sup> Mediante las fotografías de las estrellas, dos expediciones equipadas por un Comité Conjunto de la Royal Society y la Royal Astronomical Societies, comprobaron la existencia de la deflexión de la luz predicha por la teoría, durante el eclipse solar del 29 de mayo de 1919. (Cf. Anexo III)

Electrostática? ¡De ningún modo! La Electrostática se contiene en la Electrodinámica como un caso límite; las leyes de esta última conducen directamente a las de aquélla en el supuesto de que los campos sean temporalmente invariables. El destino no más hermoso de una teoría física es el de señalar el camino para establecer otra teoría más amplia, en cuyo seno se mantiene como caso límite.

En el ejemplo sobre la propagación de la luz que acabamos de comentar, hemos visto que el principio de la relatividad general nos permite deducir teóricamente la influencia del campo gravitatorio sobre la evolución de fenómenos cuyas leyes son ya conocidas para el caso de ausencia de campo gravitatorio. Pero el problema más interesante cuya resolución proporciona la teoría de la relatividad general está vinculado a la determinación de las leyes que cumple el propio campo de gravitación. La situación es aquí la siguiente.

Conocemos regiones espacio-temporales que, mediante una elección adecuada del cuerpo de referencia, se comportan (aproximadamente) “al modo galileano”, es decir, regiones del espacio en las cuales no existen campos gravitatorios. Si referimos una región de este tipo a un cuerpo de referencia con movimiento arbitrario  $K'$ , entonces existe respecto a  $K'$  un campo gravitatorio temporal y espacialmente variable<sup>1</sup>. Las características de ese campo dependerán, por supuesto, del movimiento elegido para  $K'$ . De acuerdo con la teoría general de la relatividad, la ley general del campo gravitatorio debe ser satisfecha por todos los campos gravitatorios obtenibles de esa manera.

Aun cuando de esta manera, ni de lejos, se pueden engendrar todos los campos gravitatorios, cabe la esperanza de poder deducir de los campos gravitatorios una ley general de la gravitación. ¡Y ese anhelo se ha visto bellísimamente cumplido!

Pero desde que se tuvo la idea de poder lograrla hasta que se llegó a obtenerla, hubo que superar una seria dificultad, que no puedo ocultársela al lector, ya que está arraigada en la esencia misma del tema.

La cuestión requiere profundizar en los conceptos del *continuum espacio-tiempo*.

### **XXIII. COMPORTAMIENTO DE RELOJES Y VARILLAS DE MEDICIÓN EN UN CUERPO DE REFERENCIA GIRATORIO**

En el caso de la teoría de la relatividad general, hasta ahora, intencionadamente, me abstuve de hablar de la interpretación física de localizaciones espaciales y temporales. Con ello me considero culpable de un cierto desaliño que, según sabemos por la teoría de la relatividad especial, no es en

---

<sup>111</sup> Esto sigue de una generalización de la discusión planteada en la Sección XX.

modo alguno banal ni perdonable. Ya es tiempo de llenar esta laguna; pero advierto de antemano que el tema demanda no poca paciencia y capacidad de abstracción por parte del lector.

Partimos una vez más de algunos casos muy especiales, que antes hemos usado con frecuencia. Consideremos un dominio espacio temporal en el cual no existe campo gravitacional relativo a un cuerpo de referencia  $K$  cuyo estado de movimiento ha sido elegido convenientemente.  $K$  es, entonces un cuerpo de referencia galileano en lo que concierne al dominio considerado y los resultados de la teoría especial de la relatividad están de acuerdo con ella en lo relativo a  $K$ .

Supongamos ahora la misma región espacio temporal pero referida a un segundo cuerpo de referencia  $K'$  que rota uniformemente respecto de  $K$ . A fin de fijar nuestras ideas, vamos a imaginar que  $K'$  tiene la forma de un disco circular plano que rota uniformemente en su propio plano alrededor de su centro.

Un observador sentado en posición excéntrica sobre el disco circular  $K'$  experimenta una fuerza que actúa en dirección radial hacia afuera y que para otro observador que se encuentra en reposo respecto del cuerpo de referencia original  $K$ , podría ser interpretada como un efecto de la inercia (*fuerza centrífuga*). Pero el observador situado en el disco, bien puede considerar a ese disco como un cuerpo de referencia que está en reposo, autorizado sobre la base del principio general de relatividad.

La fuerza que actúa sobre él — y, en general, sobre los cuerpos que se hallan en reposo respecto al disco — este observador la interpreta como la acción de un campo gravitatorio. Según la teoría newtoniana de la gravitación, establecer la distribución espacial de este campo sería imposible.<sup>1</sup> Pero como el observador es partidario de la teoría de la relatividad general, no le preocupa ese detalle; espera, con razón, poder establecer una ley general de la gravitación que explique correctamente no sólo el movimiento de los astros, sino también el campo de fuerzas que él percibe.

Este observador, instalado en el disco circular, experimenta con relojes y varas de medición, con la intención de obtener, a partir de sus observaciones, definiciones exactas para el expresar el significado de los datos temporales y espaciales respecto al disco circular  $K'$ . ¿Qué tendrá que realizar en ese intento? Imaginemos que el observador coloca primero dos relojes de idéntica constitución, uno en el punto medio del disco circular, el otro en la periferia del mismo, de manera que ambos se hallan en reposo respecto al disco. En primer término, nos preguntamos si estos dos relojes marchan o no con la misma rapidez desde el punto de vista del cuerpo de referencia de Galileo  $K$ , que no rota.

Juzgado desde  $K$ , el reloj situado en el centro está en reposo, mientras que el de la periferia, debido a la rotación respecto a  $K$ , está en movimiento. Según un resultado de la Sección XII, este segundo

---

<sup>111</sup> El campo desaparece en el centro del disco y se incrementa proporcionalmente a la distancia del centro a medida que se desplaza hacia afuera.

reloj marchará constantemente más lentamente — respecto a  $K$  — que el reloj situado en el centro del disco circular. Evidentemente, lo mismo debería constatar el hombre situado en el disco, a quien vamos a imaginar sentado en el centro, junto al reloj que hay allí. Así pues, en ese disco circular, — y con más generalidad en cualquier campo gravitatorio, — los relojes marcharán más rápidamente o más lentamente según el lugar que ocupen (estando cada uno de ellos en reposo). Por consiguiente, aun con la ayuda de relojes colocados en reposo respecto al cuerpo de referencia no es posible dar una definición razonable del tiempo.

Análoga dificultad se plantea al intentar aplicar aquí nuestra anterior definición de simultaneidad, tema en el que no vamos a profundizar.

También la definición de las coordenadas espaciales plantea aquí problemas que en principio son insuperables. Porque si el observador que se mueve junto con el disco coloca su escala unidad (una regla pequeña, comparada con el radio del disco) tangencialmente sobre la periferia de éste, su longitud, juzgada desde el sistema de Galileo, será más corta que 1, pues según lo expresado en la Sección XII los cuerpos en movimiento experimentan un acortamiento de su longitud en la dirección del movimiento. Si en cambio coloca la regla en la dirección del radio del disco, no habrá acortamiento respecto a  $K$ . Por lo tanto, si el observador mide primero el perímetro del disco, luego su diámetro y divide estas dos medidas, obtendrá como cociente, no el conocido número, pi, ( $\pi = 3,14\dots$ ) sino un número mayor<sup>1</sup>, mientras que en un disco inmóvil respecto a  $K$  debería resultar exactamente  $\pi$  en esta operación, como es natural. Con ello queda ya probado que los teoremas de la geometría euclídea no pueden cumplirse con exactitud ni sobre el disco rotatorio ni, en general, en un campo gravitacional, al menos si se atribuye a la reglilla unitaria la longitud 1 en cualquier posición y orientación.

También el concepto de línea recta pierde con ello su significado. No estamos, pues, en condiciones de definir exactamente las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respecto al disco, utilizando el método empleado en la teoría de la relatividad especial. Y mientras las coordenadas y los tiempos de los sucesos no estén definidos, tampoco tienen significado exacto las leyes de la naturaleza en las que aparecen esas coordenadas.

Todas las consideraciones que hemos hecho anteriormente sobre la relatividad general parecen quedar así en tela de juicio. En realidad, para aplicar exactamente el postulado de la relatividad general, se debe efectuar un sutil rodeo. Las siguientes consideraciones le servirán al lector para este cometido. Conocemos regiones espacio-temporales que, previa elección adecuada del cuerpo

---

<sup>111</sup> Debido a esta consideración, tenemos que usar el Sistema no rotatorio galileano  $K$  como cuerpo de referencia, ya que sólo podemos suponer la validez de los resultados sobre la teoría especial de la relatividad respecto de  $K$  (respecto de  $K'$ , prevalece un campo gravitacional.)



## XXIV. EL CONTINUO EUCLIDEANO Y EL NO EUCLIDIANO

Delante mío tengo la superficie de una mesa de mármol. Desde cualquier punto de esta mesa puedo llegar hasta cualquier otro punto de ella hasta cualquier otro, pasando del punto de partida a un punto vecino y de este último a otro punto vecino suyo y así, mediante un número grande de pasajes de cada punto a otro vecino puedo llegar al punto final deseado. Dicho de otro modo, puedo pasar de un punto a otro sin dar “saltos”. El lector (siempre que no sea demasiado exigente) percibirá sin duda, en forma correcta, lo que se entiende aquí por “vecino” y “saltos”. Esto lo expresamos diciendo que la superficie es un continuum.

Imaginemos ahora que fabricamos un gran número de varillas de medición cuyo tamaño sea pequeño comparado con las medidas de la mesa, y todas ellas igual de largas. Por esto último se entiende que se pueden enrasar los extremos de cada dos de ellas.

Colocamos ahora cuatro de estas varillas sobre la superficie de la mesa, de modo que sus extremos formen un cuadrilátero cuyas diagonales sean iguales (cuadrado). Para conseguir la igualdad de las diagonales nos servimos de una varilla de prueba.

Pegados a este cuadrado construimos otros iguales que tengan, en común con él, una varilla; junto a estos últimos otros tantos, etc. Finalmente tenemos todo el tablero cubierto de cuadrados, de tal manera que cada lado interior pertenece a dos cuadrados y cada vértice interior, a cuatro.

Que se pueda llevar a cabo esta operación sin tropezar con grandísimas dificultades es un verdadero milagro. Basta con pensar en lo siguiente. Cuando en un vértice convergen tres cuadrados, están ya colocados dos lados del cuarto, lo cual determina totalmente la colocación de los dos lados restantes de éste. Pero ahora ya no puedo retocar el cuadrilátero para igualar sus diagonales. Si las diagonales son iguales. será en virtud de un favor especial de la mesa y de las varillas, ante el cual me tendré que mostrar maravillado y agradecido. Y para que la construcción se logre, tenemos que asistir a muchos milagros parecidos.

Si todas las varillas están correctamente ubicadas, entonces digo que los puntos del tablero forman un continuo euclidiano respecto a la varilla utilizada como segmento. Si destaco uno de los vértices de la malla como “punto de origen”, a cualquier otro vértice lo podré caracterizar, respecto al punto de origen, mediante dos números. Me basta con especificar cuántas varillas hacia “la derecha” y luego, cuántas hacia “arriba” tengo que recorrer a partir del origen para llegar al vértice en cuestión. Estos dos números son entonces “las coordenadas cartesianas” de ese vértice con respecto al “sistema de coordenadas” determinado por las varillas colocadas.

La siguiente modificación del experimento mental demuestra que también hay casos en los que esta tentativa fracasa. Supongamos que las varillas “se dilatan” con un aumento de temperatura y que la temperatura del tablero es mayor que la temperatura de los bordes.

Seguirá siendo posible enrasar dos de las varillas en cualquier lugar de la mesa, pero la construcción de cuadrados quedará ahora irremisiblemente desbaratada, debido a que las varillas de la parte interior de la masa se dilatan, mientras que las de los bordes, no. En lo que afecta a nuestras varillas — definidas como segmentos unitarios — la mesa ya no es un continuo euclidiano, y tampoco estaremos en condiciones de definir, directamente, con su ayuda unas coordenadas cartesianas, debido a que no podemos realizar la construcción anterior. Sin embargo, como existen otros objetos sobre los cuales la temperatura de la mesa no influye de la misma manera que sobre las varillas (o sobre los cuales ni siquiera influyen), es posible, sin forzar las cosas, mantener aun así la idea de que la mesa es un “continuo euclidiano”, y es posible lograrlo de manera satisfactoria mediante una constatación más sutil acerca de la medición o comparación de segmentos.

Ahora bien, si todas las varillas, de cualquier clase o material, mostraran *idéntico* comportamiento termosensible sobre la mesa cuya temperatura no es uniforme, y si no tuviéramos otro medio de percibir la acción de la temperatura que el comportamiento geométrico de las varillas en experimentos análogos al antes descrito, entonces podría ser conveniente adscribir a dos puntos de la mesa la distancia 1 cuando fuese posible enrasar con ellos los extremos de una de nuestras varillas; porque ¿cómo definir si no el segmento, sin caer en la más grosera de las arbitrariedades? En ese caso, se debe abandonar, el método de las coordenadas cartesianas y sustituirlo por otro que no presuponga la validez de la geometría euclidiana<sup>1</sup>. El lector advertirá que la situación aquí descrita se corresponde con aquella que ha traído consigo el postulado de la relatividad general (Sección XXIII).

## XXV. COORDENADAS GAUSSIANAS

---

<sup>111</sup> Este problema se les planteó a los matemáticos de la siguiente manera. Dada una superficie — por ejemplo, la de un elipsoide, en el espacio de medida tridimensional euclidiano, existe sobre ella una geometría bidimensional, exactamente igual que en el plano. Gauss intentó resolver el problema de tratar teóricamente esta geometría bidimensional, sin tomar en cuenta el hecho de que la superficie pertenece a un continuo euclidiano de tres dimensiones. Si imaginamos que *en la superficie* (al igual que sobre la mesa) efectuamos construcciones con varillas rígidas, las leyes que valen para ellas son distintas a las leyes de la geometría euclidiana en el plano. Respecto a las varillas de medición, la superficie no es un continuo euclidiano, así como tampoco se pueden definir coordenadas cartesianas *en la superficie*. Gauss mostró los principios según los cuales se pueden tratar las condiciones geométricas en la superficie, señalando así el camino hacia el tratamiento de Riemann de continuos no euclidianos multidimensionales. De ahí que los matemáticos hayan resuelto desde hace mucho tiempo, los problemas formales que surgen del postulado de la relatividad general.

Según Gauss, este tratamiento geométrico-analítico se puede conseguir de la siguiente manera. Supongamos que sobre el tablero de la mesa está dibujado un sistema de curvas arbitrarias (ver Fig. 3), que llamamos curvas  $u$  y a cada una de las cuales las caracterizamos con un número. En la figura están dibujadas las curvas  $u = 1$ ,  $u = 2$  y  $u = 3$ . Entre las curvas  $u = 1$  y  $u = 2$  imaginemos que están dibujadas infinitas curvas más, correspondientes a todos los números reales que están comprendidos entre 1 y 2.

Tenemos entonces un sistema de curvas  $u$  que recubren la mesa de manera infinitamente densa. Ninguna curva  $u$  corta a ninguna otra, sino que por cada punto de la mesa pasa una curva y sólo una. A cada punto de la superficie de la mesa le corresponde entonces un valor  $u$  perfectamente determinado. Supongamos también que sobre la superficie se ha dibujado un sistema de curvas  $v$  que satisfacen las mismas condiciones que las curvas  $u$ , que están caracterizadas de manera análoga por números y que pueden tener también una forma arbitraria.

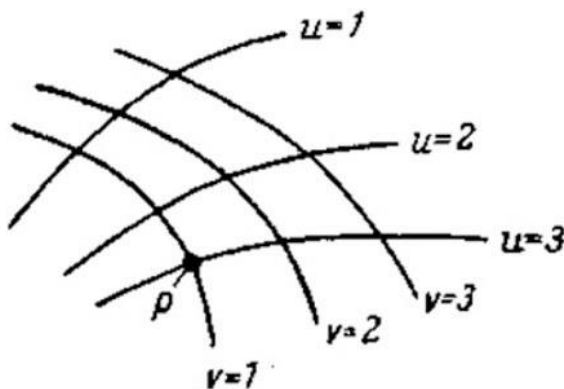


Figura 3

A cada punto de la mesa le corresponde así un valor  $u$  y un valor  $v$ , y a estos dos números los llamamos las coordenadas de la mesa (*coordenadas gaussianas*). Así, por ejemplo, el punto  $P$  de la Figura 3, tiene como coordenadas gaussianas  $u = 3$ ;  $v = 1$ .

A dos puntos vecinos  $P$  y  $P'$  de la superficie les corresponden entonces las coordenadas

$$P : u, v$$

$$P' : u + du, v + dv$$

donde  $du$  y  $dv$  representan números muy pequeños. Sea  $ds$  un número también muy pequeño que representa la distancia entre  $P$  y  $P'$  medida con una reglilla. Según Gauss se cumple entonces:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

donde  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  son cantidades que dependen de manera muy determinada de  $u$  y de  $v$ . Las cantidades  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  determinan el comportamiento de las varillas de medición respecto a las curvas  $u$  y  $v$ , y por tanto también respecto a la superficie de la mesa.

En el caso de que los puntos de la superficie considerada constituyan respecto a las varillas de medición un continuo euclidiano — y sólo en ese caso — será posible dibujar las curvas  $u$  y  $v$  y asignarles números de tal manera que se cumpla, sencillamente

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Las curvas  $u$  y  $v$  son entonces líneas rectas en el sentido de la geometría euclidiana, y perpendiculares entre sí. y las coordenadas gaussianas serán sencillamente coordenadas cartesianas. Como se observa, las coordenadas gaussianas no son más que una asignación de dos números a cada punto de la superficie considerada, de modo que a puntos espacialmente vecinos se les asigna valores numéricos que difieren muy poco entre sí.

En primera instancia. estas consideraciones son válidas para un continuo de dos dimensiones. Pero el método gaussiano también se puede aplicar a un continuo de tres, cuatro o más dimensiones. Por ejemplo, con un continuo de cuatro dimensiones, se obtiene la siguiente representación. A cada punto del continuo se le asignan arbitrariamente cuatro *números*  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  que serán sus “coordenadas”. Los puntos vecinos tendrán valores vecinos de sus coordenadas. Si a dos puntos vecinos  $P$  y  $P'$  se les asigna una distancia  $ds$  físicamente bien definida, susceptible de ser determinada mediante mediciones, entonces se cumple la fórmula:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + \dots + g_{44}dx_4^2$$

donde las cantidades  $g_{11}$ , etc. tienen valores que varían con la posición en el continuo.

Solamente en el caso de que el continuo sea euclidiano será posible asignar las coordenadas  $x_1 \dots x_4$  a los puntos del continuo de tal manera que se cumpla simplemente

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Entonces, las relaciones que se cumplen en el continuo cuatridimensional son análogas a las que rigen en nuestras mediciones tridimensionales.

Debemos señalar que la representación gaussiana para  $ds^2$  que acabamos de dar no siempre es posible; sólo lo es cuando existan regiones suficientemente pequeñas del continuum que permitan considerarlo como continuum euclidiano. Obviamente. esto se cumple en el caso de la mesa y de la temperatura localmente variable que hemos comentado cuando, por ejemplo, en una porción pequeña de la mesa la temperatura es prácticamente constante y el comportamiento geométrico de las varillas es *casi* el que exigen las reglas de la geometría euclidiana. Así pues, las diferencias en la construcción

de cuadrados de la Sección anterior no se ponen claramente de manifiesto en tanto la operación no se extienda a una parte importante de la mesa.

Resumiendo, podemos decir: Gauss inventó un método para el tratamiento de cualquier continuum en el que estén definidas relaciones de medidas (“distancia” entre puntos vecinos). A cada punto del continuum se le asignan tantos números (coordenadas gaussianas) como dimensiones tenga el continuum. La asignación se realiza de tal modo que se conserve la univocidad y de manera que a puntos vecinos les correspondan números (coordenadas gaussianas) que difieran infinitamente poco entre sí. El sistema de coordenadas gaussianas es una generalización lógica del sistema de coordenadas cartesianas. También es aplicable a continuums no euclidianos, pero solamente cuanto menor sea una pequeña porción del continuum considerado, tanto más se acerque al comportamiento euclidiano respecto a la medida definida (“distancia”).

## XXVI. EL CONTINUO ESPACIO-TEMPORAL DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD COMO CONTINUO EUCLIDIANO

Ahora estamos en condiciones de formular con algo más de precisión las ideas de Minkowski que esbozamos vagamente en la Sección XVII. Según la teoría de la relatividad especial, en la descripción del continuum espacio-temporal cuatridimensional gozan de privilegio ciertos sistemas de coordenadas que hemos llamado “sistemas de coordenadas de Galileo”. Para ellos, las cuatro coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  que determinan un suceso — o, expresado de otro modo, un punto del continuum cuatridimensional — quedan definidas físicamente de manera muy simple, tal como se explicó en la primera parte de este libro. Para el pasaje de un sistema de Galileo a otro que se mueva uniformemente respecto al primero son válidas las ecuaciones de la transformación de Lorentz, que constituyen la base para derivar las consecuencias de la teoría de la relatividad especial y que, además, no son más que la expresión de la validez universal de la ley de propagación de la luz para todos los sistemas de referencia de Galileo.

Minkowski descubrió que las transformaciones de Lorentz satisfacen las sencillas condiciones siguientes. Supongamos dos sucesos espacialmente muy próximos, cuya posición mutua en el continuum cuatridimensional venga dada por las diferencias de coordenadas espaciales  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  y la diferencia temporal  $dt$  respecto a un cuerpo de referencia de Galileo  $K$ . Respecto a un segundo sistema de Galileo, sean  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$ ,  $dt'$  las correspondientes diferencias para ambos sucesos. Entonces, entre ellas se cumple siempre la condición<sup>1</sup>:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2,$$

---

<sup>111</sup> Cf. Anexos I y II. Las relaciones que se derivan para las coordenadas mismas, son válidas también para las *diferencias de coordenadas*, (Siempre que sean diferencias indefinidamente pequeñas).

De esta condición surge la validez de la transformación de Lorentz. La podemos expresar así: La magnitud

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

que pertenece a dos puntos adyacentes del continuum espacio-tiempo tetradimensional, tiene el mismo valor para todos los cuerpos de referencia Galileanos que se seleccionen. Si reemplazamos  $x, y, z, \sqrt{-1} ct$  por  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , también obtenemos el resultado

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

que es independiente de la elección del cuerpo de referencia. Llamamos a la magnitud  $ds$ , la distancia que separa dos eventos o puntos tetradimensionales.

Así, si elegimos como variable tiempo a la variable imaginaria  $\sqrt{-1} ct$  en vez de la cantidad real  $t$ , podemos considerar al continuum espacio-tiempo — de acuerdo con la teoría especial de la relatividad - como un continuum euclidiano tetradimensional, un resultado que deriva de las consideraciones de la Sección precedente.

## **XXVII. EL CONTINUO ESPACIO-TIEMPO DE LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD NO ES UN CONTINUO EUCLIDIANO**

En la primera parte de este libro nos hemos podido servir de coordenadas espacio-temporales que permitían una interpretación física directa y simple y que, según la Sección XXVI, podían interpretarse como coordenadas cartesianas cuatridimensionales.

Esto fue posible en virtud de la ley de la constancia de la velocidad de la luz, ley que, sin embargo, según la Sección XXI, la teoría de la relatividad general no puede mantener; sino que, por el contrario, nos lleva al resultado de que, cuando existe un campo gravitatorio, la velocidad de la luz depende siempre de las coordenadas.

En la Sección XXIII constatamos, además, en un ejemplo especial, que la existencia de un campo gravitatorio hace imposible esa definición de las coordenadas y del tiempo que nos condujo a la meta en la teoría de la relatividad especial.

Teniendo en cuenta estos resultados, llegamos al convencimiento de que, según el principio de la relatividad general, no cabe interpretar el continuo espacio-temporal como un continuo euclidiano, sino que nos hallamos aquí ante el caso que mencionamos para el continuo bidimensional de la mesa

cuya temperatura varía con la ubicación. Así como era imposible construir allí un sistema de coordenadas cartesianas con varillas de medición del mismo tamaño, ahora es también imposible construir, con ayuda de cuerpos rígidos y relojes, un sistema (cuerpo de referencia) de manera que escalas y relojes que sean fijos unos respecto a otros indiquen directamente la posición y el tiempo. Esta es en esencia la dificultad con que hemos tropezado en la Sección XXIII.

Pero, las consideraciones de la Sección XXV y la Sección XXVI indican el camino que se debe seguir para superar esa dificultad. De manera arbitraria, referimos el continuo espacio-temporal cuatridimensional a coordenadas gaussianas. A cada punto (suceso) del continuo le asignamos cuatro números  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (coordenadas) que no tienen ningún significado físico inmediato, sino que sólo sirven para enumerar los puntos de una manera determinada, aunque arbitraria. Esta correspondencia no necesariamente debe ser tal que lleve a interpretar que  $x_1, x_2, y x_3$  son las “coordenadas espaciales” y que  $x_4$  es la “coordenada temporal”.

El lector quizá piense que semejante descripción del mundo es completamente insatisfactoria. ¿Qué significa asignar a un suceso ciertas coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$  que, en sí, no significan nada? Un análisis más profundo demuestra, que la preocupación es infundada. Consideremos, por ejemplo, un punto material en movimiento arbitrario. Si este punto sólo tuviera una existencia instantánea, sin duración, entonces vendría dado espacio-temporalmente por un sistema de valores único  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . En cambio, su existencia permanente estará caracterizada por un número infinitamente grande de sistemas de valores de ese tipo, en donde las coordenadas se encadenan ininterrumpidamente; por lo tanto, al punto material le corresponde una línea (unidimensional) en el continuo cuatridimensional. Y a una multitud de puntos móviles les corresponden otras tantas líneas en ese continuo. De todos los enunciados referidos a esos puntos, los únicos que pueden aspirar a tener realidad física son aquellos que indican encuentros de esos puntos. En el marco de nuestra representación matemática, un encuentro de este tipo se traduce en el hecho de que las dos líneas que representan los correspondientes movimientos de los puntos tienen en común un determinado sistema de valores de las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Sin duda, tras un análisis minucioso, el lector admitirá que semejantes encuentros son, en realidad, las únicas constataciones reales de carácter espacio-temporal que encontramos en las proposiciones físicas.

Cuando describíamos el movimiento de un punto material respecto a un cuerpo de referencia, no especificábamos otra cosa que los encuentros de este punto con determinados puntos del cuerpo de referencia. Incluso las correspondientes especificaciones temporales se reducen a constatar encuentros del cuerpo con relojes, junto con la constatación del encuentro de las agujas del reloj con determinados puntos de la esfera en la que se mueven. El análisis nos lleva a constatar que lo mismo ocurre con las mediciones espaciales utilizando escalas.

En general, se cumple que: toda descripción física se reduce a un conjunto de proposiciones, cada una de las cuales se refiere a la coincidencia espacio-temporal entre dos sucesos  $A$  y  $B$ . Cada una de estas proposiciones se expresa en coordenadas gaussianas mediante la coincidencia de las cuatro

coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Por lo tanto, es cierto que la descripción del continuo espacio-temporal a través de coordenadas gaussianas sustituye totalmente a la descripción que utiliza un cuerpo de referencia, sin adolecer de los defectos de este último método, debido a que no está ligado al carácter euclidiano del continuo a representar.

## **XXVIII. FORMULACIÓN EXACTA DEL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD GENERAL.**

Ahora estamos en condiciones de sustituir la enunciación provisional del principio de la relatividad general que dimos en la Sección XVIII por otra que es más exacta. La que hemos dado anteriormente: — “Todos los cuerpos de referencia  $K, K'$ , etc., son equivalentes para la descripción de la naturaleza (formulación de las leyes generales de la naturaleza), sea cual fuere su estado de movimiento” — no se puede mantener debido a que el uso de cuerpos rígidos de referencia en el sentido del método seguido en la teoría especial de la relatividad, en general, no es posible para la descripción espacial-temporal en la teoría general de la relatividad. Es por eso que, en vez del cuerpo de referencia se emplea el sistema de coordenadas de Gauss. El siguiente enunciado suministra la idea fundamental del principio general de la relatividad: “*Todos los sistemas de coordenadas gaussianas son esencialmente equivalentes para la formulación de las leyes generales de la naturaleza*”.

Todavía podemos enunciar el principio de la relatividad general de otra forma, que permite reconocerlo con mayor claridad que cuando se lo expresa en la forma de una natural extensión del principio de la relatividad especial.

De acuerdo con la teoría especial de la relatividad, las ecuaciones que expresan las leyes generales de la naturaleza se transforman en ecuaciones de la misma forma cuando, haciendo uso de la transformación de Lorentz, reemplazamos las variables espacio-temporales  $x, y, z, t$ , de un cuerpo de referencia (Galileano)  $K$  por variables espacio-temporales  $x', y', z', t'$ , de un nuevo cuerpo de referencia  $K'$ . Por otro lado, de acuerdo con la teoría general de la relatividad, por la aplicación de *sustituciones arbitrarias* de las variables de Gauss,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  las ecuaciones deben convertirse en ecuaciones de la misma forma para toda transformación (no sólo para la transformación de Lorentz) produciéndose la transición de un sistema de coordenadas gaussianas a otro.



Si no se desea renunciar a la tradicional representación tridimensional, podemos caracterizar a la idea fundamental de la teoría de la relatividad general de la siguiente manera: La teoría especial de la relatividad se refiere a dominios galileanos, es decir, a sistemas en los que no existen campos gravitatorios. Por ello, un cuerpo de referencia Galileano, sirve como cuerpo de referencia, por ejemplo, un cuerpo rígido cuyo estado de movimiento se elige de tal manera que cumpla con la ley de Galileo sobre el movimiento rectilíneo y uniforme de puntos materiales “aislados”.

Ciertas consideraciones sugieren que deberíamos referir los mismos dominios Galileanos también a cuerpos de referencia *no Galileanos*. Un campo gravitacional de una clase especial suele presentarse respecto de esos cuerpos (Cf. Secciones XX y XXIII)

Si deseamos adherir a nuestra anticuada visión tridimensional de las cosas, entonces podemos caracterizar el desarrollo que está experimentando un sistema mediante la idea fundamental de la teoría general de la relatividad como sigue: La teoría especial de la relatividad hace referencia a dominios Galileanos, es decir, a aquellos en los que no existen campos gravitatorios. En conexión con esto, un cuerpo de referencia Galileano, sirve como cuerpo de referencia, o sea, un cuerpo rígido cuyo estado de movimiento se elige de modo tal que la ley Galileana del movimiento rectilíneo y uniforme de puntos materiales “aislados” se cumple relativa a él.

Ciertas consideraciones sugieren que deberíamos referir los mismos dominios Galileanos, también a cuerpos de referencia *no galileanos*. Entonces, un campo gravitatorio de una clase especial, estará presente respecto de esos cuerpos (Cf. Secciones XX y XXIII)

Pero, en los campos gravitatorios no existen cuerpos rígidos con propiedades euclidianas; de modo que, en la teoría de la relatividad general, la ficción del cuerpo de referencia rígido fracasa. Y los campos gravitatorios también influyen en la marcha de los relojes, hasta el punto de que una definición física del tiempo con la ayuda directa de relojes no tiene ni siquiera el grado de evidencia que tiene en la teoría de la relatividad especial.

Por esa razón se utilizan cuerpos de referencia no rígidos que, vistos como un todo, no sólo tienen un movimiento arbitrario, sino que durante su movimiento sufren alteraciones arbitrarias en su forma. Para la definición del tiempo sirven relojes cuya marcha obedezca a una ley arbitraria y todo lo irregular que se quiera; cada uno de estos relojes hay que imaginárselo fijo en un punto del cuerpo de referencia no rígido, y cumplen una sola condición: la de que los datos simultáneamente perceptibles en relojes espacialmente vecinos difieran infinitamente poco entre sí. Este cuerpo de referencia no rígido, que no sin razón debería ser llamado “molusco de referencia”, equivale esencialmente a un sistema de coordenadas gaussianas, tetradimensional y arbitrario. Lo que le da al “molusco” una cierta ventaja respecto del sistema de coordenadas gaussianas es la conservación formal (en realidad no justificada) de la peculiar existencia de las coordenadas espaciales frente a la coordenada temporal. Todo punto del molusco es tratado como un punto espacial; todo punto material que esté en reposo

respecto a él será tratado como en reposo, en tanto el “molusco” sea tratado como un cuerpo de referencia.

El principio general de la relatividad requiere que todos esos moluscos puedan ser usados como cuerpos de referencia con iguales capacidades e igual éxito en la formulación de las leyes generales de la naturaleza; las propias leyes deben ser completamente independientes de la elección del molusco.

El gran poder que posee el principio general de la relatividad radica en la comprensiva limitación que es impuesta a las leyes de la naturaleza como consecuencias de lo que hemos mencionado más arriba.

## **XXIX. LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LA GRAVITACIÓN SOBRE LA BASE DEL PRINCIPIO GENERAL DE LA RELATIVIDAD.**

Si el lector ha seguido todas nuestras consideraciones previas, no tendrá mayores dificultades en entender los métodos que llevan a la solución del problema de la gravitación.

Hemos partido de la consideración de un dominio Galileano, es decir, de un dominio en el cual no hay campos gravitatorios relativos al cuerpo de referencia Galileano  $K$ . El comportamiento de las varillas de medición y de los relojes, respecto de  $K$ , es conocido desde la teoría especial de la relatividad, similar al comportamiento de puntos materiales “aislados”, estos últimos que se mueven uniformemente y en líneas

Nos referiremos ahora a este dominio como si fuera un sistema de coordenadas gaussianas al azar o a un “molusco” como cuerpo de referencia  $K'$ . Entonces, respecto a  $K'$  hay un campo gravitatorio  $G$  (de una clase particular). Hemos estudiado el comportamiento de varillas de medición y relojes y también de puntos materiales que se mueven libremente con referencia a  $K'$ , simplemente, por transformaciones matemáticas. Interpretamos este comportamiento como el comportamiento de varillas de medición, relojes y puntos materiales bajo la influencia del campo gravitatorio  $G$ . Por consiguiente, introduciremos una hipótesis: que la influencia del campo gravitatorio sobre las varillas de medición, relojes y puntos materiales en movimiento libre continúa teniendo lugar de acuerdo con las mismas leyes, aun en el caso en que el campo gravitatorio predominante *no es* deducible del caso especial Galileano, simplemente mediante una transformación de coordenadas.

El paso siguiente es investigar el comportamiento espacio-temporal del campo gravitatorio  $G$ , que ha sido derivado del caso especial Galileano simple, mediante una transformación de las coordenadas. Este comportamiento se ha formulado como una ley, que es siempre válida, sin importar cómo se ha elegido el cuerpo de referencia (molusco) para su descripción.

Esta ley *no es* todavía la *ley general del campo gravitatorio*, dado que el campo gravitatorio en consideración es de una clase especial, A fin de encontrar la *ley general del campo gravitatorio* todavía se requiere obtener una generalización de la ley que encontramos antes. Esto puede ser obtenido sin caprichos tomando en consideración las siguientes demandas:

- (a) La generalización requerida debe satisfacer el postulado general de la relatividad.
- (b) Si hay materia en el dominio bajo consideración, sólo su masa inercial y, de acuerdo con la Sección XV, sólo su energía es de importancia para su efecto en la excitación de un campo.
- (c) El campo gravitatorio, conjuntamente con la materia, deben satisfacer la ley de conservación de la energía (y del impulso)

Finalmente, el principio general de la relatividad nos permite determinar la influencia del campo gravitatorio en el curso de todos los procesos que tienen lugar de acuerdo con leyes conocidas cuando un campo gravitatorio está ausente, es decir, cuando ya ha sido ajustado al marco de la teoría especial de la relatividad. En conexión con esto, procedemos, en principio, de acuerdo con el método que ya ha sido explicado para varillas de medición, relojes y puntos materiales en movimiento libre.

La teoría de la gravitación, derivada de esta manera a partir del postulado general de la relatividad, no sólo supera por su belleza, ni por remover los defectos asociados a la mecánica clásica, que han sido expuestos en la Sección XXI, ni en interpretar la ley empírica de la igualdad de las masas inercial y gravitatoria, sino que ha sido explicada en Astronomía, como resultado de la observación, contra de la cual, la mecánica clásica carece de capacidad.

Si restringimos la aplicación de la teoría a los casos en los que los campos gravitatorios pueden ser considerados como débiles y en los cuales las masas se mueven respecto del sistema de coordenadas con velocidades que son bajas comparadas con la velocidad de la luz, entonces obtenemos, como primera aproximación, la teoría de Newton. Notemos que esta teoría no requiere establecer ninguna hipótesis especial, mientras que Newton tuvo que introducir la hipótesis de que la fuerza de atracción entre dos puntos materiales es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separan. Si se requieren cálculos más precisos, se observan desviaciones respecto de lo que establece la teoría de Newton, aunque casi todas son demasiado pequeñas para ser observadas. Una de estas desviaciones merece ser examinada con especial detenimiento. Según la teoría newtoniana, los planetas se mueven alrededor del Sol, según trayectorias elípticas que conservarían eternamente su posición respecto de las “estrellas fijas” si fuera posible prescindir de la influencia de los demás planetas sobre el planeta considerado, así como del movimiento propio de las llamadas “estrellas fijas”. Despreciando estas dos influencias, si la teoría de Newton fuese exactamente correcta, la órbita de un planeta debería ser una elipse, inmutable, respecto de las “estrellas fijas”. Esta consecuencia se ha confirmado con gran precisión, (hasta el límite de exactitud que permiten los métodos de observación actuales), en el caso de las órbitas de todos los planetas del sistema solar, exceptuando una, la órbita de Mercurio, el planeta más próximo al Sol.

Desde la época de Leverrier, se conoce que la elipse correspondiente a la órbita de Mercurio, después de las correcciones debidas a las influencias mencionadas antes, no es estacionaria respecto a las estrellas fijas, sino que rota en el plano de la órbita con una velocidad extremadamente lenta y en el sentido del movimiento orbital. El valor obtenido para este movimiento rotatorio del orbital elíptico fue de 43 segundos de arco por cada siglo, una cantidad considerada correcta dentro de los márgenes de errores experimentales. Este efecto sólo puede ser explicado por la Mecánica clásica sólo asumiendo hipótesis muy poco probables y que fueron enunciadas solamente para este propósito.

Según la teoría de la relatividad general resulta que toda trayectoria planetaria elíptica alrededor del Sol debe necesariamente rotar en el sentido indicado anteriormente, esta rotación se cumple en la trayectoria elíptica de todos los planetas, pero es tan pequeña que sólo en el caso de Mercurio es detectable empíricamente con los métodos de observación disponibles y predice que el valor debe ser de 43 segundos de arco por siglo, un valor que está plenamente de acuerdo con la observación.

Además de esto, hasta ahora sólo se han podido deducir de la teoría, dos consecuencias que admiten ser contrastadas mediante la observación. Una es la curvatura de los rayos de luz por el campo gravitatorio del Sol<sup>1</sup> y la otra es el desplazamiento de las líneas espectrales de la luz que nos llegan desde grandes estrellas, comparado con las líneas correspondientes cuando la luz se produce de manera análoga sobre la Tierra (es decir, cuando es producida por la misma clase de moléculas). No tengo la menor duda que estas deducciones de la teoría serán confirmadas próximamente.

---

<sup>1</sup> Observada por Eddington y otros en 1919. (Cf. Anexo III).

### PARTE III

#### CONSIDERACIONES SOBRE EL UNIVERSO COMO UN CONJUNTO

#### XXX.- DIFICULTADES COSMOLÓGICAS DE LA TEORÍA DE NEWTON.

Además de la dificultad discutida en la Sección XXI, hay una segunda dificultad fundamental, referida a la Mecánica clásica celestial, la cual, — según mi conocimiento, — por primera vez, fue discutida en detalle por el astrónomo Seeliger. Si reflexionamos sobre la cuestión de cómo es el Universo considerado como un todo, la primera respuesta que, seguramente, nos surge es: En lo que respecta al espacio (y al tiempo) el Universo es infinito, Su bien hay estrellas en todas partes, de modo que la densidad de la materia es muy variable en detalle, sin embargo, por término medio en su conjunto es la misma. En otras palabras, por más lejos que uno viaje por el Universo, en todas partes encontrará un conglomerado de estrellas fijas de, aproximadamente, la misma especie e igual densidad.

Esta concepción está en contradicción con la teoría de Newton. Esta última requiere que el Universo tenga un cierto centro en el cual la densidad de las estrellas sea un máximo y, a medida que aumenten las distancias respecto de ese centro, las densidades de los grupos de estrellas disminuirían, hasta que, finalmente, a distancias muy grandes, debería existir una región infinita de vacío. El Universo estelar, sería así una isla finita en un océano infinito de espacio.<sup>1</sup>

Esta concepción es, en sí misma, muy insatisfactoria. Pero aún es más insatisfactoria debido a que lleva al resultado que la luz emitida por las estrellas y también algunas estrellas individuales del sistema estelar finito pasarían continuamente al espacio infinito sin regresar nunca y sin entrar en interacción con otros objetos de la Naturaleza. Tal sistema material finito estaría destinado a empobrecerse, gradualmente pero sistemáticamente.

---

<sup>111</sup> *Prueba:* De acuerdo con la teoría de Newton, el número de “líneas de fuerza” que vienen desde el infinito y terminan en una masa  $m$  es proporcional a la masa  $m$ . Si, en promedio a través del Universo, la densidad de masa,  $\rho_0$ , es constante, entonces, una esfera de volumen  $V$  va a encerrar a una masa promedio  $\rho_0 V$ . De modo que el número de líneas de fuerza que pasan a través de la superficie  $F$  de la esfera hacia su interior, es proporcional a  $\rho_0 V$ . El número de líneas de fuerza que entran a la esfera por unidad de área de superficie será, entonces, proporcional a  $\rho_0 V/F$  o, en función del radio  $R$  de la esfera,  $\rho_0 R$ . Por lo tanto, la intensidad del campo en la superficie de la esfera, a medida que el radio aumenta, crecería continuamente tendiendo a infinito con el radio tendiendo a infinito, lo que es imposible.

Para poder salir de ese dilema, Seeliger sugirió una modificación a la ley de Newton, en la cual él supuso que, para grandes distancias, la fuerza de atracción entre dos masas, disminuye más rápidamente que la que resultaría de la ley del cuadrado inverso. Mediante esta modificación, sería posible que la densidad media de la materia fuese constante en todas partes, aún en el infinito, sin que se produzcan campos gravitatorios infinitamente grandes. Así nos liberaríamos de la desagradable concepción de que el Universo material debe poseer algo de la naturaleza en el centro. Por supuesto, nosotros adquirimos nuestra emancipación de las dificultades fundamentales mencionadas, al costo de una modificación y complicación de la ley de Newton. Por supuesto, esa modificación de la ley de Newton carece de fundamentos teóricos o empíricos. Podemos imaginar innumerables leyes que podrían servir para el mismo propósito, sin que seamos capaces de dar una razón por qué una de ellas debe preferirse a las otras, ya que cada una de esas leyes estaría fundamentada sobre principios teóricos un poco más generales que la ley de Newton.

### XXXI. LA POSIBILIDAD DE UN UNIVERSO “FINITO” Y SIN EMBARGO “ILIMITADO”

Con el desarrollo de la teoría de la relatividad, las especulaciones sobre la estructura del Universo también se movieron en otras direcciones. El desarrollo de una geometría no-euclidiana condujo al reconocimiento del hecho de que podemos dudar de la *infinitud* de nuestro espacio sin entrar en conflicto con las leyes establecidas, con el pensamiento o con la experiencia (Riemann, Helmholtz). Esas cuestiones fueron ya tratadas en detalle — y con insuperable lucidez, — por Helmholtz y Poincaré, mientras que yo sólo puedo tratar aquí esos temas de manera muy breve.

En primer término, imaginemos la existencia de un espacio bidimensional. Imaginemos seres planos con sus herramientas planas y, en particular, con sus varillas rígidas de medición planas, que tienen total libertad para moverse en un *plano*. Para esos seres, nada existe fuera de ese plano: lo que observan que les ocurre, tanto a ellos, como a sus “cosas” planas es toda la realidad de su plano. En particular, la construcción de una geometría euclidiana plana, puede llevarse a cabo mediante las varillas, por ejemplo, la construcción reticular sobre una mesa, considerara en la Sección XXIV. En contraste con nuestro Universo, el Universo de esos seres es bidimensional, pero, al igual que el nuestro, se extiende hasta el infinito. En ese Universo, hay lugar para un número infinito de cuadrados idénticos hechos con varillas, es decir, su volumen (superficie) es infinito. Si esos seres dicen que su

Universo es “plano”, el enunciado tiene sentido, porque ellos quieren decir que pueden realizar la construcción de una geometría euclidiana plana con sus varillas y esas varillas representan siempre la misma distancia, independientemente de sus posiciones.

Consideremos ahora una segunda existencia bidimensional, pero, en este caso, una superficie esférica en vez de una superficie plana. Los seres planos, con sus varillas de medición y sus demás objetos se adecuan exactamente sobre esta superficie y están impedidos de abandonarla. Todo su Universo de observación se extiende exclusivamente sobre la superficie de la esfera. ¿Podrán, estos seres decir que la geometría de su Universo es una geometría plana y, además, que sus varillas de medición permiten conocer la realidad de la “distancia”? Ellos no podrán ya que, en su intento de realizar una línea recta, ellos obtendrán una curva, la que nosotros “seres tridimensionales” designaríamos como un gran círculo, es decir, una línea de longitud definida y finita, cuya longitud puede ser medida mediante varillas de medición. Similarmente ese Universo tendrá un área definida que podría ser comparada con el área de un cuadrado construido con varillas. Lo muy interesante resultante de esta consideración yace en el reconocimiento del hecho de que *el Universo de esos seres es finito pero que no tiene límites.*

Pero los seres de la superficie esférica, no necesitan hacer una excursión por el mundo para percibir que ellos no viven en un Universo Euclidiano. Ellos pueden convencerse de ello en cualquier parte de su “mundo”, siempre que no usen una porción demasiado pequeña de él. Partiendo de un punto dado, ellos pueden trazar “líneas rectas” (arcos de círculos si los juzgamos en un espacio tridimensional) de igual longitud, en todas las direcciones. Trazando una línea que une los extremos libres de dos de esas líneas, obtendrán lo que ellos llaman un “círculo”. Para una superficie plana, la razón entre la circunferencia y el diámetro del círculo delimitado por la circunferencia, ambas longitudes medidas con las mismas varillas de medición, es, de acuerdo con la Geometría euclidiana del plano, igual a un valor constante  $\pi$  que es independiente del diámetro del círculo. Pero sobre una superficie esférica, nuestros seres planos encontrarán para esa razón el valor

$$\pi = \frac{\sin\left(\frac{r}{R}\right)}{\frac{r}{R}}$$

es decir, un valor menor de  $\pi$ . La diferencia será más considerable cuanto mayor sea el radio del círculo en comparación con el radio  $R$  del “mundo esférico”. Por medio de esta relación, los seres esféricos pueden determinar el radio de su Universo (“mundo”) aun cuando sólo una parte relativamente pequeña de su mundo esférico está disponible para sus mediciones. Pero si esta parte fuera muy pequeña, ellos no podrían demostrar que se encuentran sobre un “mundo” esférico y no sobre un plano euclidiano porque una parte muy pequeña de una superficie esférica difiere sólo levemente de una pieza del mismo tamaño de un plano.

Así, si los seres de una superficie esférica viviesen en un planeta de un sistema solar que ocupa una parte ínfima del universo esférico, no tendrían manera de determinar si viven en un Universo finito o infinito, porque la “porción del Universo” a la cual ellos tienen acceso es, en ambos casos, prácticamente plana o euclidiana. De estas consideraciones se sigue, directamente, que, para los seres esféricos, la circunferencia de un círculo puede crecer primero con el radio hasta alcanzar la “circunferencia del Universo” y que, para sucesivos incrementos del radio, las circunferencias decrecen gradualmente hasta llegar a cero<sup>§</sup>. Durante este proceso, el área del círculo continúa aumentando más y más hasta que, finalmente, se vuelve igual al área total de todo el “mundo esférico”

Quizás el lector se sorprenda por el hecho de que hemos colocado a nuestros “seres” sobre una superficie esférica en vez de alguna otra superficie cerrada. Pero esta elección tiene su justificación en el hecho que, de todas las superficies cerradas, la esfera es la única que posee la propiedad de que todos sus puntos son equivalentes. Admito que la relación entre la circunferencia  $c$  de un círculo y su radio  $r$ , depende de  $r$ , pero para un dado valor de  $r$  es el mismo para todos los puntos del “mundo esférico”; en otras palabras, el “mundo esférico es una “superficie de curvatura constante”

Para este Universo esférico bidimensional, hay una analogía tridimensional, a saber, el espacio esférico tridimensional que fue descubierto por Riemann. Sus puntos son también todos equivalentes. Posee un volumen finito que está determinado por su “radio” ( $2\pi^2R^3$ ).

¿Es posible imaginar un espacio esférico? Imaginar un espacio significa, nada más, que imaginar ejemplos reales de nuestra experiencia “espacial”, es decir, la experiencia que nosotros podamos tener, por ejemplo, sobre el movimiento de cuerpos “rígidos”. En ese sentido, *podemos* imaginar un espacio esférico.

Supongamos que, desde un punto de una superficie esférica, trazamos líneas o tensamos cuerdas en todas las direcciones y, con una varilla de medición, marcamos para cada una de ellas su distancia  $r$ . Todos los puntos libres de esas líneas yacen sobre esa superficie esférica. Especialmente, podemos medir el área ( $F$ ) de esa superficie mediante un cuadrado hecho con varillas de medición. Si el Universo es euclidiano entonces  $F = \pi r^2$ . Si la superficie es esférica, entonces  $F$  es siempre menor que  $\pi r^2$ . \* A medida que se incrementan los valores de  $r$ ,  $F$  crece a medida que aumenta  $r$  desde cero a un

---

<sup>§</sup> „Die Anschauung zeigt unmittelbar, daß Für unsere Kugelgeschöpfe der Kreisumfang mit dem Radius zunächst bis zum „Weltumfang“ wächst, um dann bei noch weiter wachsendem Radius allmählich wieder bis zu null abzunehmen“, en el original. *N. del T.*

\* „Die Fläche dieser ( $F$ ) können wir mit einem Maßstabquadrat besonders ausmessen. Ist die Welt euklidisch, so ist  $F = \pi r^2$ ; ist die Welt sphärisch, so ist  $F$  stets kleiner als  $\pi r^2$ “, en el original. Suponemos un error de imprenta ya que la fórmula corresponde al área de superficie de un círculo y no de una esfera. Curiosamente, este “error” se repite en varias ediciones en alemán y también en traducciones al inglés y al español. *N. del T.*



valor máximo determinado por el “*radio del Universo*”, para disminuir gradualmente hasta cero a medida que aumenta el radio de la esfera.<sup>†</sup>

Al principio, las líneas rectas radiadas desde el punto de partida, divergen entre sí cada vez más, pero luego comienzan a acercarse entre sí y, finalmente convergen en un “contra – punto” del punto de partida. Bajo tales condiciones, las líneas han atravesado todo el espacio esférico. Es fácil comprobar que el espacio esférico tridimensional es prácticamente, análogo a la superficie esférica bidimensional. Ese espacio es finito (es decir, su volumen es finito) y no tiene límites.

Puede mencionarse que, todavía, hay otra clase de espacios curvos: los “espacios elípticos”. Ellos pueden ser considerados como espacios curvos en los que: dos “contrapuntos” son idénticos (indistinguibles uno del otro). Un universo elíptico puede así ser considerado, en cierta medida, como un universo curvado que posee simetría central.

De lo que hemos dicho, resulta que, se pueden concebir espacios cerrados sin límites. Entre todos ellos, las propiedades de los espacios esféricos (y de los elípticos) son sencillas de estimar, debido a que todos sus puntos son equivalentes. Como resultado de este análisis, para los astrónomos y los físicos, la cuestión más interesante que surge es si el Universo en el que vivimos es infinito o si es finito como los universos esféricos. Nuestra experiencia no es suficiente para autorizarnos a dar una respuesta a esta cuestión. Pero la teoría general de la relatividad permite una respuesta con un moderado grado de certidumbre y, en su conexión con la dificultad mencionada en la Sección XXX, permite encontrar una solución.

## XXXII

### LA ESTRUCTURA DEL ESPACIO SEGÚN LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD.

Según la teoría general de la relatividad, las propiedades geométricas del espacio no son independientes, sino que están determinadas por la materia. Por eso, sólo podemos extraer conclusiones sobre la estructura geométrica del Universo, si basamos nuestras consideraciones sobre el estado de la materia siendo ella algo que es conocido. De nuestra experiencia sabemos que, para una adecuada

---

<sup>†</sup> „*F* wächst mit wachsendem *r* von null bis zu einem durch den „Weltradius“ bestimmten Maximum, um bei weiter wachsendem Kugelradius *r* allmählich wieder bis zu null abzunehmen“, en el original. *N. del T.*

elección del sistema de coordenadas, las velocidades de las estrellas son pequeñas en comparación con la velocidad en que se propaga la luz. Podemos así, mediante una grosera aproximación, arribar a una conclusión sobre la naturaleza del Universo, en su conjunto, si consideramos que la materia está en reposo.

De nuestras previas discusiones que el comportamiento de las varillas de medición y relojes están influenciados por los campos gravitatorios, es decir, por la distribución de la materia. Esto es, por sí mismo, suficiente para excluir la posibilidad de una validez exacta de la Geometría euclidiana en nuestro Universo. Pero es concebible que nuestro Universo difiera sólo levemente de uno euclídeo y esta noción parece más probable, dado que los cálculos muestran que la métrica del espacio circundante es influenciada en una pequeñísima proporción aún por masas de la magnitud de nuestro Sol. Podemos imaginar que, en lo que hace a la geometría, nuestro Universo se comporta en forma análoga a una superficie que está irregularmente curvada en sus partes individuales, pero que en ninguna parte se aleja apreciablemente de un plano: algo parecido a la superficie ondulada de un lago. Tal Universo, podría llamarse un “Universo cuasi-euclidiano”. En lo que respecta a su espacio, el mismo será infinito. Pero los cálculos muestran que un Universo cuasi-euclidiano la densidad promedio de la materia sería necesariamente cero. De modo que tales universos no evidenciarían materia en ningún lugar, presentándonos esa imagen insatisfactoria que hemos bosquejado en la Sección XXX.

Si en el Universo tenemos que tener una densidad media de la materia que difiera de cero, por más pequeña que sea esa diferencia, el Universo no puede ser cuasi-euclidiano. Por el contrario, los resultados de los cálculos indican que la materia debe estar distribuida uniformemente y que el Universo debería tener la forma esférica (o elíptica). Dado que, en realidad, la distribución de la materia no es uniforme, la forma del Universo real se desviará, en sus partes individuales, de la esférica, o sea que el Universo será cuasi-esférico. Pero será, necesariamente, finito. De hecho, la teoría nos suministra una simple<sup>1</sup> conexión entre la expansión espacial del Universo y la densidad media de la materia en él.

---

<sup>1</sup> Para el “radio”  $R$  del Universo se obtiene la ecuación  $R^2 = 2/\kappa\rho$ . El uso del sistema C.G.S. en esta ecuación da  $2/\kappa = 1,08 \times 10^{27}$ ;  $\rho$  es la densidad media de la materia.

## ANEXO I

### DERIVACIÓN SIMPLE DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ (SUPLEMENTARIO A LA SECCIÓN XI)

Para la orientación relativa del sistema de coordenadas indicado en la Figura 2, los ejes  $x$  de ambos sistemas coinciden permanentemente. En el presente caso, podemos dividir el problema en partes, primero considerando solamente eventos localizados sobre el eje  $x$ . Cada uno de esos eventos está representado, respecto del sistema  $K$  de coordenadas, por la abscisa  $x$  y el tiempo  $t$  y, con respecto al sistema  $K'$  por la abscisa  $x'$  y el tiempo  $t'$ . Se requiere encontrar  $x'$  y  $t'$  cuando son dados  $x$  y  $t$ .

Una señal luminosa que se transmite a lo largo del eje positivo de  $x$ , se propaga de acuerdo con la ecuación:

$$x = ct$$

o

$$x - ct = 0 \quad (1)$$

Dado que la misma señal luminosa tiene que ser transmitida a  $K'$  con la velocidad  $c$ , la propagación relativa al sistema  $K'$  estará representada por la fórmula análoga

$$x' - ct' = 0 \quad (2)$$

Aquellos puntos espacio-temporales (eventos) que satisfacen (1), deben también satisfacer (2). Obviamente, este sería el caso cuando la relación

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \quad (3)$$

se cumple, en general, donde  $\lambda$  representa una constante; ya que de acuerdo con la (3) la desaparición de  $(x - ct)$  implica la desaparición de  $(x' - ct')$ . Si aplicamos similares consideraciones a los rayos de luz que son transmitidos a lo largo del eje negativo de las  $x$ , obtenemos la condición

$$(x' - ct') = \mu(x - ct) \quad (4)$$

Sumando (o restando) las ecuaciones (3) y (4), e introduciendo, por conveniencia, las constantes  $a$  y  $b$  en vez de las constantes  $\lambda$  y  $\mu$  donde

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

y

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

y se obtienen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned} \right]$$

De esta manera tendremos una solución para nuestro problema, si las constantes  $a$  y  $b$  son conocidas. Eso resulta de la siguiente discusión. Para el origen de  $K'$ , tendremos permanentemente que  $x' = 0$  y, por lo tanto, de acuerdo con la primera de las ecuaciones (5)

$$x = \frac{bc}{a} t \quad (6)$$

El mismo valor  $v$  puede obtenerse de las ecuaciones (5) si calculamos la velocidad de otro punto de  $K'$  relativo a  $K$ , o la velocidad (dirigida hacia el eje negativo de las  $x$  de un punto de  $K$  respecto de  $K'$ . En síntesis, podemos designar a  $v$  como la velocidad relativa de los dos sistemas.

Más aún, el Principio de la relatividad nos enseña que, juzgada desde  $K$ , la longitud de una unidad de varilla de medición, que se encuentra en reposo con referencia a  $K'$ , debe tener exactamente la misma longitud que, si se juzga desde  $K'$  a una unidad de varilla de medición, que se encuentra en reposo con referencia a  $K$ . A fin de establecer cómo los puntos del eje  $x'$  aparecen como vistos desde  $K$ , bastaría tomar una instantánea de  $K'$  desde  $K$ , esto requiere que tengamos que asignar un valor particular a  $t$  (el tiempo de  $K$ ), por ejemplo,  $t = 0$ . Para este valor de  $t$ , obtenemos, de la primera de las ecuaciones (5)

$$x' = ax$$

Dos puntos del eje  $x'$  que están separados por la distancia  $\Delta x' = 1$ , cuando se miden en el sistema  $K'$ , están separados en nuestra fotografía instantánea por la distancia

$$\Delta x = \frac{1}{a} \quad (7)$$

Pero si la instantánea fuese tomada desde  $K'$  ( $t = 0$ , y si eliminamos  $t$  de las ecuaciones (5), teniendo en cuenta la expresión (6), obtendremos

$$x' = a \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x$$

De esto concluimos que dos puntos sobre el eje  $x$ , separados por la distancia 1 (relativa a  $K$ ), estarán representados en nuestra fotografía instantánea por la distancia

$$\Delta x' = a \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (7a)$$

Pero, de acuerdo con lo que hemos dicho, las dos instantáneas deben ser idénticas, por lo tanto  $\Delta x$  en la ecuación (7) debe ser igual al  $\Delta x'$  en la ecuación (7a), de modo que obtenemos

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7b)$$

Las ecuaciones (6) y (7b) determinan los valores de las constantes  $a$  y  $b$ . Insertando los valores de esas constantes en la ecuación (5) obtendremos la primera y la cuarta de las ecuaciones dadas en la Sección XI

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

## LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Así hemos obtenidos la transformación de Lorentz para eventos sobre el eje  $x$ . Dicha transformación satisface la condición

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

La extensión de este resultado, para incluir eventos que tienen lugar fuera del eje  $x$  se obtiene tomando la ecuación (8) y suplementándola con las relaciones

$$\left. \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

De esta manera se satisface el postulado de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío para los rayos de luz que se desplazan en cualquier dirección arbitraria tanto para el sistema  $K$  como para el sistema  $K'$ . Esto podría mostrarse de la siguiente manera:

Supongamos una señal luminosa enviada desde el origen de  $K$  al tiempo  $t = 0$ . Ella se propagará de acuerdo con la ecuación

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

o, elevando al cuadrado y ordenando

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (10)$$

Por la ley de propagación de la luz, en conjunción con el postulado de la relatividad, se requiere que la transmisión de la señal en cuestión, tenga lugar —juzgada desde  $K'$ — de acuerdo con la correspondiente fórmula

$$r' = ct'$$

o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (10a)$$

Para que la ecuación 10a sea una consecuencia de la ecuación 10 se debe cumplir

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2) \quad (11)$$

Dado que la ecuación (8a) se debe cumplir para los puntos sobre el eje  $x$ , entonces debe ser  $\sigma = 1$ . Se ve fácilmente que la transformación de Lorentz, realmente, satisface a la ecuación (11) para  $\sigma = 1$ , pues (11) es una consecuencia de (8a) y (9) y, por lo tanto, también de (8) y (9). Así hemos derivado la transformación de Lorentz. La transformación de Lorentz, representada por (8) y (9), todavía requiere ser generalizada. Obviamente, es irrelevante si los ejes de  $K'$  son elegidos de modo que sean espacialmente paralelos a los ejes de  $K$ . Tampoco es esencial que la velocidad de translación de  $K'$  respecto de  $K$ , sea en la dirección del eje de las  $x$ .

Una simple consideración muestra que podemos construir la transformación de Lorentz expresada en este sentido a partir de dos clases de transformaciones, a saber, de las transformaciones de Lorentz en el sentido especial y a partir de transformaciones puramente espaciales, que corresponden a los reemplazos del sistema de coordenadas rectangulares por un nuevo sistema con sus ejes apuntando en otras direcciones.

Matemáticamente, podemos caracterizar la transformación generalizada de Lorentz, así:

Si se expresan  $x', y', z', t'$  en términos de funciones lineales homogéneas de  $x, y, z, t$ , de tal clase, que la relación

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11a)$$

se satisface idénticamente. Es decir: si sustituimos sus expresiones en  $x, y, z, t$  por  $x', y', z', t'$ , en el miembro de la derecha, entonces, el segundo miembro de la (11a) coincide con el primero.

## ANEXO II

### EL ESPACIO TETRADIMENSIONAL DE MINKOWSKI (SUPLEMENTARIO DE LA SECCIÓN XVII)

Podemos caracterizar la transformación de Lorentz de una manera aún más simple si introducimos como variable temporal la cantidad imaginaria  $\sqrt{-1} \times ct$  en vez de  $t$ , Si, de acuerdo con esto, insertamos

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \sqrt{-1} \times ct$$

y análogamente,

para el sistema con primas  $K'$ , entonces la condición que satisface idénticamente la transformación será:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (12)$$

Esto es, con la antes mencionada elección de “coordenadas”, la ecuación (11a) se transforma en la (12)

De la ecuación (12) observamos que la coordenada temporal imaginaria  $x_4$  experimenta la condición de transformación en pie de igualdad con las coordenadas espaciales  $x_1, x_2, x_3$ . Eso implica que, según la teoría de la relatividad, el "tiempo"  $x_4$  interviene en las leyes de la naturaleza en la misma forma que las coordenadas espaciales  $x_1, x_2, x_3$ .

Un continuum tetradimensional descrito por las “coordenadas”  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , fue llamado “mundo” por Minkowski. A un suceso puntual en ese continuum, lo llamó “punto del universo” o “punto del mundo”. De esta manera, un suceso de la Física en el espacio tridimensional pasa a convertirse en una existencia en el “mundo” tetradimensional.

Este “mundo” tetradimensional, presenta una similitud muy próxima con el “espacio” tridimensional de la Geometría analítica (euclidiana). Pues si en este último se introduce un nuevo sistema de coordenadas cartesianas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  con el mismo origen, entonces  $x'_1, x'_2, x'_3$  son funciones homogéneas y lineales de  $x_1, x_2, x_3$  que cumplen idénticamente la ecuación

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$



La analogía con la ecuación (12) es completa. El mundo de Minkowski cabe considerarlo de una manera formal como un espacio euclidiano tetradimensional (con la coordenada temporal imaginaria): la transformación de Lorentz corresponde a una “rotación” de las coordenadas del sistema en el “mundo tetradimensional”.

### ANEXO III

#### LA CONFIRMACIÓN EXPERIMENTAL DE LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD.

Desde un punto de vista teórico y sistemático, podemos imaginar el proceso de evolución de una ciencia empírica como siendo un proceso continuo de inducción. Las teorías evolucionan y se expresan en breves enunciados, como leyes empíricas, que resumen un gran número de observaciones individuales, a partir de las cuales se determinan por comparación las leyes generales. Consideradas de esta manera, la evolución de una ciencia, tiene cierto parecido a la compilación de un catálogo clasificado. Parece, como si fuera, un emprendimiento puramente empírico.

Sin embargo, este punto de vista de ningún modo involucra el conjunto de todos los factores que inciden en el proceso real, ya que pasa por alto la parte importante que tienen la intuición y el pensamiento deductivo en el desarrollo de una ciencia exacta. Una vez que una ciencia ha emergido de sus estados iniciales, los avances teóricos ya no se alcanzan meramente por un proceso de ordenamiento. Guiado por los datos empíricos, el investigador, más bien desarrolla un sistema de pensamiento, el cual, en general, es construido lógicamente a partir de un pequeño número de suposiciones fundamentales, los llamados axiomas. A ese sistema de pensamiento lo llamamos *teoría*. Una teoría encuentra la justificación de su existencia en el hecho que correlaciona un gran número de observaciones individuales y es aquí, justamente, donde la “verdad” de una teoría yace.

Correspondiendo al mismo conjunto de datos empíricos, puede haber varias teorías que difieren entre sí en una considerable extensión. Pero, en lo que respecta a las deducciones de las teorías que pueden ser testeadas, el acuerdo entre las teorías puede ser tan completo, que se vuelve difícil encontrar las deducciones en las cuales dos teorías difieren entre sí. Un caso de este tipo, y de interés general, se da en el campo de la Biología, entre la teoría de Darwin de la evolución de las especies por selección natural en la lucha por la existencia y la teoría de la evolución que está basada sobre la hipótesis de la transmisión hereditaria de los caracteres adquiridos.

Tenemos otro caso de profunda concordancia entre las deducciones de dos teorías, entre la Mecánica newtoniana por un lado y la Teoría general de la relatividad por el otro. Este acuerdo llega hasta tal grado que, hasta el presente, sólo hemos podido encontrar unas pocas deducciones de la Teoría general de la relatividad en las que la Física de los días de la pre-relatividad no haya podido alcanzar y eso, a pesar de las profundas diferencias entre las suposiciones fundamentales de esas dos teorías.

En lo que sigue consideraremos nuevamente esas importantes deducciones y también discutiremos la evidencia empírica vinculada a ellas que, hasta ahora, se ha obtenido.

#### (a) MOVIMIENTO DEL PERIHELIO DE MERCURIO.

De acuerdo con la Mecánica newtoniana y la ley de la gravitación de Newton, un planeta que orbita alrededor del Sol describe una elipse alrededor de este astro o, más correctamente, alrededor del centro de gravedad común del Sol y del planeta. En tal sistema, el Sol, o el centro de gravedad común, yace en uno de los focos de la elipse orbital, de tal manera que, en el curso de un año planetario, la distancia Sol-planeta crece desde un mínimo a un máximo y luego decrece nuevamente a un mínimo.

Si en vez de la ley de Newton, insertamos en los cálculos una ley de atracción algo diferente, encontramos que, de acuerdo con esta nueva ley, que el movimiento seguiría ocurriendo de tal manera que la distancia Sol-planeta exhibiría variaciones periódicas, pero en este caso, el ángulo descrito por la línea que une al Sol y al planeta durante un período (desde un perihelio – máxima aproximación al Sol — hasta el perihelio siguiente) sería diferente a  $360^\circ$ . La curva de la órbita no sería entonces cerrada, sino que, en el transcurso del tiempo llenaría una porción anular del plano orbital, a saber, entre el círculo de mínima distancia entre el planeta y el Sol y el de máxima distancia entre ellos.

De acuerdo con la Teoría general de la relatividad que, por supuesto, difiere de la teoría de Newton, una pequeña variación del movimiento de Newton-Kepler de un planeta en su órbita tendrá lugar y, de tal manera que el ángulo descrito por el radio Sol-planeta entre un perihelio y el siguiente excedería el correspondiente a una revolución completa en una cantidad dada por

$$\frac{+24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

donde  $a$  es el semieje mayor de la elipse,  $e$  su excentricidad,  $c$  la velocidad de la luz y  $T$  el período de revolución. Una revolución completa corresponde a un ángulo de  $2\pi$ , en la medida angular absoluta que se acostumbra a usar en Física. La expresión anterior da la cantidad por la cual el radio Sol-Planeta excede ese ángulo durante un intervalo entre un perihelio y el siguiente.

Nuestro resultado puede ser enunciado de la siguiente manera: De acuerdo con la teoría general de la relatividad, el eje mayor de la elipse rota alrededor del Sol en el mismo sentido que el movimiento orbital del planeta. La Teoría requiere que, para el planeta Mercurio, esta rotación sea de 43 segundos de arco por cada cien años. Pero, para los demás planetas de nuestro sistema solar, su magnitud deberá ser tan pequeña que, necesariamente escaparía a su detección.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> ESPECIALMENTE DESDE QUE EL PLANETA SIGUIENTE, VENUS, TIENE UNA ÓRBITA ES CASI UN CÍRCULO EXACTO, LO QUE HACE MÁS DIFÍCIL LOCALIZAR el perihelio con precisión.

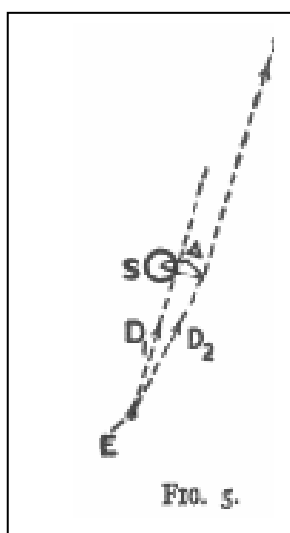
De hecho, los astrónomos han encontrado que la teoría de Newton no es suficiente para calcular el movimiento observado de Mercurio con una exactitud que se corresponda con la delicadeza de los medios de observación accesibles en nuestra época.

Después de tomar en cuenta todas las influencias perturbadoras que ejercen los restantes planetas sobre Mercurio, se encontró (Leverrier, en 1869 y Newcomb, en 1895) que, en el movimiento del perihelio de Mercurio, quedaba sin explicar una cantidad que no difiere sensiblemente de los ya mencionados +43 segundos de arco por 100 años. La incertidumbre del resultado empírico es sólo de unos pocos segundos.

(b) **DEFLEXIÓN DE LA LUZ POR UN CAMPO GRAVITATORIO.**

En la sección XXII se ha mencionado que, de acuerdo con la Teoría general de la relatividad, un rayo de luz experimentará una curvatura de su trayectoria, similar a la que experimenta un cuerpo que es proyectado a través de un campo gravitatorio. Como un resultado de esta teoría, debemos esperar que un rayo de luz que está pasando cerca de un cuerpo de gran masa sería desviado hacia ese último. Para un rayo de luz que pasa cerca del Sol a una distancia de  $\Delta$  radios solares de su centro sufrirá un ángulo de deflexión ( $\alpha$ ) dado por

$$\alpha = \frac{1,7 \text{ segundos de arco}}{\Delta}$$



Se debe agregar que, de acuerdo con la teoría, la mitad de esta deflexión es producida por el campo newtoniano de atracción del Sol y la otra mitad por la modificación geométrica (o sea la curvatura del espacio) causada por el Sol.

La única razón por la cual tenemos que esperar que se produzca un eclipse total de Sol es que, en cualquier otro tiempo, la atmósfera está tan fuertemente iluminada por la luz solar, que las estrellas situadas cerca del disco solar son invisibles.

El efecto predicho, puede ser visto claramente en el diagrama que se acompaña. Si el Sol (S) no estuviera presente, una estrella que se encuentra a una distancia prácticamente infinita se vería en la dirección  $D_1$ , como observada desde la Tierra. Pero, como una consecuencia de la deflexión de la luz de la estrella por el Sol, la estrella será vista en la dirección  $D_2$ , esto es, a cierta distancia mayor del centro del Sol de la que corresponde a su posición real.

En la práctica, la cuestión es testeada de la siguiente manera. Las estrellas en las vecindades del Sol se fotografían durante un eclipse solar. Además, Se toma una segunda fotografía de la misma estrella cuando el Sol está situado en otra posición del cielo, por ejemplo, un par de meses antes o

después del eclipse. Cuando se comparan con la fotografía estándar, la posición de la estrella fotografiada durante el eclipse, debe aparecer desplazada radialmente hacia afuera (alejándose del centro del Sol) por una cantidad correspondiente al ángulo  $\alpha$ .

Estamos sumamente agradecidos a la Royal Society y a la Royan Astronomical Society por la investigación de esta importante deducción. Impertérritas ante la Guerra y por las dificultades tanto de naturaleza material como psicológicas debidas a la Guerra, estas sociedades equiparon dos expediciones — a Sobral, (Brasil) y a la isla de Príncipe (África Occidental) — y enviaron algunos de los más célebres astrónomos británicos (Eddington, Cottingham, Crommelin, Davidson) a fin de obtener fotografías del eclipse solar del 29 de mayo de 1919. Las discrepancias relativas que debían esperarse entre las fotografías estelares obtenidas durante el eclipse y las fotografías de comparación alcanzaron solamente unos pocos cientos de milímetros. Para hacer los ajustes requeridos para la toma de las fotografías y sus subsecuentes mediciones era necesario una gran precisión.

Los resultados de las mediciones confirmaron completamente la teoría de una manera satisfactoria. Las componentes rectangulares de las desviaciones de las estrellas observadas y calculadas (en segundos de arco) se exponen en la siguiente tabla de resultados.

Número de la estrella			Primera coordenada		Segunda coordenada	
			Observada	Calculada	Observada	Calculada
11	•	•	-0.19	-0.22	+0.16	+0.02
5	•	•	+0.29	+0.31	-0.46	-0.43
4	•	•	+0.11	+0.10	+0.83	+0.74
3	•	•	+0.20	+0.12	+1.00	+0.87
6	•	•	+0.10	+0.04	+0.57	+0.40
10	•	•	-0.08	+0.09	+0.35	+0.32
2	•	•	+0.95	+0.85	-0.27	-0.09

**(c) DESPLAZAMIENTO DE LAS LÍNEAS ESPECTRALES HACIA EL ROJO**

En la Sección XXIII se ha mostrado que en un sistema  $K'$  que está en rotación respecto a un sistema galileano  $K$ , relojes de idéntica construcción y que se consideran en reposo respecto del cuerpo de referencia en rotación, tienen velocidades de funcionamiento que dependen de la posición. Vamos a examinar esa dependencia de manera cuantitativa. Un reloj que esté situado a una distancia  $r$  del centro del disco, tiene, respecto a  $K$ , la velocidad

$$v = \omega r$$

donde  $\omega$  representa la velocidad de rotación\* del disco  $K'$  respecto de  $K$ . Si  $v_0$  representa el número de “tic-tacs” del reloj por unidad de tiempo (“velocidad” del reloj) relativo a  $K$  cuando el reloj está en reposo, entonces la “velocidad” ( $v$ ) del reloj cuando está en movimiento relativo a  $K$ , pero en reposo respecto al disco, de acuerdo con la *Sección XII*, estará dada por

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

o, con buena aproximación

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Esta expresión se puede escribir

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

Si representamos por  $\phi$  a la diferencia de potencial debida a la fuerza centrífuga que separa a la posición del reloj del centro del disco, es decir, al trabajo (con signo negativo) que debe realizarse, por unidad de masa, contra la fuerza centrífuga, para transportar al reloj desde su posición en el disco que está girando hasta el centro de dicho disco, tendremos

$$\phi = \frac{-\omega^2 r^2}{2}$$

de donde se sigue que

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

En primer término, de esta expresión vemos que dos relojes de idéntica construcción marcharán a diferentes velocidades cuando están situados a diferentes distancias del centro del disco giratorio. Este resultado es también válido desde el punto de vista de un observador que rota con el disco.

---

\* La palabra angular fue insertada en ediciones posteriores.

Ahora, juzgado desde el disco, el reloj está en campo gravitatorio de potencial  $\phi$ , por lo que el resultado que hemos obtenido será válido para todos los campos gravitatorios. Más aún, podemos considerar a un átomo que está emitiendo líneas espectrales como un reloj en un campo gravitatorio de modo que será válido el siguiente enunciado

*Un átomo absorbe o emite luz de una frecuencia que depende del potencial del campo gravitatorio en el que se encuentra.*

La frecuencia de un átomo situado sobre la superficie de un cuerpo celestial será algo menor que la frecuencia de un átomo del mismo elemento, situado en el espacio libre (o sobre la superficie de un cuerpo celestial más pequeño)

Ahora  $\phi = -K M/r$ , donde  $K$  es la constante de gravitación de Newton y  $M$  es la masa del cuerpo celestial. Entonces se debe producir un desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales en las superficies de las estrellas, comparado con el desplazamiento de las líneas espectrales del mismo elemento producido sobre la superficie de la Tierra, siendo la magnitud de ese desplazamiento

$$\frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{K M}{c^2 r}$$

Para el Sol, el desplazamiento hacia el rojo predicho por la teoría es de alrededor de 2 millonésimos de la longitud de onda. En el caso de las estrellas, no es posible porque cálculo confiable porque, en general no se conocen ni la masa  $M$  ni el radio  $r$ .

Es una cuestión abierta si este efecto existe o no y en esta época hay astrónomos trabajando con ahínco en búsqueda de la solución. En el caso del Sol, debido a la pequeñez del efecto es difícil consolidar una opinión acerca de su existencia. Mientras Grebe y Bachem (Bonn), como resultados de sus propias mediciones, y las de Evershed y Schwartzschild sobre las bandas del cianógeno, han puesto la existencia del efecto fuera de toda duda, otros investigadores, particularmente, St. John, han sido llevados a la opinión opuesta como consecuencia de sus mediciones.

Desplazamientos medios de las líneas hacia el extremo menos refringente del espectro han sido revelados por investigaciones estadísticas sobre las estrellas fijas, pero hasta el presente, el examen de los datos disponibles, no permiten arribar a una decisión definitiva acerca de si esos desplazamientos deben adjudicarse en realidad al efecto de la gravitación o no. Los resultados de las observaciones han sido recopilados y discutidos en detalle desde el punto de vista que ha ocupado nuestra atención aquí, en un trabajo de E. Freundlich titulado “Zur Prüfung der allgemeinen Relativitäts-Theorie” (*Die Naturwissenschaften*, 1919, No. 35, p. 520: Julius Springer, Berlin).

En todo caso, una decisión definitiva se alcanzará durante los próximos años. Si el desplazamiento de las líneas espectrales hacia el rojo por un campo gravitatorio no existe, entonces, la teoría generará

de la relatividad será insostenible. Por otro lado, si la causa del desplazamiento de las líneas espectrales fuera definitivamente adjudicada al potencial gravitatorio, entonces, el estudio de estos desplazamientos suministrará información importante sobre la masa de los cuerpos celestes.





[291]

Received October 30, Read November 6, 1919. **IX. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from. Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919.**

By **Sir F. W. DYSON, F.R.S., Astronomer Royal, Prof. A. S. EDDINGTON, F.R.S., and Mr. C. DAVIDSON.**<sup>14</sup>

*(Communicated (by the Joint Permanent Eclipse Committee))*

[PLATE 1]

CONTENTS.

		Page
I.	Purpose of the Expeditions.	291
II.	Preparations for the Expeditions.	293
III.	The Expedition to Sobral.	296
IV.	The Expedition to Principe.	312
V.	General Conclusions.	330

**I. PURPOSE OF THE EXPEDITIONS.**

1. The purpose of the expeditions was to determine what effect, if any, is produced by a gravitational field on the path of a ray of light traversing it. Apart from possible surprises, there appeared to be three alternatives, which it was especially desired to discriminate between —

(1) The path is uninfluenced by gravitation.

(2) The energy or mass of light is subject to gravitation in the same way as ordinary matter. If the law of gravitation is strictly the Newtonian law, this leads to an apparent displacement of a star close to the sun's limb amounting to  $0''\cdot87$  outwards.

---

<sup>14</sup> Received October 30, Read November 6, 1919.

(3) The course of a ray of light is in accordance with EINSTEIN'S generalized relativity theory. This leads to an apparent displacement of a star at the limb amounting to  $1''\cdot75$  outwards.

In either of the last two cases the displacement is inversely proportional to the distance of the star from the sun's centre, the displacement under (3) being just double the displacement under (2).

It may be noted that both (2) and (3) agree in supposing that light is subject to gravitation in precisely the same way as ordinary matter. The difference is that, whereas (2) assumes the Newtonian law, (3) assumes EINSTEIN'S new laws of gravitation. The slight (p292) deviation from the Newtonian law, which on EINSTEIN'S theory causes an excess motion of perihelion of Mercury, becomes magnified as the speed increases, until for the limiting velocity of light it doubles the curvature of the path.

2. The displacement (2) was first suggested by Prof. EINSTEIN\* in 1911, his argument being based on the Principle of Equivalence, viz., that a gravitational field is indistinguishable from a spurious field of force produced by an acceleration of the axes of reference. But apart from the validity of the general Principle of Equivalence there were reasons for expecting that the electromagnetic energy of a beam of light would be subject to gravitation, especially when it was proved that the energy of radio-activity contained in uranium was subject to gravitation. In 1915, however, EINSTEIN found that the general Principle of Equivalence necessitates a modification of the Newtonian law of gravitation, and that the new law leads to the displacement (3).

3. The only opportunity of observing these possible deflections is afforded by a ray of light from a star passing near the sun. (The maximum deflection by Jupiter is only  $0''\cdot017$ .) Evidently, the observation must be made during a total eclipse of the sun.

Immediately after EINSTEIN'S first suggestion, the matter was taken up by Dr. E. FREUNDLICH who attempted to collect information from eclipse plates already taken; but he did not secure sufficient material. At ensuing eclipses plans were made by various observers for testing the effect, but they failed through cloud or other causes. After EINSTEIN'S second suggestion had appeared, the Lick Observatory expedition attempted to observe the effect at the eclipse of 1918. The final results are not yet published. Some account of a preliminary discussion has been given,<sup>†</sup> but the eclipse was an unfavourable one, and from the information published the probable accidental error is large, so that the accuracy is insufficient to discriminate between the three alternatives.

4. The results of the observations here described appear to point quite definitively to the third alternative, and confirm EINSTEIN'S generalized relativity theory. As is well known the theory is also confirmed by the motion of the perihelion of Mercury which exceeds the Newtonian value by

---

\* *Annalen der Physik*, vol. XXXV p. 898.

††† *Observatory*, vol. XLII, p. 298.

43" per century — an amount practically identical with that deduced from EINSTEIN'S theory. On the other hand, his theory predicts a displacement to the red of the Fraunhofer lines on the Sun amounting to about 0.008 Å in the violet. According to Dr. ST. JOHN<sup>‡</sup> this displacement is not confirmed. If this disagreement is to be taken as final it necessitates considerable modifications of EINSTEIN'S theory, which it is outside our province to discuss. But, whether or not changes are needed in other parts of the theory, it appears now to be established that EINSTEIN'S law of gravitation gives the true deviations from the Newtonian law both for the relatively slow-moving planet Mercury and for the fast-moving waves of light.

It seems clear that the effect here found must be attributed to the sun's gravitational field and not, for example, to refraction by coronal matter. In order to produce the (p. 293) observed effect by refraction, the sun must be surrounded by material of refractive index  $1 + \cdot 00000414/r$ , where  $r$  is the distance from the centre in terms of the sun's radius. At a height of 0.7140ne radius above the surface the necessary refractive index 1.00000212 corresponds to that of air at 1/140 atmosphere, hydrogen at 1/60 atmosphere, or helium at 1/20 atmospheric pressure. Clearly a density of this order is out of the question.

## II. PREPARATIONS FOR THE EXPEDITIONS.

5. In March, 1917\* it was pointed out as the result of an examination of the photographs taken with the Greenwich astrographic telescope at the eclipse of 1905 that this instrument was suitable for the photography of the field of stars surrounding the sun in a total eclipse. Attention was also drawn to the importance of observing the eclipse of May 29, 1919, as this afforded a specially favourable opportunity, owing to the unusual number of bright stars in the field, such as would not occur again for m any years.

With weather conditions as good. as those at Sfax in the 1905 eclipses — and these were by no means perfect — it was anticipated that twelve stars would be shown. Their positions are indicated in the diagram on next page, on which is also marked on the same scale the outline of a 16 × 16 cm. plate (used with the astrographic telescopes of 3.43 metres focal length) and a 10×8-inch plate (used with a 4-inch lens of 19 feet focal length).

The Table I gives the photographic magnitudes and standard co-ordinates of the stars, and the gravitational displacements in  $x$  and  $y$  calculated on the assumption of a radial displacement  $1''\cdot 75 r_0/r$  where  $r$  is the distance from the sun's centre and  $r_0$  the radius of the sun.

---

<sup>‡</sup> *Astrophysical Journal*, vol. XLVI, p. 249.

\* *Monthly Notices*, R.A.S., LXXVII, p. 445.

(p. 294) It may be noted that No. 1 is lost in the corona on the photographs taken at Sobral. The star, No. 13, of magnitude 8.0, is shown on some of the astrographic plates at Sobral.

TABLE I.

No.	Names.	Photog. Mag.	Co-ordinates. Unit = 50'.		Gravitational displacement.			
			x.	y.	Sobral.		Principe.	
					x.	y.	x.	y.
		m.			"	"	"	"
1	B.D., 21°, 641 . . . . .	7.0	+0.026	-0.200	-1.31	+0.20	-1.04	+0.09
2	Piazzì, IV, 82 . . . . .	5.8	+1.079	-0.328	+0.85	-0.09	+1.02	-0.16
3	$\kappa^2$ Tauri . . . . .	5.5	+0.348	+0.360	-0.12	+0.87	-0.28	+0.81
4	$\kappa^1$ Tauri . . . . .	4.5	+0.334	+0.472	-0.10	+0.73	-0.21	+0.70
5	Piazzì, IV, 61 . . . . .	6.0	-0.160	-1.107	-0.31	-0.43	-0.31	-0.38
6	$\nu$ Tauri . . . . .	4.5	+0.587	+1.099	+0.04	+0.40	+0.01	+0.41
7	B.D., 20°, 741 . . . . .	7.0	-0.707	-0.864	-0.38	-0.20	-0.35	-0.17
8	B.D., 20°, 740 . . . . .	7.0	-0.727	-1.040	-0.33	-0.22	-0.29	-0.20
9	Piazzì, IV, 53 . . . . .	7.0	-0.483	-1.303	-0.26	-0.30	-0.26	-0.27
10	72 Tauri . . . . .	5.5	+0.860	+1.321	+0.09	+0.32	+0.07	+0.34
11	66 Tauri . . . . .	5.5	-1.261	-0.160	-0.32	+0.02	-0.30	+0.01
12	53 Tauri . . . . .	5.5	-1.311	-0.918	-0.28	-0.10	-0.26	-0.09
13	B.D., 22°, 688 . . . . .	8.0	+0.089	+1.007	-0.17	+0.40	-0.14	+0.39

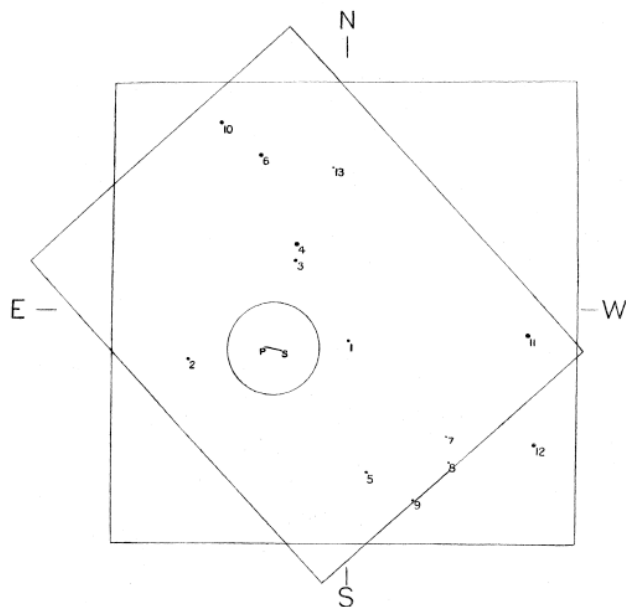


Diagram 1.

6. The track of the eclipse runs from North Brazil across the Atlantic, skirting the African coast near Cape Palmas, passing through the Island of Principe, then across Africa to the western shores of Lake Tanganyika. Enquiry as to the suitable sites and probable weather conditions was kindly made by Mr. HINKS. It appeared that a station in North Brazil, the Island of Principe, and a station on the west of Lake Tanganyika, were possible. A station near Cape Palmas did not seem desirable from the meteorological reports though, as the event proved, the eclipse was observed in a cloudless sky (p. 295) by Prof. BAUER, Who was there on an expedition to observe magnetic effects. At the station at Tanganyika it was thought the sun was at too low an altitude for observations of this character, owing to the large displacements which would be caused by refraction.

A circular received from Dr. MORIZE, the director of the Observatory at Rio, stated that Sobral was the most suitable station in North Brazil and gave copious information of the meteorological conditions, mode of access, &c.

7. Acting on this information the Joint Permanent Eclipse Committee at a meeting on November 10, 1917, decided, if possible, to send expeditions to Sobral in North Brazil, and to the island of Principe. Application was made to the Government Grant Committee for £100 for instruments and £1,000 for the expedition, and a sub-committee consisting of Sir F. W. DYSON, Prof. EDDINGTON, Prof. FOWLER and Prof. TURNER was appointed to make arrangements for the expeditions. This sub-committee met in May and June, 1918, and made provisional arrangements for Prof. EDDINGTON and Mr. COTTINGHAM to take the object glass of the Oxford astrographic telescope to Principe, and Mr. DAVIDSON and Father CORTIE to take the object glass of the Greenwich astrographic telescope to Sobral. It was arranged for the clocks and mechanism, of the cœlostats to be overhauled by Mr. COTTINGHAM. Preliminary inquiries were also set on foot as to shipping facilities, from which it appeared very doubtful whether the expeditions could be carried through.

Conditions had changed materially in November, 1918, and at a meeting of the subcommittee on November 8, it was arranged to assemble the instruments at Greenwich, and make necessary arrangements with all speed for the observers to leave England by the end of February, 1919. In addition to the astrographic object glasses fed by 16-inch cœlostats, Father CORTIE suggested to the sub-committee the use of the 4-inch telescope of 19-feet focus, which he had used at Hernosand, Sweden, in 1914, in conjunction with an 8-inch cœlostad, the property of the Royal Irish Academy. It was arranged to ask for the loan of these instruments. As Father CORTIE found it impossible to spare the necessary time for the expedition his place was taken by Dr. CROMMELIN of the Royal Observatory.

8. In November, 1918, the only workman available at the Royal Observatory was the mechanic, the carpenter not having been released from military service. In these circumstances Mr. BOWEN, the civil engineer at the Royal Naval College, was consulted. He kindly undertook the construction of frame huts covered with canvas, which could be easily packed and readily put together. These were generally similar to those used in previous expeditions from the Royal Observatory (see 'Monthly

Notices,' Vol. LVII., p. 101). He also lent the services of a joiner who worked at the Observatory on the woodwork of the instruments.

It was found possible to obtain steel tubes for the astrographic objectives. These were, for convenience of carriage, made in two sections which could be bolted together. The tubes were provided with flanges at each end, the objective being attached to one of these, and a wooden breech piece to the other. In the breech piece suitable provision (p. 296) was made for the focussing and squaring on of the plates. The plate holders were of a simple construction, permitting the plate to be pushed into contact with three metal tilting screws on the breech piece thus insuring a constancy of focal plane. Eighteen plate-carriers were obtained for each of the astrographic telescopes, made according to a pattern supplied.

With the 4-inch lens Father CORTIE lent the square wooden tube used by him in 1914. This was modified at the breech end to secure greater rigidity and constancy of focus.

It was designed for dark slides carrying  $10 \times 8$ -inch plates, and four of these, carrying eight plates, were lent with the telescope. The desirability of using larger plates was considered, but the time at disposal to make the necessary alterations was insufficient.

The 16-inch cœlostats which had been overhauled by Mr. COTTINGHAM were mounted and tested as far as the unfavourable weather conditions of February, 1919, would permit. The 8-inch cœlostat was constructed for these latitudes. To make it serviceable near the equator a strong wooden wedge was made on which the cœlostat was bolted.

The 8-inch mirror was silvered at the observatory, but owing to lack of facilities for maintaining a uniform temperature approaching  $60^{\circ}$  F. in the wintry weather of February, the larger mirrors were sent away to be silvered.

Photographic plates, suitably packed in hermetically sealed tin boxes, were obtained from the Ilford and Imperial Companies. The Ilford plates employed were Special Rapid and Empress, and those of the Imperial Company, Special Sensitive, Sovereign and Ordinary.

The instruments were carefully packed and sent to Liverpool a week in advance, with the exception of the objectives. These were packed in cases inside hampers and remained under the personal care of the observers, who embarked on the "Anselm" on March 8.

### III. THE EXPEDITION TO SOBRAL.

(Observers Dr. A. C. D. CROMMELIN and Mr. C. DAVIDSON.)

9. Sobral is the second town of the State of Ceara, in the north of Brazil. Its geographical co-ordinates are: longitude 2h. 47m. 25s. west; latitude 30 41' 33" south; altitude 230 feet. Its climate is dry and though hot not unhealthy.

The expedition reached Para on the "Anselm" on March 23. There was a choice of proceeding immediately to Sobral or waiting for some weeks. It was considered undesirable to go there before we heard from Dr. MORIZE what arrangements were being made, so we reported our arrival to him by telegram and decided to await his reply. As we had thus some time on our hands, we continued the voyage to Manaus in the "Anselm," returning to Para on April 8.

By the courtesy of the Brazilian Government our heavy baggage was passed through the customs without examination and we continued our journey to Sobral, leaving Para one April 24 by the steamer "Fortaleza" and arriving at Camocim on April 29. (p. 297) Here we were met by Mr. JOHN NICOLAU who had been instructed to assist us with our baggage through to Sobral. We proceeded from Camocim to Sobral by train on April 30, our baggage following the next day.

We were met at Sobral station by representatives of both the Civil and Ecclesiastical Authorities, headed respectively by Dr. JACOME D'OLIVEIRA, the Prefect, and Mgr. FERREIRA, and conducted to the house which had been placed at our disposal by the kindness of its owner, Col. VICENTE SABOYA, the Deputy for Sobral. We were joined there nine days later by the Washington (Carnegie) Eclipse Commission, consisting of Messrs. DANIEL WISE and ANDREW THOMSON.

We are greatly indebted to Dr. LEOCADIO ARAUJO, of the State Ministry of Agriculture, who had been deputed to interpret for us and to assist us in our preparations. His services were invaluable, and contributed greatly to our success, as also to our well-being during our stay.

10. A convenient site for the eclipse station offered itself just in front of the house; this was the race-course of the Jockey Club, and was provided with a covered grand stand, which we found most convenient for unpacking and storage and in the preparatory work. We laid down a meridian line, after which brick piers were constructed for the cœlostats and for the steel tube of the astrographic telescope. Whilst this was in progress the huts were being erected.

The pier of the small cœlostat was constructed so as to leave a clear space in the middle of one end for the fall of the weight, which was thus below the driving barrel of the clock. By continuing the hole below the foundations of the pier, space was provided for a fall of the weight permitting a run of 25 minutes. In the case of the 16-inch cœlostat, the clock was mounted on the top of a long wooden trunk, nearly 4 feet in length, which was placed on end, and sunk in the earth to a depth of about 2



feet. The weight descended inside the trunk directly from the driving barrel, and had space for a continuous run of over half-an-hour.

The 16-inch cœlostast had free adjustment for all latitudes; but the 8-inch one, constructed for European latitudes, was mounted on a wooden base, inclined at an angle of about 40 degrees, constructed before leaving Greenwich. The clock had to be separated from the cœlostast, mounted on a wooden base and reversed, to adjust to the Southern Hemisphere. It performed very satisfactorily, and no elongation of the star images is shown with 28 seconds' exposure.

To provide for the changing declination of the sun the piers of the astrographic telescope were made with grooves in the top, in which the wooden V-supports of the tube could slide, thus allowing for the change of azimuth.

The tube of the astrographic telescope was circular in section, and could rest in any position in the Vs; for convenience it was adjusted so that the directions of R.A. and declination were parallel to the sides of the plate; this involved a tilt of the plate holders of about 4 degrees to the horizontal.

The 4-inch lens was taken as an auxiliary; we used the square wooden tube, 19 feet (p. 298) in length, originally used by Father CORTIE at HERNOSAND in 1914, together with the 10 × 8-inch plate carriers. Study of the star-diagram showed that seven stars could be photographed by turning the plate through 45 degrees. The tube was therefore placed on its angle, large wooden V-supports being prepared to fit the tube; these rested on strong wooden trestles.

The focussing was at first done visually on Arcturus, using an eyepiece fitted with a cobalt glass (after the plate supports and object-glass had been adjusted for perpendicularity to the axis). A series of exposures was then made, the focus being varied slightly so as to cover a sufficient range. Examination of these photographs showed at once that there was serious astigmatism due to the figure of the mirror of the 16-inch cœlostast. By inserting an 8-inch stop this was reduced to a large extent, and this stop was henceforth used throughout; but the defect was of such a character that it was clear that it would be necessary to stay at Sobral and obtain comparison plates of the eclipse field in July when the sun had moved away.

The focus of the 4-inch was determined in a similar manner. The images, though superior to those of the astrographic, were not quite perfect, and here again comparison plates in July were necessary. Once the focus had been decided on, the breech end was securely screwed up to avoid any chance of subsequent movement.

A few check plates of the field near Arcturus were taken, but have not been used.

11. The following is a summary of the meteorological conditions during our stay. The barometer record was interesting in that it showed very little change from day to day, in spite of changes in the

type of weather; there was, however, a very well marked semi-diurnal variation, with range of about 0.15 inch. The temperature range was fairly uniform, from a maximum of about 97° F. towards 3 p.m. to a minimum of about 75° F. at 5 a.m. The relative humidity (as shown by a hygrograph belonging to the Brazilian Commission) followed the temperature closely, varying from 30 per cent. in the afternoon to 90 per cent. in the early morning.

May is normally the last month of the rainy season at Sobral, but this year the rainfall was very scanty; there were a few afternoon showers, each ushered in by a violent gust of wind; and on May 25 there was very heavy rain, which was welcome for its moistening effect on the ground, the dust hitherto having been troublesome to the clockwork although every care had been taken to protect it. There was a fair amount of cloud in the mornings, but the afternoons and nights were clear in the majority of cases. Mt. Meruoca, 2,700 feet high, about 6 miles to the N.W., was a collector of cloud, its summit being frequently veiled in mist. In spite of its cooler climate, the summit would thus not have been a suitable eclipse station, and, in fact, nothing of the total phase of the eclipse was seen from it.

12. Although water was generally scarce, we were very fortunately situated as we enjoyed an unlimited supply of good water laid on at the house. This was of great benefit in the photographic operations. Ice was unobtainable, but by the use of earthenware water-coolers it was possible to reduce the temperature to about 75° and by working (p. 299) only at night or before dawn development of the plates was fairly easy. Formalin was used in every case to harden the films, and thereby minimize the chance of distortion due to the softening of the films by the warm solutions.

We had provided ourselves with two brands of plates, but it had become apparent from photographs taken and developed before the eclipse that one of these brands was unsuitable in the hot climate, and it was decided to use practically only one brand of plates.

In taking the experimental photographs it was noticed that the clocks and cœlostats were very sensitive to wind. We had reason to fear strong gusts about the time of totality, such as had occurred in other eclipses; and as the conditions of our locality seemed to render them specially probable, protective wind screens were erected round the hut openings at every point where it was possible without interfering with the field of view. Happily, dead calm prevailed at the critical time. Screens also protected all projecting parts of the telescope tubes from direct sunlight.

The performance of the 16-inch cœlostat was unsatisfactory in respect of driving. There was a clearly marked oscillation of the images on the screen in- a, period of about 30 seconds. For this reason, exposure time was shortened, so as to multiply the number of exposures in the hope that some would be near the stationary points.

13. The morning of the eclipse day was rather more cloudy than the average, and the proportion of cloud was estimated at  $\frac{9}{10}$  at the time of first contact, when the sun was invisible; it appeared a

few seconds later showing a very small encroachment of the moon, and there were various short intervals of sunshine during the partial phase which enabled us to place the sun's image at its assigned position on the ground glass, and to give a final adjustment to the rates of the driving clocks. As totality approached, the proportion of cloud diminished, and a large clear space reached the sun about one minute before second contact. Warnings were given 58s., 22s. and 12s. before second contact by observing the length of the disappearing crescent on the ground glass. When the crescent disappeared the word "go" was called and a metronome was started by Dr. LEOCADIO, who called out every tenth beat during totality, and the exposure times were recorded in terms of these beats. It beat 320 times in 310 seconds; allowance has been made for this rate in the recorded times. The programme arranged was carried out successfully, 19 plates being exposed in the astrographic telescope with alternate exposures of 5 and 10 seconds, and eight in the 4-inch camera with a uniform exposure of 28 seconds. The region round the sun was free from cloud, except for an interval of about a minute near the middle of totality when it was veiled by thin cloud, which prevented the photography of stars, though the inner corona remained visible to the eye and the plates exposed at this time show it and the large prominence excellently defined. The plates remained in their holders until development, which was carried out in convenient batches during the night hours of the following days, being completed by June 5.

14. No observation of contact times was made, but it is known that these times were (p. 300) somewhat before those calculated. As the times recorded were reckoned from second contact, it is assumed that this occurred May 28, 23h. 58m. 18s. G.M.T.

The details of the exposures are given in the following tables:

Exposures with the 13-inch Astrographic Telescope stopped to 8 inches.

Ref. No.	G.M.T. at Commencement of Exposure.				Exposure.	Plate.	Ref. No.	G.M.T. at Commencement of Exposure.				Exposure.	Plate.
	d.	h.	m.	s.				d.	h.	m.	s.		
1	28	23	58	23	5	O.	11	29	0	1	7	5	S.R.
2				37	10	E.	12				22	10	E.
3				57	5	E.	13				36	5	E.
4			59	11	10	S.	14				51	10	S.R.
5				30	5	S.R.	15		2	10		5	S.R.
6				45	10	S.R.	16				25	10	S.R.
7	29	0	0	4	5	S.R.	17				44	5	E.
8				19	10	E.	18				58	10	E.
9				39	5	E.	19		3	18		5	O.
10				53	10	S.R.							

EXPOSURES with the 4-inch Telescope.

Ref. No.	G.M.T. at Commencement of Exposure.				Exposure.	Plate.	Ref. No.	G.M.T. at Commencement of Exposure.				Exposure.	Plate.
	d.	h.	m.	s.				d.	h.	m.	s.		
1	28	23	58	21	28	S.R.	5	29	0	0	56	28	S.R.
2			59	0	28	S.R.	6			1	34	28	S.R.
3				38	28	S.R.	7			2	13	28	S.R.
4	29	0	0	17	28	S.R.	8				52	28	S.R.

In the fourth column the letter O stands for Imperial Ordinary.

E “ “ Empress.

S “ “ Sovereign.

SR “ “ Ilford Special Rapid.

With the astrographic telescope 12 stars are shown on a number of plates, and seven stars on all but three (Nos. 13, 14 and 19). Of the eight plates taken with the 4-inch lens, seven show seven stars, but No. 6, which was taken through cloud, does not show any.

The following table of temperatures, communicated by Dr. MORIZE, and converted into the Fahrenheit scale, shows how slight the fall was during totality, probably owing to the large amount of cloud in the earlier stages which checked the usual daily rise. (p. 301)

G.M.T.			Ther.	G.M.T.			Ther.	G.M.T.			Ther.	G.M.T.			Ther.
d.	h.	m.	°	d.	h.	m.	°	d.	h.	m.	°	d.	h.	m.	°
28	22	45	82·4	28	23	30	80·6	29	0	15	82·0	29	1	0	83·8
	23	0	84·2			45	82·4			30	82·4			15	84·2
		15	82·4	29	0	0	80·6			45	83·1			30	84·2

15. On June 7 having completed the development, we left Sobral for Fortaleza, returning on July 9 for the purpose of securing comparison plates of the eclipse field.

Before our departure we dismantled the mirrors and driving clocks which were brought into the house to avoid the exposure to dust. The telescopes and cœlostats were left in situ. Before removing the mirrors. we marked their positions in their cells so that they could be replaced in exactly the same position.

After our return to Sobral the mirrors and clocks were remounted; the photography of the eclipse field was commenced on the morning of July 11 (civil). The difficulty of finding the field with the cœlostats was overcome by making a rough hour circle on the heads of the cœlostats out of millimetre paper.

The following is the list of exposures made on the field for comparison with the eclipse photographs:—

Astrographic Telescope.						4-inch Telescope.					
Ref. No.	Date.	G.M.T.	No. of exposures.	Duration.	Altitude.	Ref. No.	Date.	G.M.T.	No. of exposures.	Duration.	Altitude.
		h. m.		s.	°			h. m.		s.	°
11 <sub>1</sub>	July 10	20 5	3	5	28·9						
11 <sub>2</sub>		20 16	2	5	31·1						
11 <sub>3</sub>		20 21	1	5	32·2	14 <sub>1</sub>	July 13	20 7	2	25	32·4
14 <sub>1</sub>	July 13	20 13	3	5	33·7	14 <sub>2</sub>		20 16	2	20	34·3
14 <sub>2</sub>		20 17	2	5	34·5						
14 <sub>3</sub>		20 19	2	5	34·9	15 <sub>1</sub>	July 14	20 17	2	20	35·4
15 <sub>1</sub>	July 14	20 15	3	5	34·9	15 <sub>2</sub>		20 22	2	20	36·4
15 <sub>2</sub>		20 20	2	5	36·1						
15 <sub>3</sub>		20 23	2	5	36·6	17 <sub>1</sub>	July 16	20 6	3	15	34·7
17 <sub>1</sub>	July 16	20 2	4	3	33·8	17 <sub>2</sub>		20 24	2	15	38·6
17 <sub>2</sub>		20 15	3	3	36·6						
17 <sub>3</sub>		20 23	2	3	38·3						
17 <sub>4</sub>		20 25	2	5	38·8	18 <sub>1</sub> *	July 17	19 57	3	20	33·6
18 <sub>1</sub>	July 17	19 50	3	4	32·8	18 <sub>2</sub>		20 24	2	20	39·2
18 <sub>2</sub>		20 1	2	4	34·4						
18 <sub>3</sub>		20 20	3	4	38·6						
18 <sub>4</sub>		20 25	2	3	39·5						

The reference numbers follow the civil dates.

\*The 4-inch plate, No. 18<sub>1</sub>, was taken through the glass (see § 17 *infra*) to facilitate the measurement, and is referred to as the scale plate.

(p. 302) Thermometer readings, July 10, 74°·4; July 13, 73°·7; July 14, 71°·9; July 16, 72°·3; July 17, 72°·3·2

By July 18 we had obtained a sufficient number of reference photographs. Dismantling of the instruments was commenced, and the packing was completed on July 21. We left Sobral on July 22, leaving the packing cases in the hands of Messrs. NICOLAU and CARNEIRO to be forwarded at the earliest opportunity, and arrived at Greenwich on August 25.

The observers wish to record their obligations to Mr. CHARLES BOOTH and the officers of the "Booth " Line for facilitating their journeys to and from their station at a difficult time.

#### PHOTOGRAPHS TAKEN WITH THE 4-INCH OBJECT GLASS.

16. These photographs were taken on 10 × 8-inch plates. By suitably mounting the camera it was made possible to obtain seven stars on the photographs, viz., Nos. 2, 3, 4, 5, 6, 10 and 11 of the table in §5. Of the eight photographs taken during the eclipse seven gave measurable images of these stars, the other plate (No. 6) taken through cloud only showing a picture of the prominences.

Plates of the same field taken under nearly similar conditions as regards altitude were taken on July 14, 15, 17 and 18 (civil date). Of these photographs, the second taken on July 14 with two exposures (referred to as 14<sub>2a</sub> and 14<sub>2b</sub>), two photographs taken on July 15 (referred to as 15<sub>1</sub>, and 15<sub>2</sub>), two on July 17 (17<sub>1</sub>, and 17<sub>2</sub>), and the second photograph on July 18 (18<sub>2</sub>) were measured for comparison with the eclipse plates.

17. The micrometer at the Royal Observatory is not suitable for the direct comparison of plates of this size. It was therefore decided to measure each plate by placing, film to film upon it, another photograph of the same region reversed by being taken through the glass. A photograph for this purpose was taken on July 18. This plate is regarded merely as an intermediary between the eclipse plates and comparison plates and is referred to as the scale plate, being used simply as a scale providing points of reference. In all cases measurement was made through the glass of the scale plate, adjusted on the eclipse or comparison plate which was being measured, so that the separation of the images on the two plates did not exceed one-third of a millimetre. The plates were held together by clips which ensured contact over the whole surface. This method of measurement was found to be very convenient. Each plate was measured in two positions, being reversed through 180 degrees and the accordance of the result showed that the method of measurement was entirely satisfactory.

The measures, both direct and reversed, were made by two measurers (Mr. DAVIDSON and Mr. FURNER), and the means taken. There was no sensible difference between the measurers, which is satisfactory, as it affords evidence of the similarity of the images on the eclipse and comparison and scale plates.

The value of the micrometer screws (both in R.A. and Decl.) is 6''·25.

18. The results of the measures are as follows: (p. 303)

TABLE II.—Eclipse Plates—Scale.

No. of Star.	I.		II.		III.		IV.		V.		VII.		VIII.	
	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.
11	-1.411	-0.354	-1.416	-1.324	+0.592	+0.956	+0.563	+1.236	+0.406	+0.970	-1.466	+0.964	-1.286	-1.146
5	-1.045	-0.328	-1.221	-1.312	+0.736	+0.843	+0.683	+1.226	+0.468	+0.861	-1.267	+0.777	-1.152	-1.322
4	-1.216	+0.114	-1.054	-0.944	+0.979	+1.172	+0.849	+1.524	+0.721	+1.167	-1.028	+1.142	-0.927	-0.930
3	-1.237	+0.150	-1.079	-0.862	+0.968	+1.244	+0.861	+1.637	+0.733	+1.254	-1.010	+1.186	-0.897	-0.894
6	-1.342	+0.124	-1.012	-0.932	+1.062	+1.197	+0.894	+1.564	+0.766	+1.150	-0.888	+1.125	-0.838	-0.927
10	-1.227	+0.205	-0.997	-0.943	+1.157	+1.211	+0.934	+1.522	+0.864	+1.119	-0.820	+1.072	-0.768	-0.944
2	-0.789	+0.100	-0.733	-1.019	+1.256	+0.924	+1.177	+1.373	+0.905	+0.935	-0.763	+0.892	-0.686	-1.146
	-1.807*	-0.534	-1.509	-1.324	+0.590	+0.843	+0.590	+1.226	+0.400	+0.861	-1.500	+0.777	-1.300	-1.322

COMPARISON PLATES—SCALE.

No. of Star.	14 <sub>g</sub> .		15 <sub>g</sub> .		15 <sub>g</sub> .		15 <sub>g</sub> .		16 <sub>g</sub> .					
	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.	Dz.	Dy.				
11	-0.478	-0.109	+0.967	+1.170	+1.095	+1.298	+0.725	+0.830	-1.073	-1.330	+1.242	-0.362	-1.186	-1.572
5	-0.544	-0.204	+1.013	+1.192	+0.897	+1.292	+0.692	+0.838	-1.072	-1.075	+1.161	-0.284	-1.195	-1.432
4	-0.528	-0.136	+1.020	+1.249	+1.133	+1.080	+0.726	+0.854	-1.296	-1.031	+1.354	-0.281	-1.162	-1.454
3	-0.399	-0.073	+1.041	+1.306	+1.164	+1.114	+0.732	+0.893	-1.278	-1.014	+1.242	-0.261	-1.178	-1.504
6	-0.317	-0.144	+0.960	+1.319	+1.244	+1.012	+0.714	+0.894	-1.379	-1.092	+1.363	-0.390	-1.145	-1.473
10	-0.272	-0.146	+0.967	+1.257	+1.269	+0.900	+0.722	+0.831	-1.424	-1.038	+1.370	-0.423	-1.164	-1.476
2	-0.396	-0.182	+1.102	+1.289	+0.969	+1.052	+0.734	+0.841	-1.233	-0.909	+1.273	-0.323	-1.164	-1.535
	-0.552*	-0.204	+0.967	+1.170	+0.899	+0.900	+0.690	+0.894	-1.424	-1.330	+1.161	-0.423	-1.146	-1.572

\* The numbers -1.530, -0.554, &c., given below the line, were taken out to make the values of Dz, Dy small and positive for arithmetical convenience.

(p. 304) 19. The values of  $D_x$  and  $D_y$  were equated to expressions of the form

$$ax + by + c + aE_x (= D_x)$$

and

$$dx + ey + f + aE_y (= D_y),$$

where  $x, y$  are the co-ordinates of the stars given in Table I., and  $E_x, E_y$ , are coefficients of the gravitational displacement.

The quantities  $c$  and  $f$  are corrections to zero, depending on the setting of the scale plate on the plate measured,  $a$  and  $e$  are differences of scale value, while  $b$  and  $d$  depend mainly on the orientation of the two plates. The quantity  $a$  denotes the deflection at unit distance (*i.e.*, 50' from the sun's centre), so that  $aE_x$  and  $aE_y$  are the deflection in R.A. and Decl. respectively of a star whose co-ordinates are  $x$  and  $y$ .

The left-hand sides of the equation for the seven stars shown are:—

No.	Right Ascension.	Declination.
11	$c - 0.160b - 1.261a - 0.587\alpha$	$f - 1.261d - 0.160e + 0.036\alpha$
5	$c - 1.107b - 0.160a - 0.557\alpha$	$f - 0.160d - 1.107e - 0.789\alpha$
4	$c + 0.472b + 0.334a - 0.186\alpha$	$f + 0.334d + 0.472e + 1.336\alpha$
3	$c + 0.360b + 0.348a - 0.222\alpha$	$f + 0.348d + 0.360e + 1.574\alpha$
6	$c + 1.099b + 0.587a + 0.080\alpha$	$f + 0.587d + 1.099e + 0.726\alpha$
10	$c + 1.321b + 0.860a + 0.158\alpha$	$f + 0.860d + 1.321e + 0.589\alpha$
2	$c - 0.328b + 1.079a + 1.540\alpha$	$f + 1.079d - 0.328e - 0.156\alpha$

20. Normal equations formed from these equations of condition are as follows

TABLE III.-Eclipse Plates — Right Ascension.



				I.	II.	III.	IV.	V.	VII.	VIII.
+7.000c	+1.657b	+1.787a	+0.226z	= +2.159	+2.986	+3.250	+2.461	+2.185	+3.263	+2.648
	+4.664	+2.089	+0.335	= -0.063	+0.986	+1.320	+0.866	+1.051	+1.464	+1.130
		+4.094	+2.534	= +1.034	+1.689	+1.866	+1.469	+1.480	+1.972	+1.723
			+3.142	= +0.712	+0.919	+0.924	+0.860	+0.844	+0.930	+0.973
+4.271b	+1.666a	+0.281z		= -0.575	+0.278	+0.550	+0.283	+0.533	+0.691	+0.502
	+3.683	+2.476		= +0.483	+0.928	+1.037	+0.841	+0.923	+1.140	+1.048
		+3.135		= +0.643	+0.823	+0.820	+0.781	+0.774	+0.826	+0.888
+2.988a	+2.366z			= +0.707	+0.820	+0.822	+0.731	+0.715	+0.871	+0.852
	+3.116			= +0.681	+0.805	+0.784	+0.762	+0.739	+0.780	+0.855
		+1.242z		= +0.121	+0.156	+0.133	+0.183	+0.173	+0.090	+0.180
				$\alpha$ = +0.098	+0.126	+0.107	+0.148	+0.140	+0.073	+0.145
				$a$ = +0.158	+0.174	+0.189	+0.127	+0.128	+0.233	+0.169
				$b$ = -0.203	-0.011	+0.048	+0.007	+0.042	+0.066	+0.042

(p. 305) TABLE IV.-Comparison Plates — Right Ascension.

				14 <sub>2a</sub> .	14 <sub>2b</sub> .	15 <sub>1</sub> .	15 <sub>2</sub> .	17 <sub>1</sub> .	17 <sub>2</sub> .	18 <sub>2</sub> .
+7.000c	+1.657b	+1.787a	+0.226z	= +1.190	+0.364	+1.463	+0.214	+1.214	+0.983	+0.146
	+4.664	+2.089	+0.335	= +0.700	+0.017	+0.992	+0.078	-0.340	+0.603	+0.083
		+4.094	+2.535	= +0.638	+0.220	+0.499	+0.073	-0.172	+0.450	+0.085
			+3.142	= +0.253	+0.159	-0.029	+0.037	-0.164	+0.105	+0.041
+4.271b	+1.666a	+0.281z		= +0.418	-0.069	+0.645	+0.027	-0.627	+0.370	+0.048
	+3.683	+2.476		= +0.334	+0.127	+0.126	+0.018	-0.481	+0.199	+0.048
		+3.135		= +0.215	+0.147	-0.076	+0.030	-0.203	+0.074	+0.036
+2.988a	+2.366z			= +0.172	+0.154	-0.126	+0.007	-0.236	+0.055	+0.029
	+3.116			= +0.188	+0.152	-0.119	+0.028	-0.162	+0.050	+0.033
		+1.242z		= +0.052	+0.030	-0.019	+0.022	+0.025	+0.006	+0.010
				$\alpha$ = +0.042	+0.024	-0.015	+0.018	+0.020	+0.005	+0.008
				$a$ = +0.024	+0.032	-0.030	-0.012	-0.094	+0.014	+0.003
				$b$ = +0.086	-0.030	+0.164	+0.012	-0.111	+0.081	+0.010

TABLE V.-Eclipse Plates—Declination.

$+7\cdot000f$	$+1\cdot787d$	$+1\cdot657e$	$+3\cdot316\alpha$	$=$	$+3\cdot688$	$+1\cdot927$	$+1\cdot646$	$+1\cdot452$	$+1\cdot389$	$+1\cdot718$	$+1\cdot906$
	$+4\cdot094$	$+2\cdot089$	$+1\cdot840$	$=$	$+2\cdot200$	$+1\cdot168$	$+0\cdot719$	$+0\cdot823$	$+0\cdot555$	$+0\cdot610$	$+0\cdot840$
		$+4\cdot664$	$+3\cdot694$	$=$	$+1\cdot860$	$+1\cdot159$	$+1\cdot129$	$+0\cdot984$	$+0\cdot874$	$+1\cdot023$	$+1\cdot193$
			$+5\cdot784$	$=$	$+2\cdot657$	$+1\cdot681$	$+1\cdot535$	$+1\cdot361$	$+1\cdot335$	$+1\cdot545$	$+1\cdot707$
$+3\cdot638d$	$+1\cdot666e$	$+0\cdot994\alpha$	$=$	$+1\cdot260$	$+0\cdot677$	$+0\cdot299$	$+0\cdot453$	$+0\cdot201$	$+0\cdot172$	$+0\cdot354$	
	$+4\cdot271$	$+2\cdot908$	$=$	$+0\cdot986$	$+0\cdot702$	$+0\cdot739$	$+0\cdot640$	$+0\cdot545$	$+0\cdot616$	$+0\cdot741$	
		$+4\cdot212$	$=$	$+0\cdot909$	$+0\cdot768$	$+0\cdot755$	$+0\cdot673$	$+0\cdot677$	$+0\cdot731$	$+0\cdot804$	
	$+3\cdot508e$	$+2\cdot453\alpha$	$=$	$+0\cdot409$	$+0\cdot392$	$+0\cdot602$	$+0\cdot431$	$+0\cdot453$	$+0\cdot537$	$+0\cdot579$	
		$+3\cdot941$	$=$	$+0\cdot565$	$+0\cdot583$	$+0\cdot673$	$+0\cdot549$	$+0\cdot622$	$+0\cdot684$	$+0\cdot707$	
		$+2\cdot224\alpha$	$=$	$+0\cdot279$	$+0\cdot309$	$+0\cdot252$	$+0\cdot247$	$+0\cdot305$	$+0\cdot308$	$+0\cdot302$	
			$\alpha$	$=$	$+0\cdot126$	$+0\cdot139$	$+0\cdot114$	$+0\cdot111$	$+0\cdot137$	$+0\cdot139$	$+0\cdot136$
			$e$	$=$	$+0\cdot029$	$+0\cdot015$	$+0\cdot092$	$+0\cdot045$	$+0\cdot033$	$+0\cdot056$	$+0\cdot070$
			$d$	$=$	$+0\cdot299$	$+0\cdot141$	$+0\cdot009$	$+0\cdot074$	$+0\cdot003$	$-0\cdot016$	$+0\cdot028$

TABLE VI.— Comparison Plates — Declination.

$+7\cdot000f$	$+1\cdot787d$	$+1\cdot657e$	$+3\cdot316\alpha$	$=$	$+0\cdot446$	$+0\cdot661$	$+0\cdot964$	$+0\cdot343$	$+1\cdot861$	$+0\cdot752$	$+0\cdot868$
	$+4\cdot094$	$+2\cdot089$	$+1\cdot840$	$=$	$+0\cdot060$	$+0\cdot420$	$-0\cdot156$	$+0\cdot140$	$+1\cdot038$	$+0\cdot041$	$+0\cdot476$
		$+4\cdot664$	$+3\cdot694$	$=$	$+0\cdot202$	$+0\cdot394$	$-0\cdot203$	$-0\cdot117$	$+0\cdot526$	$-0\cdot110$	$+0\cdot122$
			$+5\cdot784$	$=$	$+0\cdot380$	$+0\cdot482$	$+0\cdot220$	$+0\cdot044$	$+1\cdot004$	$+0\cdot296$	$+0\cdot419$
$+3\cdot638d$	$+1\cdot666e$	$+0\cdot994\alpha$	$=$	$-0\cdot054$	$+0\cdot251$	$-0\cdot402$	$+0\cdot053$	$+0\cdot563$	$+0\cdot151$	$+0\cdot255$	
	$+4\cdot271$	$+2\cdot908$	$=$	$+0\cdot096$	$+0\cdot237$	$-0\cdot431$	$-0\cdot198$	$+0\cdot085$	$-0\cdot288$	$-0\cdot084$	
		$+4\cdot212$	$=$	$+0\cdot168$	$+0\cdot169$	$-0\cdot237$	$-0\cdot119$	$+0\cdot122$	$-0\cdot060$	$+0\cdot008$	
	$+3\cdot508e$	$+2\cdot453\alpha$	$=$	$+0\cdot121$	$+0\cdot122$	$-0\cdot247$	$-0\cdot222$	$-0\cdot173$	$-0\cdot219$	$-0\cdot201$	
		$+3\cdot941$	$=$	$+0\cdot183$	$+0\cdot100$	$-0\cdot127$	$-0\cdot133$	$-0\cdot032$	$-0\cdot019$	$-0\cdot062$	
		$+2\cdot224\alpha$	$=$	$+0\cdot098$	$+0\cdot015$	$+0\cdot046$	$+0\cdot022$	$+0\cdot089$	$+0\cdot134$	$+0\cdot079$	
			$\alpha$	$=$	$+0\cdot044$	$+0\cdot007$	$+0\cdot021$	$+0\cdot010$	$+0\cdot040$	$+0\cdot060$	$+0\cdot036$
			$e$	$=$	$+0\cdot004$	$+0\cdot030$	$-0\cdot085$	$-0\cdot070$	$-0\cdot077$	$-0\cdot104$	$-0\cdot082$
			$d$	$=$	$-0\cdot028$	$+0\cdot054$	$-0\cdot077$	$+0\cdot044$	$+0\cdot179$	$-0\cdot010$	$+0\cdot098$

(p. 306) 21. The values of  $a$  are collected in Table VII

TABLE VII.

Right Ascension.		Declination.	
Eclipse— Scale.	Comparison— Scale.	Eclipse— Scale.	Comparison— Scale.
<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
+0·098	+0·042	+0·126	+0·044
+0·126	+0·024	+0·139	+0·007
+0·107	-0·015	+0·114	+0·021
+0·148	+0·018	+0·111	+0·010
+0·140	+0·020	+0·137	+0·040
+0·073	+0·005	+0·139	+0·060
+0·145	+0·008	+0·136	+0·036
Mean +0·120	+0·015	+0·129	+0·031

By subtracting the  $\alpha$  of the comparison plates the scale plate is eliminated, and we derive from right ascensions  $\alpha = +0^{\prime}\cdot105$  and from declinations  $\alpha = +0^{\prime}\cdot098$ .

Reference to the normal equations shows that the declination result is of double the weight of that from the right ascensions.

Thus

$$\alpha = +0^{\prime}\cdot100 = +0^{\prime\prime}\cdot625.$$

This is at a distance 50' from the sun's centre. At the time of the eclipse the sun's radius was 15'·8; thus the deflection at the limb is 1''·98.

The range in the values of  $\alpha$  is attributable to the errors inherent to the star images of the different plates, and cannot be reduced by further measurement. The mean values +0'·015 and 0'·031 arise from the errors in the intermediary scale plate.

22. The probable error of the result judging from the accordance of the separate determinations is about 6 per cent. It is desirable to consider carefully the possibility of systematic error. The eclipse and comparison photographs were taken under precisely similar instrumental conditions, but there is the difference that the eclipse photographs were taken on the day of May 29, and the comparison photographs on nights between July 14 and July 18. A very satisfactory feature of the photographs is the essential similarity of the star images on the two sets of photographs.

The satisfactory accordance of the eclipse and comparison plates is shown by a study of the plate constants. The following corrections for differential refraction and aberration are calculated from the times and dates of exposure. (p. 307)

	<i>a.</i>	<i>e.</i>	<i>b.</i>	<i>d.</i>
	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
Eclipse plates . . . . .	+0.240	+0.168	+0.062	+0.062
Scale plate . . . . .	+0.423	+0.207	+0.096	+0.096
Comparison 14 <sub>2a</sub> . . . . .	+0.409	+0.207	+0.091	+0.091
„ 14 <sub>2b</sub> . . . . .	+0.409	+0.207	+0.091	+0.091
„ 15 <sub>1</sub> . . . . .	+0.390	+0.207	+0.087	+0.087
„ 15 <sub>2</sub> . . . . .	+0.370	+0.202	+0.087	+0.087
„ 17 <sub>1</sub> . . . . .	+0.399	+0.207	+0.091	+0.091
„ 17 <sub>2</sub> . . . . .	+0.337	+0.202	+0.077	+0.077
„ 18 <sub>2</sub> . . . . .	+0.327	+0.202	+0.072	+0.072

When these are applied to the values of the constants found from the normal equations, we find the following values of the scale of the several photographs and their orientation relative to the scale plate:—

	Scale Value.		Orientation.		Adopted Scale Orientation.	
	From <i>x</i> .	From <i>y</i> .	From <i>x</i> .	From <i>y</i> .		
	<i>r</i>	<i>r</i>				<i>r</i>
Eclipse I. . . . .	-0.025	-0.010	-0.237	-0.265	0.000	-0.251
„ II. . . . .	-0.009	-0.024	-0.045	-0.107	0.000	-0.076
„ III. . . . .	+0.006	+0.053	+0.014	+0.025	0.000	+0.020
„ IV. . . . .	-0.056	+0.006	-0.027	-0.040	0.000	-0.034
„ V. . . . .	-0.055	-0.006	+0.008	+0.031	0.000	+0.020
„ VII. . . . .	+0.050	+0.017	+0.032	+0.050	0.000	+0.041
„ VIII. . . . .	-0.014	+0.031	+0.008	+0.006	0.000	+0.007
Comparison 14 <sub>2a</sub> . . . . .	+0.010	+0.004	+0.081	+0.033	+0.013	+0.057
„ 14 <sub>2b</sub> . . . . .	+0.008	+0.030	-0.035	-0.049	+0.013	-0.042
„ 15 <sub>1</sub> . . . . .	-0.063	-0.085	+0.155	+0.086	-0.084	+0.120
„ 15 <sub>2</sub> . . . . .	-0.065	-0.075	+0.003	-0.035	-0.084	-0.016
„ 17 <sub>1</sub> . . . . .	-0.118	-0.077	-0.116	-0.174	-0.084	-0.145
„ 17 <sub>2</sub> . . . . .	-0.072	-0.109	+0.062	+0.029	-0.084	+0.046
„ 18 <sub>2</sub> . . . . .	-0.093	-0.087	-0.014	-0.074	-0.084	-0.044

The agreement in the scale values obtained from *x* and *y* is satisfactory. There appears to be a small difference in the orientations as derived from the two directions in the comparison plates. This

is, however, of small importance in the determination of  $\alpha$ . There is a difference of scale value from July 15-18 shown in both co-ordinates. For the purpose of exhibiting the gravitational displacements, residuals have been computed using adopted values for the scale and orientation given above, along with the calculated corrections for differential refraction and aberration. This has the advantage of reducing the number of constants employed in the reduction of the plates, and lessens the possibility of masking any discordances, though greater irregularities necessarily appear when four arbitrary constants instead of six are used in the reduction (p. 308) of each plate. The quantities are converted from revolutions to seconds of arc, as the more familiar unit facilitates judgment of the results.

TABLE VIII.-Comparison of the Eclipse and Comparison Photographs with the Scale Plate, after Correction for Differential Refraction and Aberration, Orientation and Change of Scale.

No. of Star.	I.	II.	III.	IV.	V.	VII.	VIII.	Mean.
ECLIPSE Plates—Right Ascension.								
11	-0.18	-0.51	-0.46	-0.07	-0.04	-0.72	-0.43	-0.34
5	-0.45	-0.81	-0.38	-0.58	-0.60	-0.36	-0.62	-0.54
4	+0.08	+0.11	-0.08	-0.11	-0.11	-0.16	-0.18	-0.06
3	-0.23	-0.11	-0.19	-0.05	-0.02	-0.02	-0.01	-0.09
6	-0.14	+0.23	-0.09	-0.11	-0.13	+0.13	-0.08	-0.03
10	+0.17	+0.06	+0.14	-0.18	-0.11	+0.14	-0.01	+0.03
2	+0.75	+1.03	+1.06	+1.09	+1.01	+0.98	+1.30	+1.03
ECLIPSE PLATES—Declination.								
11	0.00	-0.08	-0.03	+0.02	+0.17	+0.16	+0.01	+0.03
5	-0.38	-0.54	-0.61	-0.30	-0.39	-0.73	-0.81	-0.54
4	+1.19	+1.04	+1.03	+0.98	+1.11	+1.19	+1.24	+1.11
3	+1.42	+1.58	+1.50	+1.39	+1.55	+1.49	+1.49	+1.49
6	+0.65	+0.79	+1.01	+0.97	+0.71	+0.95	+1.01	+0.87
10	+0.62	+0.46	+1.03	+0.54	+0.56	+0.58	+0.74	+0.65
2	+0.01	+0.25	-0.40	-0.09	-0.22	-0.14	-0.17	-0.11
COMPARISON Plates—Right Ascension.								
11	-0.19	-0.24	-0.23	-0.28	+0.11	-0.19	-0.02	-0.15
5	-0.42	+0.16	-0.36	-0.32	-0.24	-0.33	-0.26	-0.25
4	-0.01	+0.03	-0.01	+0.05	-0.04	+0.23	+0.08	+0.05
3	+0.14	+0.09	+0.28	+0.10	-0.03	+0.21	-0.01	+0.11
6	+0.02	-0.18	+0.26	+0.06	+0.13	+0.03	+0.14	+0.07
10	+0.17	-0.06	+0.20	+0.18	+0.13	-0.02	+0.15	+0.11
2	+0.31	+0.18	-0.16	+0.22	-0.04	+0.08	-0.06	+0.08
COMPARISON Plates—Declination.								
11	-0.07	+0.08	-0.26	-0.04	-0.26	-0.18	-0.16	-0.13
5	-0.23	-0.03	+0.03	0.00	-0.19	+0.03	-0.20	-0.08
4	+0.23	+0.05	+0.29	+0.18	+0.45	+0.53	+0.23	+0.28
3	+0.64	+0.41	+0.42	+0.36	+0.48	+0.60	+0.54	+0.49
6	+0.22	+0.36	+0.33	+0.26	+0.41	+0.21	+0.32	+0.30
10	+0.28	+0.32	+0.31	+0.36	+0.36	+0.15	+0.29	+0.30
2	+0.25	+0.14	+0.18	+0.21	+0.09	-0.03	+0.27	+0.16

Subtracting the results of the comparison plates, so as to eliminate the errors arising from the intermediary scale plate we find for the displacements of the different stars, as compared with those as given by EINSTEIN'S Theory, with value  $1''.75$  at the sun's limb

No. of Star.	Displacement in Right Ascension.		Displacement in Declination.	
	Observed.	Calculated	Observed.	Calculated.
	"	"	"	"
11	-0.19	-0.32	+0.16	+0.02
5	-0.29	-0.31	-0.46	-0.43
4	-0.11	-0.10	+0.83	+0.74
3	-0.20	-0.12	+1.00	+0.87
6	+0.10	+0.04	+0.57	+0.40
10	-0.08	+0.09	+0.35	+0.32
2	+0.95	+0.85	-0.27	-0.09

### PHOTOGRAPHS TAKEN WITH THE ASTROGRAPHIC OBJECT GLASS

23. As stated above these photographs were taken with the astrographic object glass stopped down to 8 inches, mounted in a steel tube and fed by a 16-inch cœlost. From many years' experience with the object glass at Greenwich it is certain that, when the object glass is mounted in a steel tube, the change of scale over a range of temperature of 10°F. should be insignificant, and the definition should be very good. It was realized that this high standard would not be obtained with the glass used in conjunction with the cœlost taken to Brazil, but nevertheless the results shown when the plates were developed were very disappointing. The images were diffused and apparently out of focus, although on the night of May 27 the focus was good\*. Worse still, this change was temporary, for without any change in the adjustments, the instrument had returned to focus when the comparison plates were taken in July.

These changes must be attributed to the effect of the sun's heat on the mirror, but it is difficult to say whether this caused a real change of scale in the resulting photographs or merely blurred the images.

The photographs were measured in the astrographic duplex micrometer, the eclipse photographs being directly compared with the comparison plates taken in July. All (p. 310) the stars shown were measured. They were reduced by the same method as that employed for the "4-inch" photographs. With the exception of plates Nos. 15 and 16, taken through clouds, the stars numbered 3, 4, 5, 6, 10,

---

\*\*\* The following note made at the time is quoted in full:- "May 30, 3 a.m., four of the astrographic plates were developed, and when dry examined. It was found that there had been a serious change of focus, so that, while the stars were shown, the definition was spoilt. This change of focus can only be attributed to the unequal expansion of the mirror through the sun's heat. The readings of the focussing scale were checked next day, but were found unaltered at 1 0d min. It seems doubtful whether much can be got from these plates".

11 and 12 are shown on all the plates; the fainter stars 2, 7, 8 and 9 are sometimes shown, but No. 1, which is very near the sun, is always drowned in the corona. These plates were only measured in declination, as the right ascensions were of little weight.

24. In the following table is given the value of  $a$ , the constant of the gravitational displacement, as calculated from the measures; the apparent difference of scale  $e$  between the eclipse and comparison plates;  $d$  the difference of orientation of the plates given by the measures of  $y$ , and depending on the adjustment of the plates in the measuring machine.

TABLE IX.

( $1'' = 12'' \cdot 3$ ).

No. of Eclipse Plate.	Ref. No. of Comparison Plate.	No. of Stars.	Values of $d, e, \alpha$ in Revolutions at 50' Distance.			$\alpha$ at Sun's Limb in Arc.
			$d.$	$e.$	$\alpha.$	
1	18 <sub>4</sub>	7	$r$ +0.051	$r$ +0.089	$r$ +0.033	$a$ +1.28
2	18 <sub>4</sub>	11	-0.009	+0.059	+0.025	+0.97
3	18 <sub>4</sub>	8	-0.074	+0.101	+0.028	+1.09
4	18 <sub>4</sub>	11	-0.168	+0.091	+0.033	+1.28
5	11 <sub>3</sub>	10	+0.094	+0.076	+0.025	+0.97
6	11 <sub>3</sub>	11	+0.186	+0.082	+0.021	+0.82
7	14 <sub>3</sub>	12	+0.006	+0.119	0.000	0.00
	18 <sub>3</sub>	7	-0.054	+0.166	0.000	0.00
8	14 <sub>3</sub>	10	+0.093	+0.064	+0.021	+0.82
9	17 <sub>4</sub>	7	-0.096	+0.129	+0.008	+0.31
10	17 <sub>4</sub>	10	+0.090	+0.045	+0.026	+1.01
11	11 <sub>1</sub>	10	+0.073	+0.061	+0.032	+1.24
12	11 <sub>1</sub>	11	-0.009	+0.102	+0.049	+1.91
	17 <sub>2</sub>	7	-0.102	+0.114	+0.019	+0.74
15	15 <sub>3</sub>	6	+0.111	+0.036	+0.018	+0.70
16	15 <sub>3</sub>	7	-0.002	+0.037	+0.018	+0.70
17	17 <sub>2</sub>	8	-0.022	+0.109	+0.012	+0.47
18	17 <sub>2</sub>	7	+0.045	0.000	+0.030	+1.17
Mean . . . . .				+0.082	+0.022	+0.86

Thus the mean value of  $a$  obtained from all the astrographic plates is  $0'' \cdot 86$ , a figure considerably less than that obtained from the 4-inch photographs.

25. Reference to the diagram shows that the measurement of displacement depends essentially on the position of the stars Nos. 3 and 4 relative to 5 on one side and 6 and 10 on the other. These are



all bright stars, and in this respect their images are (p. 311) more comparable than are the images of the fainter stars. The measures of these stars are given in the following table: —

No. of Eclipse Plate.	Measured Values of $Dy$ for Stars Nos.—					No. of Eclipse Plate.	Measured Values of $Dy$ for Stars Nos.—				
	5	4	3	6	10		5	4	3	6	10
	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>		<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
1	-0.051	+0.175	+0.169	+0.201	+0.235	9	-0.059	+0.121	+0.109	+0.205	+0.180
2	+0.558	+0.656	+0.724	+0.668	+0.702	10	+0.033	+0.270	+0.188	+0.258	+0.280
3	+0.124	+0.285	+0.286	+0.274	+0.355	11	+0.025	+0.215	+0.210	+0.233	+0.274
4	+0.111	+0.222	+0.247	+0.231	+0.167	12	-0.068	+0.144	+0.124	+0.160	+0.167
5	+0.034	+0.228	+0.232	+0.218	+0.308	15	-0.038	+0.138	+0.107	+0.172	—
6	+0.164	+0.488	+0.478	+0.557	+0.637	16	-0.050	+0.076	+0.046	+0.127	+0.073
7	-0.051	+0.156	+0.162	+0.250	+0.279	17	-0.071	+0.104	+0.081	+0.186	+0.164
8	+0.108	+0.330	+0.314	+0.376	+0.397	18	+0.016	+0.092	+0.109	+0.099	+0.084

The equations given by these stars are

$$- 0.160d - 1.107e - 0.789a + f = Dy_5 \quad (1)$$

$$+ 0.334d + 0.472e + 1.336a + f = Dy_4 \quad (2)$$

$$+ 0.348d + 0.360e + 1.574a + f = Dy_3 \quad (3)$$

$$+ 0.587d + 1.099e + 0.726a + f = Dy_6 \quad (4)$$

$$+ 0.860d + 1.321e + 0.589a + f = Dy_{10} \quad (5)$$

The mean of (4) and (5) added to (1) gives

$$+ 0.564d + 0.103e - 0.131a + 2f = Dy_5 + \frac{1}{2}(Dy_6 + Dy_{10}).$$

While the sum of (2) and (3) gives,

$$+ 0.682d + 0.832e + 2.910a + 2f = Dy_3 + Dy_4.$$

Subtracting these we get

$$3.041a + 0.729e + 0.118d = Dy_3 + Dy_4 - Dy_5 - \frac{1}{2}(Dy_6 + Dy_{10}).$$

This equation has a small coefficient for  $e$  and a very small one for  $d$ .

Calculating the quantities on the right-hand side, assuming  $e$  to be the same for all the plates, and substituting the values of  $d$  from the previous table, we find:—

$r$		$r$	
$a + 0.240e = + 0.056$	1	$a + 0.240e = + 0.035$	9
$a + 0.240e = + 0.049$	2	$a + 0.240e = + 0.048$	10
$a + 0.240e = + 0.047$	3	$a + 0.240e = + 0.045$	11
$a + 0.240e = + 0.059$	4	$a + 0.240e = + 0.059$	12
$a + 0.240e = + 0.050$	5	$a + 0.283e = + 0.026$	15
$a + 0.240e = + 0.059$	6	$a + 0.240e = + 0.024$	16
$a + 0.240e = + 0.036$	7	$a + 0.240e = + 0.028$	17
$a + 0.240e = + 0.046$	8	$a + 0.240e = + 0.029$	18

(p. 312) In photograph No. 15, star 10 is not shown, and the equation is slightly modified. It may also be noticed that the values are somewhat smaller for Nos. 15 to 18.

The means of the 16 photographs treated in this manner give

$$a + 243e = 0^r.0435,$$

or with the value of the scale or  $0^r.082$  from the previous table

$$a = + 0^r.024 = 0''.93 \text{ at the limb.}$$

It may be noticed that the change of scale arising from differences of refraction and aberration is  $0^r.020$ . If this value of  $e$  be taken instead of  $0^r.082$  we obtain

$$a = + 0^r.039 = + 1''.52 \text{ at the sun's limb.}$$

The equations on p. 311 were also solved by least squares for each plate. There is a considerable range in the deduced values of  $a$ , as is to be expected when  $a$  and  $e$  are determined independently for each plate. The mean result for  $a$  is  $0''.99$ , or very nearly the same as that already found.

The photographs taken with the astrographic telescope support those obtained by the "4-inch" to the extent that they show considerable outward deflection, but for the reasons already given are of much less weight.

#### IV. THE EXPEDITION TO PRINCIPE.

(Observers, Prof. A. S. EDDINGTON and Mr. E. T. COTTINGHAM.)

26. The expedition left Liverpool on the "Anselm" on March 8, and travelled in company with the Sobral expedition as far as Madeira. It was necessary to wait there until April 9, when the journey was continued on the "Portugal," belonging to the Companhia Nacional de Navegação. The expedition landed at the small port of S. Antonio in the Isle of Principe on April 23.

Vice-Admiral CAMPOS RODRIGUES and Dr. F. OOM of the National Observatory, Lisbon, had kindly given us introductions, and everything possible was done by those on the island for the success of the work and the comfort of the observers. We were met on board by the Acting Administrator Sr. VASCONCÉLOS, Sr. CARNEIRO, President of the Association of Planters, and Sr. GRAGEIRA, representing the Sociedade d'Agricultura Colonial, who made all necessary arrangements. The Portuguese Government dispensed with any customs examination of the baggage.

27. Principe is a small island belonging to Portugal, situated just north of the equator in the Gulf of Guinea, about 120 miles from the African coast. The extreme length and breadth are about 10 miles and 6 miles. Near the centre mountains rise to a height of 2500 feet, which generally attract heavy masses of cloud. Except for a certain amount of virgin forest, the island is covered with cocoa plantations. The (p. 313) climate is very moist, but not unhealthy. The vegetation is luxuriant, and the scenery is extremely beautiful. We arrived near the end of the rainy-season, but the *gravana*, a dry wind, set in about May 10, and from then onwards no rain fell except on the morning of the eclipse.

We were advised that the prospects of clear sky at the end of May were not very good, but that the best chance was on the north and west of the island. After inspecting two other sites on the property of the Sociedade d'Agricultura Colonial, we fixed on Rota Sundy, the headquarters of Sr. CARNEIRO's chief plantation. We were Sr. CARNEIRO's guests during our whole visit, and used freely his ample resources of labour and material at Sundy. We learnt later that he had postponed a visit to Europe in order to entertain us. We were also greatly indebted to his manager at Sundy, Sr. ATALAYA, with whom we lived for five weeks; his help and attention were invaluable. Mr. WRIGHT and Mr. LEWIS of the Cable Station kindly assisted us as interpreters when necessary.

Sundy is situated in the north-west of the island overlooking the sea at a height of 500 feet, and as far as possible from the cloud-gathering peaks. Our telescope was erected in a small walled enclosure adjoining the house, from which the ground sloped steeply down to the sea in the direction of the sun at eclipse. On the other side it was sheltered by a building. The approximate position was latitude 1° 40' N., longitude 29m. 32s. E.

28. The baggage was brought to Sundy on April 28 mainly by tram, but with a break of about a kilometre, where it had to be transported through the wood by native carriers. After a week spent on the preparations, we returned to S. Antonio for the week, May 6-13, as it was undesirable to unpack the mirror so early in the damp climate. On our return to Sundy the installation and adjustments were

soon completed, and the first check plates were taken on May 16. Meanwhile the *gravana* had begun, which, although there is no rain, is generally accompanied by increased cloud. There were, however, some days of clear sky, and the nights were usually clear.

The cœlostat was mounted on a stone pier built for the purpose., The clock weight fell into a pit below the clock deep enough to allow a run of 36 minutes without rewinding. Care was taken to use a particular part of the cœlostat-sector, considered to be the most perfect, in photographing the eclipse and the check field. The telescope (Oxford astrographic object-glass, see p. 295) rested on wooden V's near the two ends, the V's being supported on packing-cases; the one at the breech-end could be moved laterally to allow of different declination settings, and was marked with an approximate declination scale. A series of exposures of one second was made on a bright star to test whether there was any shake of the telescope after inserting the plate: no shake was detected even when the exposure was made immediately; but as a safeguard for the eclipse photographs a full second was allowed to elapse before beginning the exposure. The exposure was made by moving a cardboard screen (p. 314) unconnected with the instrument. The telescope pointed slightly downwards, and the tube was turned so as to give the right orientation to the plate, the lines of declination being two or three degrees inclined to the horizontal. A canvas screen was arranged to protect the tube and object-glass from the direct radiation of the sun.

The adjustments call for little comment. In view of the purpose of the observations, it was desirable to adjust the tilt of the object-glass and plate with special care. It was also important that the setting on the field should be nearly exact. The sun appeared on the eclipse day in sufficient time to allow of the setting being made by means of the solar image; but arrangements had been tested by which the correct field would have been obtained if it had been cloudy up to totality.\* The telescope, was focused by trial photographs of stars, and owing to the uniform temperature of the island the focus was unchanged for day observations.

The object-glass was stopped down to 8 inches for the eclipse photographs and for all check and comparison photographs used in the reductions.

29. The days preceding the eclipse were very cloudy. On the morning of May 29 there was a very heavy thunderstorm from about 10 a.m. to 11.30 a.m. — a remarkable occurrence at that time of year. The sun then appeared for a few minutes, but the clouds gathered again. About half-an-hour before totality the crescent sun was glimpsed occasionally, and by 1.55 it could be seen continuously through drifting cloud. The calculated time of totality was from 2h. 13m. 5s. to 2h. 18m. 7s. G.M.T. Exposures were made according to the prepared programme, and 16 plates were obtained.

---

\*\*\* The method depended on setting the cross-wires of the theodolite (attached to the cœlostat) on a terrestrial mark, and then starting the clock at a particular instant.

Mr. COTTINGRAM gave the exposures and attended to the driving mechanism, and Prof. ED-DINGTON changed the dark slides. It appears from the results that the cloud must have thinned considerably during the last third of totality, and some star images were shown on the later plates. The cloudier plates give very fine photographs of a remarkable prominence which was on the limb of the sun.

A few minutes after totality the sun was in a perfectly clear sky, but the clearance did not last long. It seems likely that the break-up of the clouds was due to the eclipse itself, as it was noticed that the sky usually cleared at sunset.

It had been intended to complete all the measurements of the photographs on the spot; but owing to a strike of the steamship company it was necessary to return by the first boat, if we were not to be marooned on the island for several months. By the intervention of the Administrator berths, commanded by the Portuguese Government, were secured for us on the crowded steamer. We left Principe on June 12, and after transshipping at Lisbon, reached Liverpool on July 14.

30. The following is a list of the photographs, including the comparison photographs kindly taken for us by Mr. F. A. BELLAMY at Oxford, before the instrument was dismantled. All the eclipse photographs are given, though only W and X furnished (p. 315) results. Of the other series, only the exposures actually used in the reductions are given.

LIST of Plates.

Check Field (R.A. 14h. 12m. 47s., Declination +20° 30')

Ref.	Place.	Date.	Loc. Sid. T.			Exp.	Approx. Z.D.	Bar.	Ther.	Plate.
			h.	m.	s.					
$a_1$	Oxford	1919. January 16	12	55	10	60	35	29·64	37·0	S.
$b_1$	"	January 17	13	10	40	60	34	29·83	35·3	S.
$c_1$	"	"	13	54	55	60	31	29·83	35·3	S.
$d_1$	"	"	14	9	25	60	31	29·83	35·3	S.
$e_1$	"	January 23	13	13	30	60	33	30·45	29·0	S.
			G.M.T.							
$q_1$	Principe	May 22	12	25	40	40	43	29·45	76·5	S.R.
$r_1$	"	"	12	31	20	40	45	29·45	76·5	S.R.
$s_2$	"	"	12	37	50	80	46	29·45	76·5	S.R.
$v_1$	"	May 25	12	22	20	40	45	29·45	76·5	S.S.
$w_1$	"	"	12	26	20	40	46	29·45	76·5	S.S.

NOTES.

Column 1. — The letter is marked on the original plates (preserved at Cambridge Observatory). The number refers to the exposure, disregarding exposures taken without the 8-inch stop.

Column 2. —The co-ordinates of Oxford Observatory are Sm. 3s. W., Si0 46' N., and of the site at Principe, 29m. 32s. E., 10 40' N.

Column 4. —The mid-instant of the exposure is given. Times for check plates at Principe were only noted roughly. Times for the eclipse' plates are deduced from the calculated time of totality, the interval from the end of one exposure to the beginning of the next being assumed uniform.

Column 7.— Readings at Principe were taken with an aneroid recording instrument, and therefore automatically reduced to the latitude of England. The barometer during our visit was practically constant except for a regular semi-diurnal wave of amplitude about 0·05 in.

Column 9. — Brand of Plate: S = Imperial Sovereign, S.S. = Imperial Special Sensitive, S.R.= Ilford Special Rapid, E.= Ilford Empress. Backed plates were used at Principe.

(p. 316) Eclipse Field (R.A. 4h. 19m. 30s., Declination +21° 43')

Ref.	Place.	Date.	Loc. Sid. T.	Exp.	Approx. Z.D.	Bar.	Ther.	Plate.
		1919.	h. m. s.	s.	°	m.	°	
D <sub>1</sub>	Oxford	January 16	3 58 1	5	30	29·65	39·0	S.
G <sub>1</sub>	"	January 22	4 4 39	5	30	30·30	31·0	S.
H <sub>1</sub>	"	"	4 34 28	5	30	30·30	31·0	S.
I <sub>2</sub>	"	"	4 48 46	10	31	30·30	31·0	S.
K <sub>2</sub>	"	February 9	4 45 24	10	30	30·48	24·5	S.
			G.M.T.					
K'	Principe	May 29	2 13 9	5	46	29·45	77·0	S.R.
L	"	"	2 13 28	10	46	29·45	77·0	S.R.
M	"	"	2 13 46	3	46	29·45	77·0	S.R.
N	"	"	2 14 1	5	46	29·45	77·0	E.
O	"	"	2 14 20	10	46	29·45	77·0	S.S.
P	"	"	2 14 44	15	46	29·45	77·0	S.S.
Q	"	"	2 15 6	5	46	29·45	77·0	S.R.
R	"	"	2 15 30	20	46	29·45	77·0	S.R.
S	"	"	2 15 53	3	46	29·45	77·0	S.S.
T	"	"	2 16 13	15	46	29·45	77·0	E.
U	"	"	2 16 37	10	46	29·45	77·0	S.R.
V	"	"	2 16 56	5	46	29·45	77·0	S.S.
W	"	"	2 17 15	10	46	29·45	77·0	S.
X	"	"	2 17 33	3	46	29·45	77·0	S.R.
Y	"	"	2 17 47	2	46	29·45	77·0	S.R.
Z	"	"	2 18 1	2	46	29·45	77·0	S.R.

#### NOTES.

Columns 1 to 9. See previous page.

The large proportion of Ilford Special Rapid plates used at the eclipse was due to the fact that experience in developing the check plates showed that these suffered less than the others from the high temperature of the water (78° F.). Ice was generally available for the check plates through the kindness of Sr. GRAGEIRA; but the supply failed after the eclipse, and formalin was used to harden the films. This was unsatisfactory except for the J.S.R. plates, and so plates P, S, T, W were brought home undeveloped. The developing at Principe was done at night, and the drying was accelerated by use of alcohol.

The use of an 8-inch stop in front of the object-glass was suggested to us by Mr. DAVIDSON, who showed that a great improvement of the images resulted; it was originally intended, however, to use the full aperture for part of totality. Early measures of check plates made at Principe soon

convinced us that the results from the full aperture were greatly inferior, and we decided to rely entirely on the 8-inch aperture. (p. 317)

### *The Check Plates.*

31. In addition to the eclipse field, a check field was photographed both at Oxford and at Principe. The field chosen included Arcturus, so that it was easily found with the cœlostát. Its declination was nearly the same as that of the eclipse field, and it was photographed at the same altitude at Principe in order that any systematic error, due to imperfections of the cœlostát mirror or other causes, might affect both sets of plates equally. The primary purpose was thus to check the possibility of systematic error arising from the different conditions of observation at Oxford and Principe, and from possible changes in the object-glass during transit. Unlike the Sobral expedition, we were not able to take comparison photographs of the eclipse field at Principe, because for us the eclipse occurred in the afternoon, and it would be many months before the field could be photographed in the same position in the sky before dawn. The check plates were therefore specially important for us.

As events turned out the check plates were important for another purpose, viz., to determine the difference of scale at Oxford and Principe. As shown in the report of the Sobral expedition, it is not necessary to know the scale of the eclipse photographs, since the reductions can be arranged so as to eliminate the unknown scale. If, however, a trustworthy scale is known and used in the reductions, the equations for the deflection have considerably greater weight, and the result depends on the measurement of a larger displacement. On surveying the meagre material which the clouds permitted us to obtain, it was evident that we must adopt the latter course; and accordingly the first step was to obtain from the check plates a determination of the scale of the Principe photographs.

32. All the measures were made by Prof. EDDINGTON with the Cambridge measuring machine.\* An Oxford and a Principe plate were placed film to film so that the images of corresponding stars nearly coincided—this was possible because—the Oxford plates were taken direct, and the Principe plates by reflection in the cœlostát mirror.

The small differences  $\Delta x$  and  $\Delta y$ , in the sense Principe - Oxford, were then measured for each star. Eight settings were made on each image; for half of them the field was rotated through 180 degrees by the reversion prism. Five pairs of plates were measured, and the measures are given in Table XI. (p- 318)

---

\* 'Monthly Notices, R.A.S.,' vol. LXI, p. 444.



TABLE XI.--Check Plates, Measures.

Star.	Approx. Co-ords.		$q_1-a_1$ .		$w_1-b_1$ .		$s_2-c_1$ .		$r_1-d_1$ .		$v_1-e_1$ .	
	$x$ .	$y$ .	$\Delta x$ .	$\Delta y$ .	$\Delta x$ .	$\Delta y$ .	$\Delta x$ .	$\Delta y$ .	$\Delta x$ .	$\Delta y$ .	$\Delta x$ .	$\Delta y$ .
1	1.41	20.31	4346	7180	3199	4259	6012	7375	3921	8796	5435	4399
2	5.89	12.74	3865	6405	3394	4129	4922	6132	3039	7440	5978	4170
4	9.46	11.13	3640	5932	3408	4118	4369	5366	2638	6776	5966	4441
5	12.00	6.84	3311	5590	—	—	3831	4752	1938	6156	—	4314
6	12.80	27.33	5415	6561	3192	5140	7689	5925	5379	7580	5032	5794
7	13.75	13.78	4076	5630	3496	4290	4891	4805	3101	6461	5906	4826
8	15.50	24.38	5125	6300	—	—	—	—	—	—	5139	5412
10	20.13	10.49	3965	4940	3679	4505	4656	3568	2866	5370	6398	5229
11	20.81	0.93	2874	4352	3876	3759	2845	2815	1238	4758	7268	4482
12	22.91	6.23	3685	4436	3931	4158	4039	2738	2270	4551	6765	5076
13	26.46	8.96	4222	4288	4045	4326	4724	2232	2720	4120	6836	5561

The unit for  $x$  and  $y$  is 5 millimetres, which is approximately equal to 5'. The differences  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  are given in units of the fifth place of decimals = 0".003. The centre of the plate is near  $x = 14$ ,  $y = 14$ .

Plate-constants were then calculated in the usual way, by the formulae

$$\Delta x = ax + by + c$$

$$\Delta y = dx + ey + f$$

These were applied, and the residuals  $\Delta_1 x$ ,  $\Delta_1 y$  converted into arc are as follows: —

TABLE XII. — Check Plates, Residuals.

Star.	$g_1 - a_1.$		$w_1 - b_1.$		$s_2 - c_1.$		$r_1 - d_1.$		$v_1 - e_1.$		Mean.	
	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_1 y.$
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1	-0.02	-0.02	+0.29	-0.34	+0.02	-0.07	-0.03	+0.22	+0.49	+0.01	+0.15	-0.04
2	+0.39	+0.15	+0.16	+0.14	+0.69	0.00	+0.69	-0.29	+0.10	-0.23	+0.41	-0.05
4	-0.14	-0.04	-0.16	+0.09	-0.38	-0.12	-0.02	-0.37	-0.54	+0.12	-0.25	-0.06
5	-0.08	+0.35	—	—	+0.25	+0.19	-0.21	-0.21	—	-0.01	-0.01	+0.08
6	-0.06	-0.10	-0.28	+0.27	-0.09	+0.14	-0.10	+0.12	+0.15	+0.49	-0.08	+0.18
7	-0.06	-0.28	-0.10	-0.16	-0.74	-0.09	-0.31	+0.02	-0.39	-0.12	-0.32	-0.13
8	-0.30	+0.34	—	—	—	—	—	—	-0.38	-0.68	-0.34	-0.17
10	-0.02	-0.10	-0.21	+0.52	-0.15	+0.16	+0.08	+0.25	-0.08	+0.34	-0.08	+0.23
11	-0.46	-0.01	-0.13	-0.22	-0.13	+0.11	-0.13	+0.71	+0.30	-0.28	-0.11	+0.06
12	+0.16	-0.14	+0.13	-0.04	+0.19	-0.06	+0.17	-0.09	-0.13	+0.08	+0.10	-0.05
13	+0.59	-0.12	+0.32	-0.26	+0.34	-0.25	-0.13	-0.38	+0.48	+0.28	+0.32	-0.15

The mean residual without regard to sign is  $\pm 0''\cdot 21$ , from which the probable error of a determination of  $\Delta x$  or  $\Delta y$  is  $\pm 0''\cdot 22$ .

fainter and more comfortable to measure. Stars 5 and 8 are very faint. Arcturus is on the plates but is much too bright to measure. No measures have been rejected.

The determination of the deflection on the eclipse plates is based on the declinations ( $y$ ), and the last column of Table XII. shows that on the check plates the  $y$ -comparisons are free from any serious systematic error.

Star 7 is of particular interest; its position near the centre of the field corresponds to that of  $\kappa_1, \kappa_2$  Tauri in the eclipse field, from which the greatest deflection is expected. The images (which are not quite round) have the same characteristic shape. Further, the brightness of No. 7 corresponds with, but exaggerates, the brightness of  $\kappa_1$  Tauri which is the brightest star in the eclipse field. It is therefore a valuable check to find that its systematic error in declination is insignificant compared with the displacement (of the order of  $1''$ ) afterwards found for  $\kappa_+$  and  $\kappa_2$  Tauri.

The systematic errors in right ascension are larger (probably through imperfect driving of the clock). They may affect the displacement indirectly through the orientation constant, but with much reduced effect. Allowing for this reduction in importance there appears to be nothing to trouble about.

The primary purpose of the check plates is thus fulfilled. They show that photographs of a check field of stars taken at Oxford and Principe show none of the displacements which are exhibited by the photographs of the eclipse field taken under precisely similar instrumental conditions. The

inference is that the displacements in the latter case can only be attributed to presence of the eclipsed sun in the field.

33. We turn now to the differences of scale between Oxford and Principe, which are given by the plate-constants  $a, b, d, e$  determined from the measures. As determined, these include the effects of differential refraction and aberration. The latter corrections were calculated for each plate by the usual formulae and applied, so as to determine the corrected plate-constants,  $a', b', d', e'$  free from differential refraction and aberration.

Due allowance was made for the change in the coefficient of refraction owing to the difference of barometer and temperature (about  $40^\circ$ ) between Oxford and Principe. The results are as follows (in units of the fifth place of decimals): —

TABLE XIII.— Check Plates, Plate-Constants.

Comparison.	Uncorrected.				Corrected.				
	$a.$	$b.$	$d.$	$e.$	$a'.$	$b'.$	$d'.$	$e'.$	$b'+d'.$
$q_1 - a_1$	+32.7	+101.0	- 87.8	+58.2	+32.7	+ 98.4	- 90.4	+32.1	+ 8.0
$w_1 - b_1$	+26.2	- 16.0	+ 25.9	+53.6	+30.4	- 22.5	+ 19.4	+31.4	- 3.1
$s_2 - c_1$	+31.5	+192.5	-173.5	+64.8	+35.8	+182.6	-183.4	+42.1	- 0.8
$r_1 - d_1$	+28.2	+165.0	-146.8	+69.8	+32.1	+157.8	-154.0	+45.0	+ 3.8
$v_1 - e_1$	+21.6	- 76.2	+ 70.6	+61.4	+25.2	- 80.5	+ 66.3	+35.7	-14.2
	Mean . . . . .				+31.2	—	—	+37.3	- 1.3

(p. 320) The sign of the results shows that the scale of the photographs is larger at Principe than at Oxford; in fact, the focus must have been set about 1.2 mm. further out (apart from any change of length compensated by expansion of the photographic plates). As the error in focussing was probably not more than 0.5 mm., the greater part of this shift must be due to the focal, length of the lens combination increasing with temperature more rapidly than the linear expansion of the glass.

If the only difference were a change of focal length, we should have  $a' = e'$ . There is a fairly strong indication that  $e'$  is greater than  $a'$ . This is no doubt due to a change in the definition caused by the cœlostast mirror or by a shift of the object-glass lenses on the journey; and, as it will presumably affect the eclipse plates in the same way, it is best to adopt the values of  $a'$  and  $e'$  as determined, rather than

to take a mean. In so doing we shall at any rate not exaggerate the displacement, which depends mainly on the  $y$ -measures and is reduced by adopting too large a value of  $e'$ .\*

The difference  $b' - d'$  merely gives the relative orientation of the two plates as placed face to face. The sum  $b' + d'$  practically vanishes, as it should do. However, for consistency we adopt the small value found.

From the internal discordances of our determination of  $e'$  (the most important of these constants) the probable error of the mean is  $\pm 2 \cdot 1$ . This, as shown later, will cause a probable error of our final determination of the deflection, reduced to the limb of the sun, of amount  $\pm 0'' \cdot 14$ , affecting all determinations systematically. Errors in the other constants have much smaller influence.

### *The Eclipse Plates.*

34. The eclipse plates from K to S show no star images. After that the cloud lightened somewhat, and some images appear on the remaining plates. The sky was never clear and nothing fainter than  $5 \cdot 5$  is shown. The cloud was variable in different parts of the-plate, so that the brightness of the images varies erratically and the diffusion is also variable.

In order to obtain results of any weight the stars 4 and 3 ( $\kappa_1$  and  $\kappa_2$  Tauri), which theoretically should be strongly displaced, must be shown. They appear on all plates from T to Z, and being near the centre of the field have good images. They are relatively rather faint on plate U, but are bright on the other plates. The appearance of the remaining stars is as follows

Plate T. 6 bright 10 faint.

Plate U. 6, 10 very bright; 11 faint.

Plate V. 6 bright; 10 fair.

Plate W. 5, 6 good; 10 diffused.

Plate X. 5, 6, 11 good.

Plate Y. 5, 6, 11 faint, diffused; 12 very faint.

Plate Z. 5, 6, 11. faint, diffused.

---

\* It happens that it is also reduced, but to a less extent, by using too small a value of  $a'$ .

The possibility of a determination of deflection practically depends on the appearance of star 5. The relative displacement of 5 and 3 is on EINSTEIN'S theory,  $1''\cdot 2$  in the  $y$  – co-ordinate. Further, the  $x$ –measures of 5 are needed for a really good determination of the orientation. Star 11 can scarcely take its place. It is true that the relative displacement is then  $0''\cdot 8$  ; but the orientation affects this with a much larger factor, and the orientation is badly determined in the absence of star 5.

Accordingly, plates W and X are the only ones likely to give a trustworthy result. X is somewhat the better plate of the two.\* Measures have been made of the faint diffused images on plates Y and Z; but, as might have been expected, they are hopelessly discordant and. cannot be reconciled by any adopted value of the deflection.

35. We give the measures of plates X and W in detail. Both comparisons of X were measured at Principe a few days after the eclipse. Plate W, which was not developed until after the return of the expedition, was measured at Cambridge on August 22–23.†

*Plate X.*

(1) Comparison with Oxford Plate G<sub>1</sub>.

The differential refraction for all the eclipse plates is

$$a = -46\cdot 5, \quad b, d = +8\cdot 2, \quad e = -27\cdot 0.$$

the differential aberration being zero.

For the comparison plate G<sub>1</sub>

---

\* Plate X has also the merit of a short exposure, 3s. We should mistrust the  $x$ -measures of a long exposure with variable cloud and imperfect guiding, because there is nothing to show that the images of the different stars are formed at the same time.

† Of the comparisons of check plates,  $w_1$  —  $b_1$  was measured on August 20, and the others about the end of September. Previous measures had been made at Principe with three earlier check plates taken on the night of May 16; but a slight change of adjustment of tilt was made the following day (thereafter it remained unaltered until the eclipse), and the small change of focus allowed for in the comparisons. These furnished a provisional scale which was used to obtain preliminary results. Afterwards the measurement of check plates was undertaken in a more systematic way, using later plates about which no doubt could arise, and giving the results printed; above. No change of any importance was found; the final value for the deflection at the limb was reduced by  $0''\cdot 4$  compared with the provisional value, but this was mainly due to the adoption of separate values of  $a'$  and  $e'$  instead of adopting the mean, and to recalculation of the differential refraction and aberration.

$$a = -19.1, \quad b, d = +0.7, \quad e = -28.3.$$

Hence for X – G

$$a = 27.4, \quad b, d = +7.5, \quad e = +1.3.$$

(p. 322)

To these must be added the terms representing change of scale, determined from the check plates (Table XIII.), viz.,

$$a = +31.2, \quad b, d = -0.6, \quad e = +37.3.$$

Hence the whole difference X – G is given by

$$a = +3.8, \quad b, d = +6.9, \quad e = +38.6.$$

The first step is to take the measured differences  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , and take out the parts  $ax + by$ ,  $dx + ey$ , due to these terms, leaving the corrected differences  $\Delta_1 x$ ,  $\Delta_1 y$ .

$\Delta_1 x$  and  $\Delta_1 y$  contains (1) the Einstein displacement, if any, and (2) the unknown relative orientation of the plates giving rise to terms of the form,  $\Delta x = +\theta y$ ,  $\Delta y = -\theta x$ .

These two parts could be separated by a least-squares solution, but in view of the poor quality of the material it seems better to adopt a method which keeps a better check on possible discordances and shows more clearly what is happening. The Einstein displacement in  $x$  is small, and we might perhaps neglect it altogether in determining  $\theta$  from the  $x$ -measures. However, it is clear from preliminary trials that a displacement exists—whether the half or the full Einstein displacement. Hence if we take out threequarters of the full Einstein displacement ( $\frac{3}{4}E_x$ ) we divide the already slight effect by 4, and at the same time deal fairly between the two hypotheses.\* The residuals  $\Delta_2 x$  result.

From the equations  $\Delta_2 x = c + \theta y$  we determine by least squares the orientation  $\theta$ , which is found to be + 163. Removing the term  $163y$  we obtain the residuals  $\Delta_3 x$ .

Turning to  $\Delta_1 y$ , we correct for the orientation by taking out the term  $-163x$  leaving  $\Delta_3 y$ . These values should agree for all the stars, except for the displacement and the accidental error.

---

\* The smaller the displacement provisionally assumed for  $x$ , the larger is the displacement ultimately found from  $y$  (see p. 327).

Denoting the value of the displacement at 50' (or 10 reseau-intervals) from the centre of the sun by  $\kappa$ , the  $y$ -displacements of the various stars will be  $\kappa\alpha_y$  where  $\alpha_y$  has the values tabulated below. We can therefore obtain  $\kappa$  by solving by least-squares the equations

$$\Delta_3y = f + \kappa\alpha_y.$$

The radius of the sun during the eclipse was  $15'.78$ . Hence the full Einstein displacement of  $1''.75$  corresponds to  $0''.55$  at  $50'$  distance, or, in our units of  $0''.003$ ,  $\kappa = 184$ . It is easily seen that the value is somewhere near this, and it is therefore easier and more instructive to take out  $E_y = 184\alpha_y$ , and determine the correction to  $\kappa$  from the residuals  $\Delta_4y$ . We also remove the mean of  $\Delta_4y$  obtaining the final residuals.

The normal equations corresponding to equations of condition

$$\text{Residual} = \delta f + \alpha_y \delta \kappa$$

(p. 323) are found to be

$$5\delta f + 2.83\delta\kappa = -1$$

$$2.83\delta f + 4.83\delta\kappa = +64$$

whence

$$3.23 \delta\kappa = +64$$

$$\delta\kappa = +20.$$

An increase of 20 on 184 corresponds to an increase of  $0''.19$  on  $1''.75$ . Hence the resulting deflection at the limb is  $1''.94$ .

Since the full deflection is indicated we complete the results for  $x$  by taking out the remaining  $1/4E_x$ , obtaining  $\Delta_4x$ , and then tabulate the residuals from the mean values  $-5942$ .

The successive steps are shown below:—

Star.	$x.$	$\Delta x.$	$3 \cdot 8x.$	$6 \cdot 9y.$	$\Delta_1 x.$	$\frac{3}{4} E_x.$	$\Delta_2 x.$	$+163y.$	$\Delta_3 x.$	$\Delta_4 x.$	Resid. (unit = $0'' \cdot 003$ ).
11	1.39	-3916	5	86	-4007	-76	-3931	2021	-5952	-5927	+ 15
5	12.40	-5518	47	20	-5585	-79	-5506	478	-5984	-5958	- 16
4	17.34	-2869	66	129	-3064	-54	-3010	3051	-6061	-6043	-101
3	17.48	-2924	66	121	-3111	-69	-3042	2869	-5911	-5888	+ 54
6	19.87	-1568	75	172	-1815	+ 3	-1818	4075	-5893	-5894	+ 48

Star.	$y.$	$\Delta y.$	$6 \cdot 9x.$	$38 \cdot 6y.$	$\Delta_1 y.$	$-163x.$	$\Delta_3 y.$	$E_y.$	$\Delta_4 y.$	$\alpha_y.$	Resid.
11	12.40	6398	10	479	5909	- 227	6136	+ 6	6130	+0.03	+ 5
5	2.93	4121	86	113	3922	-2021	5943	-127	6070	-0.69	- 55
4	18.72	4512	120	722	3670	-2826	6496	+234	6262	+1.27	+137
3	17.60	4236	121	679	3436	-2849	6285	+272	6013	+1.48	-112
6	24.99	4148	137	965	3046	-3239	6285	+136	6149	+0.74	+ 24

(2) Comparison with Oxford Plate H<sub>1</sub>.

The reductions are similar and are given in a rather more condensed form below. The theoretical plate constants are

$$a = +3.8, \quad b, d = +8.3, \quad e = +38.6$$

Star.	$\Delta x.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_2 x.$	$+10y.$	$\Delta_3 x.$	$\Delta_4 x.$	Resid.
11	7290	7182	7258	124	7134	7159	+235
5	6751	6680	6759	29	6730	6756	-168
4	7126	6905	6959	187	6772	6790	-134
3	7320	7108	7177	176	7001	7024	+100
6	7429	7147	7144	250	6894	6893	- 31

(p. 324)



Star.	$\Delta y.$	$\Delta_1 y.$	$-10x.$	$\Delta_3 y.$	$E_y.$	$\Delta_4 y.$	Resid.
11	1586	1095	- 14	1109	+ 6	1103	+172
5	858	642	-124	766	-127	893	- 38
4	1881	1015	-173	1188	+234	954	+ 23
3	1785	961	-175	1136	+272	864	- 67
6	1909	779	-199	978	+136	842	- 89

The normal equations are

$$5\delta f + 2 \cdot 83\delta\kappa = +1$$

$$2 \cdot 83\delta f + 4 \cdot 83\delta\kappa = -105$$

whence

$$3 \cdot 23\delta\kappa = -105,$$

$$\delta\kappa = -33.$$

The corresponding deflection at the limb is

$$1'' \cdot 75 - 0'' \cdot 31 = 1'' \cdot 44.$$

*Plate W.*

Although the exposure was only 10 seconds the images have jumped in R.A., so that the appearance is dumb-bell shaped. They are, however, symmetrical, so that fair measures of  $x$  can be made; the  $y$  measures on which the result chiefly depends are unaffected. Star 10 is very diffused in R.A.

(1) Comparison with Oxford Plate D<sub>1</sub>.

Theoretical plate-constants

$$a = +4 \cdot 9, \quad b, d = +6 \cdot 5, \quad e = +39 \cdot 7.$$

Star.	$x.$	$\Delta x.$	$\Delta_1 x.$	$\frac{3}{4} E_x.$	$\Delta_2 x.$	$+91y.$	$\Delta_3 x.$	$\Delta_4 x.$	Resid.
5	12.40	2450	2370	-79	2449	267	2182	2208	+ 40
4	17.34	3948	3741	-54	3795	1704	2091	2109	- 59
3	17.48	3834	3634	-69	3703	1602	2101	2124	- 44
6	19.87	4525	4266	+ 3	4263	2275	1988	1987	-181
10	22.60	5199	4911	+17	4894	2476	2418	2412	+244

Star.	$y.$	$\Delta y.$	$\Delta_1 y.$	$-91x.$	$\Delta_3 y.$	$E_y.$	$\Delta_4 y.$	$\alpha_y.$	Resid.
5	2.93	5320	5123	-1128	6251	-127	6378	-0.69	+ 70
4	18.72	5745	4889	-1578	6467	+234	6233	+1.27	- 75
3	17.60	5911	5098	-1591	6689	+272	6417	+1.48	+109
6	24.99	5628	4507	-1808	6315	+136	6179	+0.74	-129
10	27.21	5616	4389	-2057	6446	+114	6332	+0.62	+ 24

(p. 325) Normal equations

$$5\delta f + 3.42 \delta \kappa = -1.$$

$$3.42 \delta f + 5.21 \delta \kappa = \square 62.$$

whence

$$2.87\delta\kappa = -61.$$

$$\delta\kappa = -21.$$

Hence deflection at the limb is

$$1'' \cdot 75 - 0'' \cdot 20 = 1'' \cdot 55.$$

(2) Comparison with Oxford Plate I<sub>2</sub>.

Theoretical plate constants

$$a = +4.0, \quad b, d = +9.1, \quad e = +38.8.$$

Star.	$\Delta x.$	$\Delta_1 x.$	$\Delta_2 x.$	$-30y.$	$\Delta_3 x.$	$\Delta_4 x.$	Resid.
5	5050	4973	5052	- 88	5140	5166	+ 46
4	4732	4493	4547	-562	5109	5127	+ 7
3	4622	4392	4461	-528	4989	5012	-108
6	4635	4329	4326	-750	5076	5075	- 45
10	4764	4426	4409	-816	5225	5219	+ 90

Star.	$\Delta y.$	$\Delta_1 y.$	$+30x.$	$\Delta_3 y.$	$E_y.$	$\Delta_4 y.$	Resid.
5	-6824	-7051	372	-7423	-127	-7296	- 15
4	-5751	-6635	520	-7155	+234	-7389	-108
3	-5609	-6451	524	-6975	+272	-7247	+ 34
6	-5425	-6576	596	-7172	+136	-7308	- 27
10	-5109	-6371	678	-7049	+114	-7163	+118

Normal equations

$$5\delta f + 3.42 \delta \kappa = +2$$

$$3.42 \delta f + 5.21 \delta \kappa = \square 24$$

whence

$$2.87\delta \kappa = - 25,$$

$$\delta \kappa = - 9.$$

Hence deflection at the limb is

$$1'' \cdot 75 - 0'' \cdot 08 = 1'' \cdot 67.$$

(p. 326)

*Plate U.*

Comparison with Oxford Plate K<sub>2</sub>.

Since Plate U shows some good images, it has been examined, although owing to the absence of star 8 the weight is small. The measures were made at Principe.

Theoretical plate-constants

$$a = +2.8, \quad b, d = +8.9, \quad e = +37.7.$$

Star.	$x.$	$\Delta x.$	$\Delta_1 x.$	$+240y.$	$E_x.$	$\Delta_4 x.$	Resid.
11	1.39	2905	2791	2976	-101	-84	-147
4	17.34	4508	4292	4493	-72	-129	-192
3	17.48	4626	4420	4224	-92	+288	+225
6	19.87	6270	5992	5998	+4	-10	-73
10	22.60	7110	6805	6530	+23	+252	+189

Star.	$x.$	$\Delta y.$	$\Delta_1 y.$	$-240x.$	$E_y.$	$\Delta_4 y.$	Resid.
11	12.40	9026	8547	-334	+6	8875	-94
4	18.72	5846	4986	-4162	+234	8914	-55
3	17.60	5985	5165	-4195	+272	9089	+120
6	24.99	5458	4339	-4769	+136	8972	+3
10	27.21	4911	3684	-5424	+114	8994	+25

In this case it is not possible to determine the orientation with sufficient accuracy from the  $x$ -measures; the value here applied is an arbitrary preliminary value. We accordingly make a least-squares solution from both  $x$ - and  $y$ -residuals to determine the correction to the orientation,  $\delta\theta$ , as well as  $\delta c$ ,  $\delta f$  and  $\delta\kappa$ .

The result is

$$\delta\theta = +2, \quad \delta\kappa = +121.$$

This gives the deflection

$$2''.90.$$

The probable error is, however,  $\pm 0''.87$ , so that the result is practically worthless. Further, it is much more likely to be affected by systematic error than the previous results.

The large probable error is partly due to the large residuals which are greater than in the previous measures; in particular star 3 is unduly faint. If the same accuracy had been obtained, the theoretical weight would have been half that of plates W and X; (p. 327) but having regard to possible systematic error, probably a quarter weight would more nearly represent the true value.

This determination is ignored in the subsequent discussion.

36. It is easy to calculate the effects of any errors in the adopted scale, orientation, &c., on the final result (deflection at the limb). We give some illustrations.

An error in the adopted scale of  $y$  of 10 units (in the fifth place of decimals) would lead to an error  $0''\cdot 68$  in the result from either plate. Thus, the probable error  $\pm 2\cdot 1$  in the determination of  $e'$  gives a probable error  $\pm 0''\cdot 14$  in the final result; or, if we adopted the largest (rather discordant) value found for  $e'$  instead of the mean, we should reduce the result by  $0''\cdot 52$ .

An error of 10 units in the orientation gives an error in the result of  $0''\cdot 45$  for plate X, and  $0''\cdot 22$  for Plate W. It is therefore of less importance, and further it is not likely to be systematic.

Errors in the measurement of  $x$  only affect the result through the orientation. For Plate X, a probable error of  $\pm 0''\cdot 20$  in the  $x$ -measures would give an error  $\pm 4\cdot 0$  in the orientation, leading to an error  $\pm 0''\cdot 8$  in the result; whereas an error of the same magnitude in the  $y$  measures gives directly an error  $\pm 0''\cdot 35$  in the result. For Plate W, the probable error of  $\pm 0''\cdot 20$  in  $x$  gives an error  $\pm 3\cdot 5$  in the orientation and  $\pm 0''\cdot 08$  in the result, compared with  $\pm 0''\cdot 38$  for similar inaccuracy in  $y$ . It is particularly fortunate that the  $x$ -measures are so unimportant for Plate W, because, as already mentioned, the images trailed on that plate.

Finally, it will be remembered that in order not to commit ourselves to the Einstein hypothesis prematurely we neglected the correction  $\frac{1}{4}E_x$  in determining the orientation. This will make a difference of  $0''\cdot 029$  in the results from Plate W and  $0''\cdot 092$  from Plate X. The effect is that the deduced deflection needs to be decreased, and the mean correction  $-0''\cdot 06$  should be applied to the mean result obtained, or rather, to make the adopted deflection for  $x$  consistent with the deduced value from  $y$ , the correction needed is  $-0''\cdot 04$ .

#### *Discussion of the Results.*

37. The four determinations from the two eclipse plates are

$$X - G \dots 1''\cdot 94$$

$$X - H \dots 1''\cdot 44$$

$$W - D \dots 1''\cdot 55$$

$$W - I \dots 1''\cdot 67$$

giving a mean of 1''\cdot 65

They evidently agree with EINSTEIN'S predicted value  $1''\cdot75$ .

(p. 328) The residuals\* in the separate comparisons reduced to arc are as follows. They do not appear to show any special peculiarities

Star.	<i>x</i> residuals.					<i>y</i> residuals.				
	G.	H.	D.	I.	Mean.	G.	H.	D.	I.	Mean.
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
11	+0.04	+0.70	—	—	—	+0.01	+0.52	—	—	—
5	-0.05	-0.50	+0.12	+0.14	-0.07	-0.16	-0.11	+0.21	-0.04	-0.02
4	-0.30	-0.40	-0.18	+0.02	-0.21	+0.41	+0.07	-0.22	-0.32	-0.02
3	+0.16	+0.30	-0.13	-0.32	0.00	-0.34	-0.20	+0.33	+0.10	-0.03
6	+0.14	-0.09	-0.54	-0.13	-0.16	+0.07	-0.27	-0.39	-0.08	-0.17
10	—	—	+0.73	+0.27	—	—	—	+0.07	+0.35	—

The average *y*-residual is  $\pm 0''\cdot22$ , which gives a probable error for *y* of  $\pm 0''\cdot21$ .

It is satisfactory that this agrees so nearly with the probable error ( $\pm 0''\cdot22$ ) of the check plates, showing that the images are of about the same degree of difficulty and therefore presumably comparable. The probable error of *x* is  $\pm 0''\cdot25$ , but we are not so much concerned with this.

The weight of the determination of  $\delta\kappa$  is about 3 (strictly 3.23 for Plate X and 2.87 for Plate W). The probable error of  $\kappa$  is therefore  $\pm 0''\cdot12$ , which corresponds to a probable error of  $\pm 0''\cdot38$  in the final values of the deflection.

As the four determinations involve only two eclipse plates and are not wholly independent, and further small accidental errors may arise through inaccurate determination of the orientation, the probable error of our mean result will be about  $\pm 0''\cdot25$ . There is further the error of  $\pm 0''\cdot14$  affecting all four results equally, arising from the determination of scale. Taking this into account, and including the small correction  $-0''\cdot04$  previously mentioned, our result may be written

$$1''\cdot61 \pm 0''\cdot30.$$

It will be seen that the error deduced in this way from the residuals is considerably larger than at first seemed likely from the accordance of the four results. Nevertheless the accuracy seems sufficient

---

\*\*\* The residuals refer to the theoretical deflection  $1''\cdot75$ , not the deduced.

to give a fairly trustworthy confirmation of EINSTEIN'S theory, and to render the half-deflection at least very improbable.

38. It remains to consider the question of systematic error. The results obtained with a similar instrument at Sobral are considered to be largely vitiated by systematic (p. 329) errors. What ground then have we — apart from the agreement with the far superior determination with the 4-inch lens at Sobral — for thinking that the present results are more trustworthy?

At first sight everything is in favour of the Sobral astrographic plates. There are 12 stars shown against 5, and the images though far from perfect are probably superior to the Principe images. The multiplicity of plates is less important, since it is mainly a question of systematic error. Against this must be set the fact that the five stars shown on Plates W and X include all the most essential stars; stars 3 and 5 give the extreme range of deflection, and there is no great gain in including extra stars which play a passive part. Further, the gain of nearly two extra magnitudes at Sobral must have meant over-exposure for the brighter stars, which happen to be the really important ones; and this would tend to accentuate systematic errors, whilst rendering the defects of the images less easily recognized by the measurer. Perhaps, therefore, the cloud was not so unkind to us after all.

Another important difference is made by the use of the extraneous determination of scale for the Principe reductions. Granting its validity, it reduces very considerably both accidental and systematic errors. The weight of the determination from the five stars with known scale is more than 50 per cent. greater than the weight from the 12 stars with unknown scale. Its effect as regards systematic error may be seen as follows. Knowing the scale, the greatest relative deflection to be measured amounts to  $1''\cdot2$  on EINSTEIN'S theory; but if the scale is unknown and must be eliminated, this is reduced to  $0''\cdot67$ . As we wish to distinguish between the full deflection and the half deflection, we must take half these quantities. Evidently with poor images it is much more hopeful to look for a difference of  $0''\cdot6$  than for  $0''\cdot3$ . It is, of course, impossible to assign any precise limit to the possible systematic error in interpretation of the images by the measurer; but we feel fairly confident that the former figure is well outside possibility.

A check against systematic error in our discussion is provided by the check plates, as already shown. Its efficacy depends on the similarity of the images on the check plates and eclipse plates at Principe. Both sets are fainter than the Oxford images with which they are compared, the former owing to the imperfect driving of the cœlost, which made it impossible to secure longer exposures, the latter owing to cloud. Both sets have a faint wing in declination, but this is separated by a slight gap from the true images, and, at least on the plates measured, the wing can be distinguished and ignored. The images on Plates W and X are not unduly diffused except for No. 10 on Plate W. Difference in quality between the eclipse images and the Principe check images is not noticeable, and is certainly far less than the difference between the latter and the Oxford images; and, seeing that the latter comparison gives no systematic error in  $y$ , it seems fair to assume that the comparison of the eclipse plates is free from systematic error.

The writer must confess to a change of view with regard to the desirability of using (p. 330) an extraneous determination of scale. In considering the programme it had seemed too risky a proceeding, and it was thought that a self-contained determination would receive more confidence. But this opinion has been modified by the very special circumstances at Principe; and it is now difficult to see that any valid objection can be brought against the use of the scale.

The temperature at Principe was remarkably uniform and the extreme range probably did not exceed 40 during our visit — including day and night, warm season and cold season. The temperature ranged generally from  $77\frac{1}{2}^{\circ}$  to  $79\frac{1}{2}^{\circ}$  in the rainy season, and about  $1^{\circ}$  colder in the cool gravana. All the check plates and eclipse plates were taken within a degree of the same temperature, and there was, of course, no perceptible fall of temperature preceding totality. To avoid any alteration of scale in the daytime the telescope tube and object-glass were shaded from direct solar radiation by a canvas screen; but even this was scarcely necessary, for the clouds before totality provided a still more efficient screen, and the feeble rays which penetrated could not have done any mischief. A heating of the mirror by the sun's rays could scarcely have produced a true alteration of scale though it might have done harm by altering the definition; the cloud protected us from any trouble of this kind. At the Oxford end of the comparison the scale is evidently the same for both sets of plates, since they were both taken at night and intermingled as regards date.

It thus appears that the check scale is legitimately applicable to the eclipse plates. But the method may not be so satisfactory at future eclipses, since the particular circumstances at Principe are not likely to be reproduced. As regards other sources of systematic error, our chief guarantee lies in the comparatively large amount of the deflection to be measured, and the test satisfied by the check plates that photographs of another field under similar conditions show no deflections comparable with those here found.

## V. GENERAL CONCLUSIONS.

39. In summarizing the results of the two expeditions, the greatest weight must be attached to those obtained with the 4-inch lens at Sobral. From the superiority of the images and the larger scale of the photographs it was recognized that these would prove to be much the most trustworthy. Further, the agreement of the results derived independently from the right ascensions and declinations, and the accordance of the residuals of the individual stars (p. 308), provides a more satisfactory check on the results than was possible for the other instruments.

These plates gave

From declinations	1''·94
From right ascensions	2''·06



(p. 331) The result from declinations is about twice the weight of that from right ascensions, so that the mean result is

$$1''\cdot98$$

with a probable error of about  $\pm 0''\cdot12$ .

The Principe observations were generally interfered with by cloud. The unfavourable circumstances were perhaps partly compensated by the advantage of the extremely uniform temperature of the island. The deflection obtained was

$$1''\cdot61.$$

The probable error is about  $\pm 0''\cdot30$ , so that the result has much less weight than the preceding.

Both of these point to the full deflection  $1''\cdot75$  of EINSTEIN'S generalized relativity theory, the Sobral results definitely, and the Principe results perhaps with some uncertainty. There remain the Sobral astrographic plates which gave the deflection

$$0''\cdot93$$

discordant by an amount much beyond the limits of its accidental error. For the reasons already described at length not much weight is attached to this determination.

It has been assumed that the displacement is inversely proportional to the distance from the sun's centre, since all theories agree on this, and indeed it seems clear from considerations of dimensions that a displacement, if due to gravitation, must follow this law. From the results with the 4-inch lens, some kind of test of the law is possible though it is necessarily only rough. The evidence is summarized in the following table and diagram, which show the radial displacement of the individual stars (mean from all the plates) plotted against the reciprocal of the distance from the centre. The displacement according to EINSTEIN'S theory is indicated by the heavy line, according to the Newtonian law by the dotted line, and from these observations by the thin line.

Radial Displacement of Individual Stars.

Star.	Calculation.	Observation.
	"	"
11	0·32	0·20
10	0·33	0·32
6	0·40	0·56
5	0·53	0·54
4	0·75	0·84
2	0·85	0·97
3	0·88	1·02

(p. 332)

Thus the results of the expeditions to Sobral and Principe can leave little doubt that a deflection of light takes place in the neighbourhood of the sun and that it is of the amount demanded by EINSTEIN'S generalized theory of relativity, as attributable to the sun's gravitational field. But the observation is of such interest that it will probably be considered desirable to repeat it at future eclipses. The unusually favourable conditions of the 1919 eclipse will not recur, and it will be necessary to photograph fainter stars, and these will probably be at a greater distance from the sun.

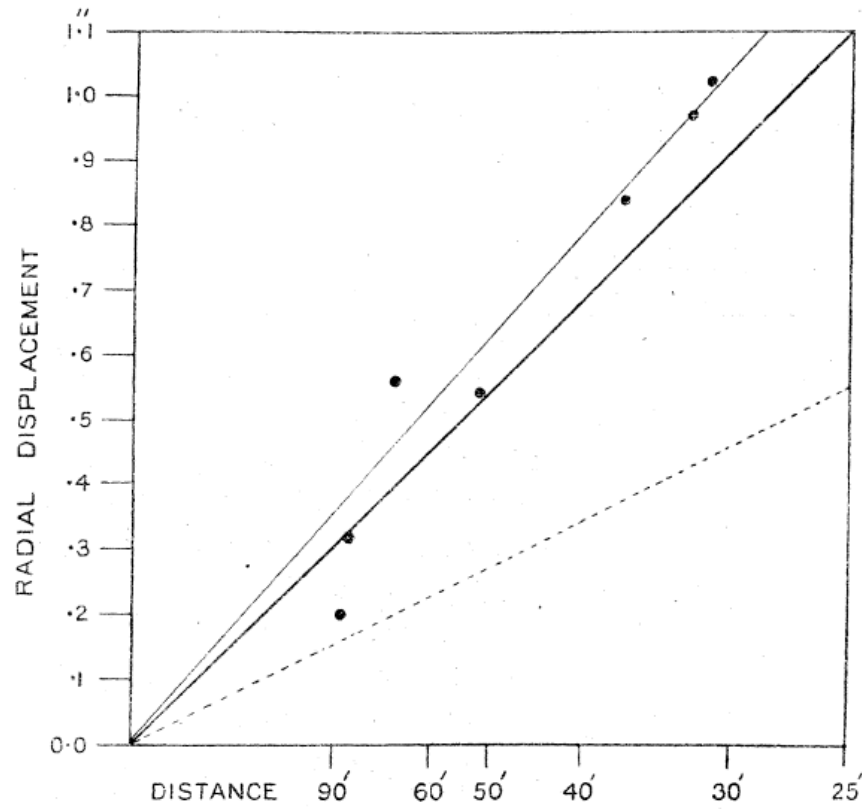


Diagram 2.

This *can* be done with such telescopes as the astrographic with the object-glass stopped down to 8 inches, if photographs of the same high quality are obtained as in regular stellar work. It will probably be best to discard the use of cœlostats mirrors. These are of great convenience for photographs of the corona and spectroscopic observations, but for work of precision of the high order required, it is undesirable to introduce complications, which can be avoided, into the optical train. It would seem that some form of equatorial mounting (such as that employed in the Eclipse Expeditions of the Lick Observatory) is desirable.

In conclusion, it is a pleasure to record the great assistance given to the Expeditions from many quarters. Reference has been made in the course of the paper to some of these. Especial thanks are due to the Brazilian Government for the hospitality and facilities accorded to the observers in Sobral. They were made guests of the (p. 333) Government, who provided them with transport, accommodation and labour. Dr. MORIZE, Director of the Rio Observatory, acting on behalf of the Brazilian Government, made most complete arrangements for the Expedition, and in this way contributed materially to its success.

On behalf of the Principe Expedition, special thanks are due to Sr. JERONYMO CARNEIRO who most hospitably entertained the observers and provided for all their requirements, and to Sr. ATALAYA whose help and friendship were of the greatest service to the observers in their isolated station.

We gratefully acknowledge the loan for more than six months of the astrographic object-glass of the Oxford University Observatory. We are also indebted to Mr. BELLAMY for the check plates he obtained in January and February.

Thanks are due to the Royal Irish Academy for the loan of the 4-inch object-glass and 8-inch cœlostát.

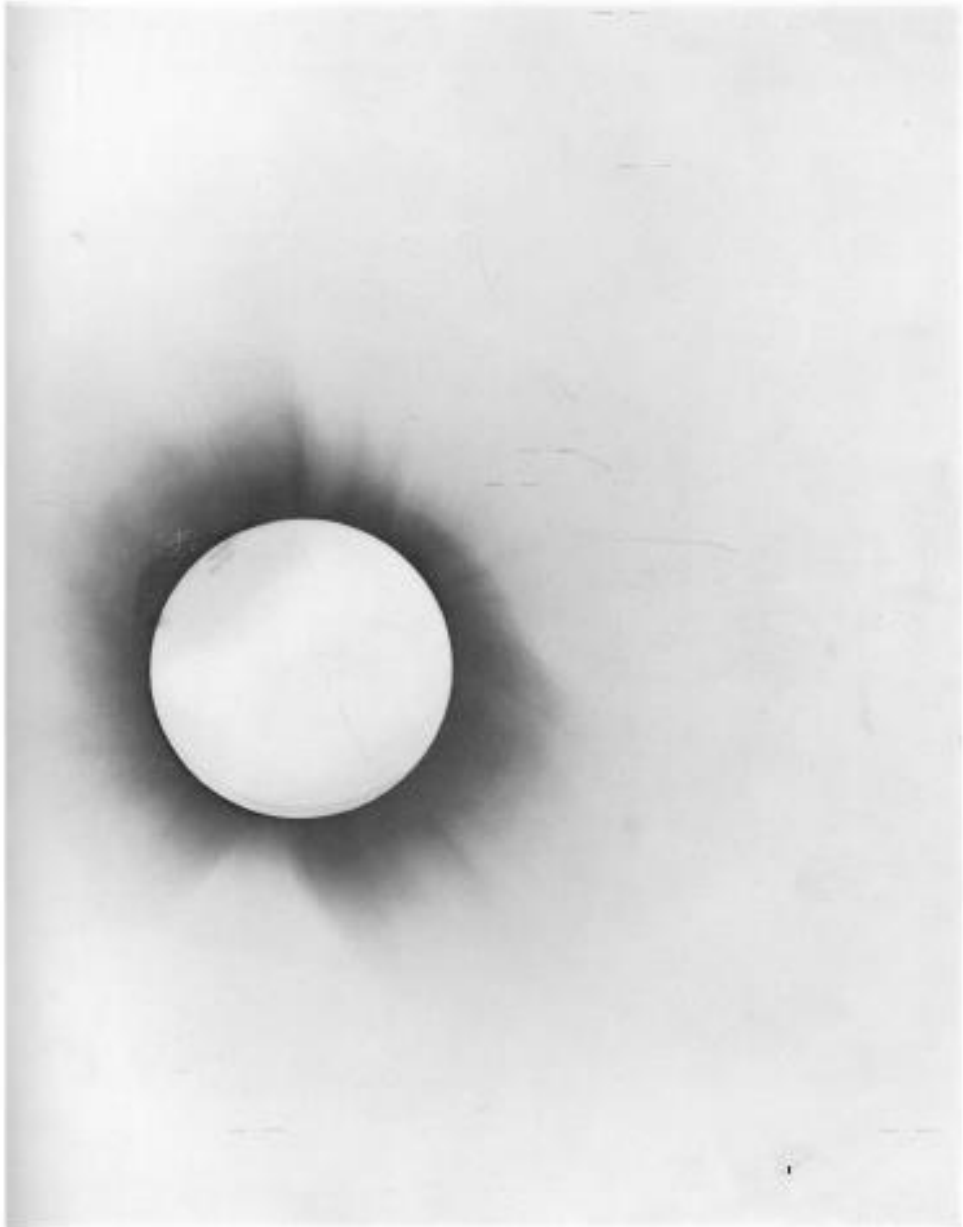
As stated above, the expeditions were arranged by the Joint Permanent Eclipse Committee with funds , allocated by the Government Grant Committee

[In Plate 1 is given a half-tone reproduction of one of the negatives taken with the 4-inch lens at Sobral. This shows the position of the stars, and, as far as possible in a reproduction of this kind, the character of the images, as there has been no retouching.

A number of photographic prints have been made and applications for these from astronomers, who wish to assure themselves of the quality of the photographs, will be considered and as far as possible acceded to.]

*Dyson and others.*

*Phil. Trans., A, vol.220, Plate 1.*





## BIBLIOGRAFÍA GENERAL

**Bruce J. Hunt:** *The Maxwellians*, Cornell History of Science, Cornell University Press, Ithaca, N. Y. (1994).

**Gillian O'Neill.** “*Flightless Fitzgerald*”: Remembering one of Trinity’s Greatest Scientific Pioneers. *University Times*. <https://universitytimes.ie/2020/06/flightless-fitzgerald-remembering-one-of-trinitys-greatest-scientific-pioneer/>

**C. Donaghy-Spargo – A. Yakovlev:** *Oliver Heaviside's electromagnetic theory*, <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0229>

**H. R. Hertz, M. García Doncel:** *Heinrich Hertz, las ondas electromagnéticas*, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, (1998)

**H. A. Lorentz:** *Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Leiden*, Leipzig Akademische Verlagsgesellschaft m.b.h., 1927-31. (El volumen V está dedicado al Electromagnetismo)

The Nobel Foundation. Nobel lecture:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1902/zeeman/lecture/>

**Walter Isaacson:** *Einstein, su vida y su universo*. [www.librosmaravillosos.com](http://www.librosmaravillosos.com).

**A. S. Eddington:** *Space, Time and Gravitation: An Outline of the General Relativity Theory*. Cambridge University Press, (1920)

**J. Gray:** *Henri Poincaré: A Scientific Biography*, Princeton University Press, Princeton. (2012)









En esta obra, el autor nos presenta aspectos relevantes de la Historia de la Física. El Tomo I, abarca desde la más remota Antigüedad hasta la confirmación experimental de que la luz es un conjunto de radiaciones electromagnéticas. El Tomo II, abarca descubrimientos importantes desde los experimentos de Michelson hasta el modelo de Bohr con las correcciones de Sommerfeld. El Tomo III trata las teorías de Lorentz con los experimentos de Zeeman hasta la teoría de la Relatividad general de Einstein y la corroboración experimental de 1919.



Miguel Katz, además de ser Profesor en Química y Licenciado en Enseñanza de la Química, es Doctor en Epistemología e Historia de la Ciencia. Ha sido docente de estas especialidades en varias Universidades e Institutos terciarios y Consultor del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. También fue galardonado con el Premio "Educación en Química" de la AQA.





